Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра вычислительных методов

Дипломная работа
«Математические модели многофазных сред»

Выполнил студент 506 гр.
Сюков Михаил Алексеевич
Научный руководитель
д. ф.-м. н. С. И. Мухин

Постановка задачи.

Рассматривается смесь, состоящая из N фаз. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии для каждой фазы:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \vec{v}_i = \sum_{j-1}^{N} J_{ji},$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i \vec{g}_i + \sum_{j=1}^{N} \left(P_{ji} - J_{ji} \vec{v}_i \right),$$

$$\rho_i \frac{d_i \left(u_i + v_i^2/2 \right)}{d\,t} = \nabla \left(c_i - q_i \right) + \rho_i g_i \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{N} \left(E_{ji} - J_{ji} \left(u_i + v_i^2/2 \right) \right),$$

где ρ_i *— масса i — ой составляющей в единице объёма смеси,*

$\vec{v}_i$ *— скорость i — ой составляющей,*

J_{ji} *— величина, характеризующая интенсивность перехода массы из j — ой в i — ую фазы,*

σ_i^{kl} *— тензор внешних поверхностных сил,*

g_i *— вектор массовых сил,*

P_{ji} *— величина, характеризующая интенсивность обмена импульсом между j — ой и i — ой составляющими,*

u_i *— удельная внутренняя энергия i — ой фазы,*

c_i *— работа внешних поверхностных сил,*

q_i *— приток тепла,*

E_{ji} *— величина, характеризующая интенсивность обмена энергией между i — ой и j — ой фазами.*

Уравнения для частного случая двухфазной смеси.

$$\text{Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости}:$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{1x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} = J_{21},$$

$$\text{Уравнение неразрывности для газа}:$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + v_{2y}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \rho_2\left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y}\right) = J_{12},$$

$$\text{Уравнение движения для проекции на ось } Ox \text{ для обеих фаз}:$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2} v_{1,2\,x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_{1,2} v_{1,2\,x}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{1,2} v_{1,2\,y} v_{1,2\,x} = J_{21,12} v_{2,1\,x} + \frac{\partial \sigma_{11,22}}{\partial x},$$

$$\text{Уравнение движения для проекции на ось } Oy \text{ для обеих фаз}:$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2} v_{1,2\,y}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_{1,2} v_{1,2\,x} v_{1,2\,y} + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{1,2} v_{1,2\,y}^2 = J_{21,12} v_{2,1\,y} + \frac{\partial \sigma_{11,22}}{\partial y},$$

$$\text{Уравнение энергии для обеих фаз}:$$

$$\frac{\partial\left(\rho_{1,2}\left(u_{1,2} + \left(v_{1,2\,x}^2 + v_{1,2\,y}^2\right)/2\right)\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{1,2}\left(u_{1,2} + \left(v_{1,2\,x}^2 + v_{1,2\,y}^2\right)/2\right) v_{1,2\,x}\right)$$

$$\frac{+\partial\left(\rho_{1,2}\left(u_{1,2} + \left(v_{1,2\,x}^2 + v_{1,2\,y}^2\right)/2\right) v_{1,2\,y}\right)}{\partial y} = J_{21}^{12}\left(u_{2,1} + \left(v_{2,1\,x}^2 + v_{2,1\,y}^2\right)/2\right),$$

где v_{ix} – проекция скорости фазы на ось Ox,

v_{iy} – проекция скорости фазы на ось Oy.

Разностная схема.

$$\rho_1^{t+1}=\delta t\left(J_{21}+\rho_1\left(\frac{1}{\delta t}-\frac{v_{1x}}{\delta x}-\frac{v_{1y}}{\delta y}\right)+\frac{v_{1x}\rho_1^{x-1}}{\delta x}+\frac{v_{1y}\rho_1^{y-1}}{\delta y}\right)$$

$$\rho_2^{t+1}=\delta t\left(J_{12}+\rho_2\left(\frac{1}{\delta t}-\frac{2v_{2x}}{\delta x}-\frac{2v_{2y}}{\delta y}+\frac{v_{2x}^{x-1}}{\delta x}+\frac{v_{2y}^{y-1}}{\delta y}\right)+\frac{v_{2x}\rho_2^{x-1}}{\delta x}+\frac{v_{2y}\rho_2^{y-1}}{\delta y}\right)$$

$$v_{1,2x}^{t+1}=\frac{\delta t}{\rho_{1,2}^{t+1}}\left(J_{21,12}v_{2,1x}+\frac{\rho_{1,2}v_{1,2x}}{\delta t}-\frac{\rho_{1,2}v_{1,2x}^2-\rho_{1,2}^{x-1}(v_{1,2x}^{x-1})^2}{\delta x}-\frac{\rho_{1,2}v_{1,2x}v_{1,2y}-\rho_{1,2}^{y-1}v_{1,2x}^{y-1}v_{1,2y}^{y-1}}{\delta y}-\frac{p^{x+1}-p^{x-1}}{2\delta x}\right)$$

$$v_{1,2y}^{t+1}=\frac{\delta t}{\rho_{1,2}^{t+1}}\left(J_{21,12}v_{2,1y}+\frac{\rho_{1,2}v_{1,2y}}{\delta t}-\frac{\rho_{1,2}v_{1,2x}v_{1,2y}-\rho_{1,2}^{x-1}v_{1,2x}^{x-1}v_{1,2y}^{x-1}}{\delta x}-\frac{\rho_{1,2}v_{1,2y}^2-\rho_{1,2}^{y-1}(v_{1,2y}^{y-1})^2}{\delta y}-\frac{p^{y+1}-P^{y-1}}{2\delta y}\right)$$

$$u_{1,2}^{t+1}=\frac{\delta t}{\rho_{1,2}^{t+1}}\left(J_{21,12}\left(u_{2,1}+(v_{2,1x}^2+v_{2,1y}^2)/2\right)+f_{1,2}(x,y)/\delta t-\left(f_{1,2}(x,y)v_{1,2x}-f_{1,2}(x-1,j)v_{1,2x}^{x-1}\right)/dx\right.$$

$$\left.-\left(f_{1,2}(x,y)v_{1,2y}-f_{1,2}(x,y-1)v_{1,2y}^{y-1}\right)/\delta y-\rho_{1,2}^{t+1}\left((v_{1,2x}^{t+1})^2+(v_{1,2y}^{t+1})^2\right)/2\delta t\right),$$

$$\textit{где}\ f_{1,2}(x,y)=\rho_{1,2}\left(u_{1,2}+(v_{1,2x}^2+v_{1,2y}^2)/2\right)$$

Граничные условия:

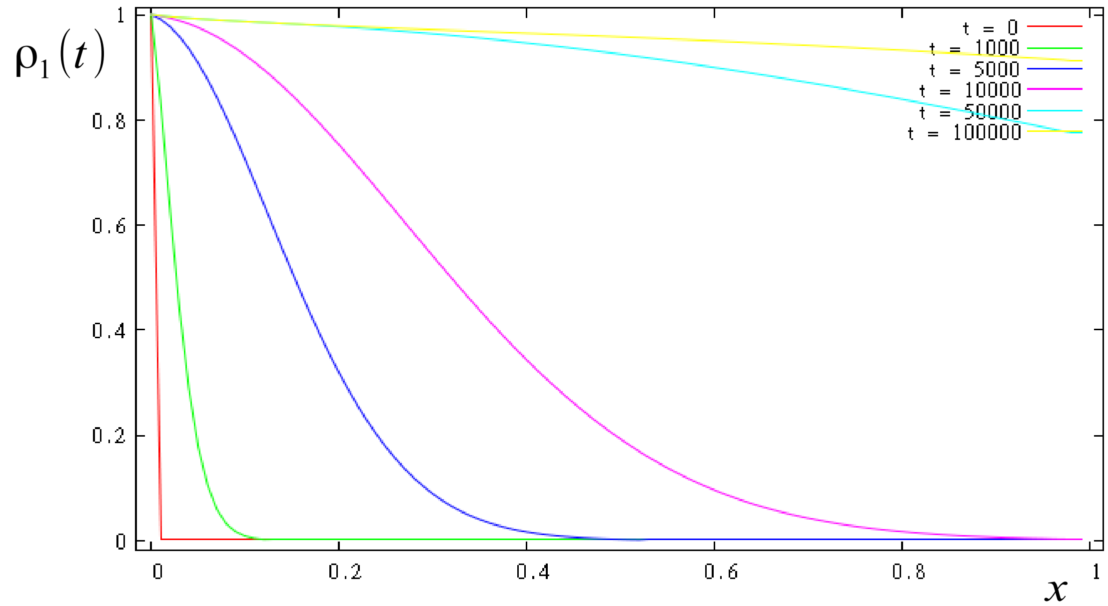
$$\rho_{1,2}(x,y,0)=\rho(x,y);\ v_{1,2x}(x,y,0)=v_x(x,y);\ v_{1,2y}(x,y,0)=v_y(x,y);\ u_{1,2}(x,y,0)=u(x,y)$$

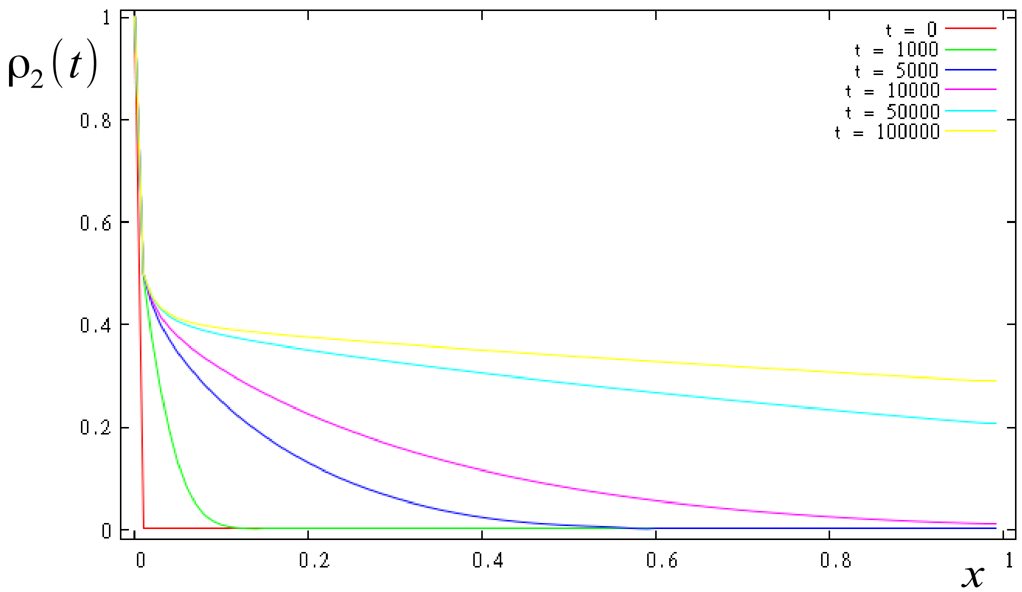
$$\rho_{1,2}(0,y,t)=\rho_0(y,t);\ v_{1,2x}(0,y,t)=v_{0x}(y,t);\ v_{1,2y}(0,y,t)=v_{y0}(y,t);\ u_{1,2}(0,y,t)=u_0(y,t)$$

$$v_{1,2y}(x,0,t)=0;\ v_{1,2y}(x,y_m,t)=0;\ f(x_m-\delta x,y,t)=f(x_m,y,t)$$

Тестовые расчеты (1)

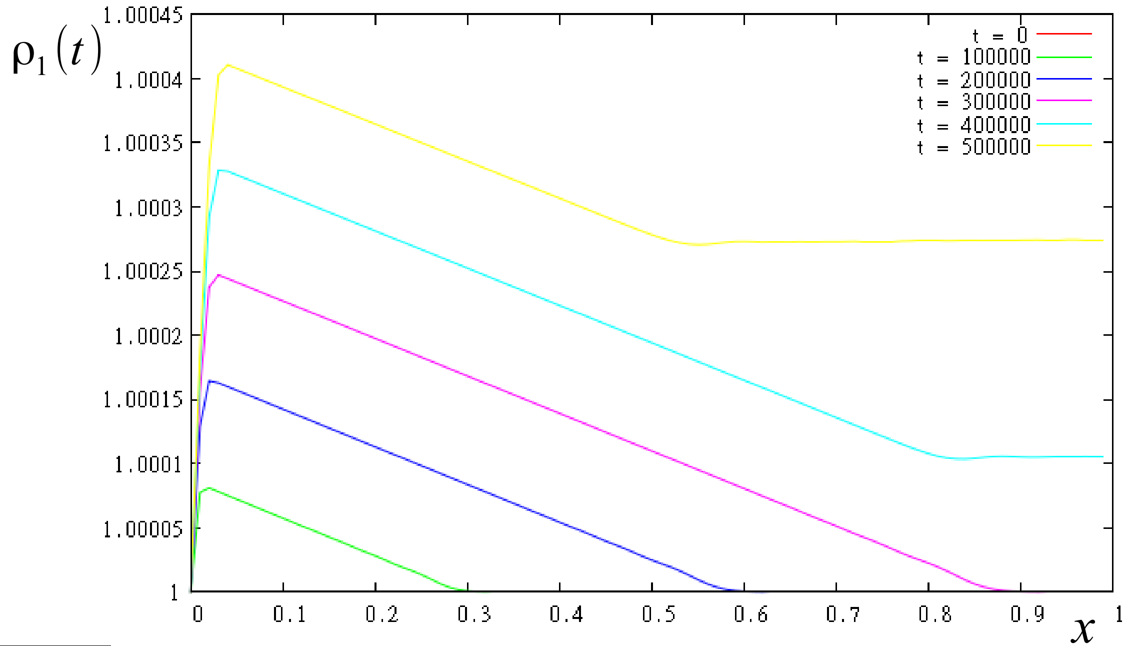
$$\rho_1(x, y, 0) = 0$$
$$\rho_2(x, y, 0) = 0$$
$$v_{1,2x}(x, y, 0) = 0$$
$$v_{1,2y}(x, y, 0) = 0$$



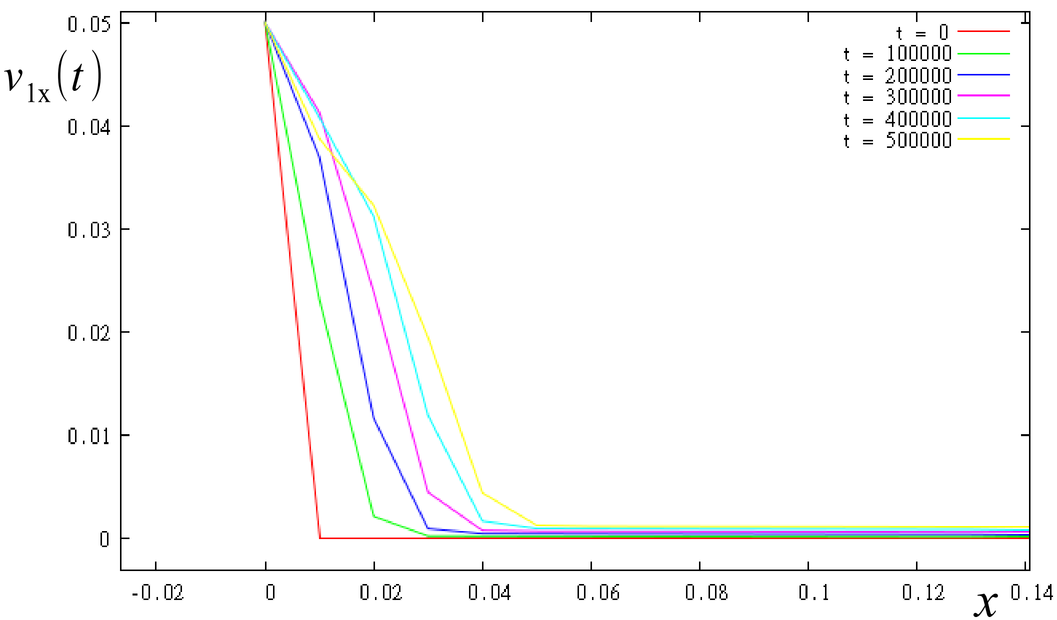


$$\rho_1(0, y, t) = \rho_2(0, y, t) = const$$
$$v_{1,2x}(0, y, t) = 0$$
$$v_{1,2y}(0, y, t) = 0$$

Тестовые расчеты (2)



$$\rho_1(x,y,0)=\rho_2(x,y,0)=\rho_1(0,y,t)=\rho_2(0,y,t)=const$$
$$v_{1x}(x,y,0)=v_{2x}(x,y,0)=0$$
$$v_{1x}(0,y,t)=v_{2x}(0,y,t)=const$$
$$v_{1y}(0,y,t)=v_{2y}(0,y,t)=v_{1x}(x,y,0)=v_{2x}(x,y,0)$$



Результаты

- Получены уравнения для различных предельных случаев механики двухфазных сред различной природы.
- Выписаны уравнения движения двухфазной жидкости в предположении, что одна из фаз — несжимаемая жидкость, вторая — газ.
- Построен численный алгоритм для решения уравнений, описывающих движение двухфазных сред, и проведены тестовые расчеты, подтвердившие корректность метода.