



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов



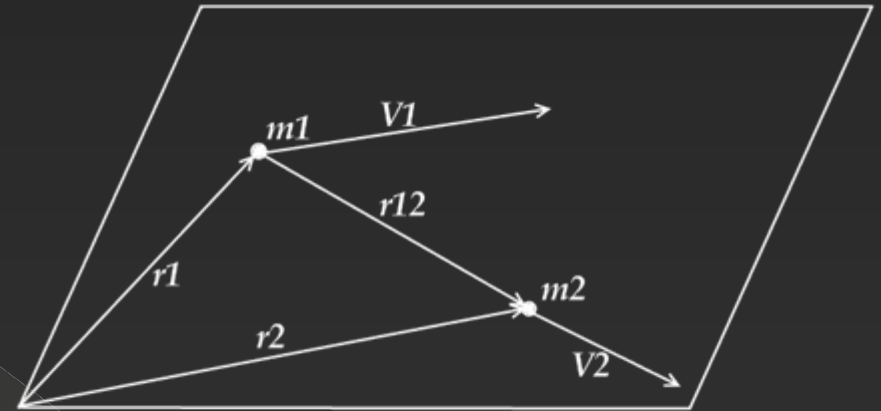
«Анализ вычислительных методов для задач динамики взаимодействия материальных точек»

Исполнитель: Павлов Михаил Борисович
Научные руководители: д. ф.-м. н., проф. Еленин Г.Г.,
м. н. с. Шляхов П.И.

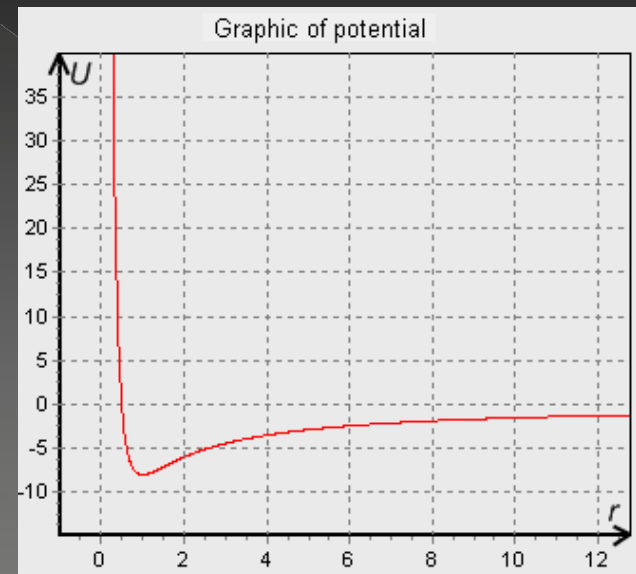
Москва 2011

Постановка задачи

- Рассматривается плоское движение двух материальных точек с заданными массами (m), положениями (r) и скоростями (V)



- задается потенциал взаимодействия между частицами $U = U(r)$



Виды потенциалов взаимодействия

○ Кратцера:

$$f = \frac{k_1 k_2}{r} \left(2 - \frac{k_2}{r} \right)$$

○ Леннарда-Джонса:

$$f = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} \right]$$

○ Ньютона:

$$f = -\frac{1}{r}$$

Постановка задачи Коши

Уравнения:
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_{12} = -\text{grad}_1 U_{12} (|\vec{r}_{12}|) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_{21} = -\text{grad}_2 U_{21} (|\vec{r}_{12}|) \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(0) &= \vec{r}_{10} \\ \vec{r}_2(0) &= \vec{r}_{20} \\ \dot{\vec{r}}_1(0) &= \vec{V}_{10} \\ \dot{\vec{r}}_2(0) &= \vec{V}_{20} \end{aligned}$$

Цели

- Создание компьютерной программы для проведения вычислительных экспериментов
- Проведение вычислительных экспериментов
- Анализ и сравнение методов и полученных результатов

Задача Кеплера

● Потенциал взаимодействия $U = -\frac{\alpha}{r}$

● Эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

● Аналитическое решение

$$t = \sqrt{\frac{\mu \alpha^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi)$$

$$\begin{cases} x = a(\cos \xi - e + (1 - e \cos \xi) \cos \left(\varphi_0 - \arccos \frac{\frac{L}{r_0} - \frac{\mu \alpha}{L}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 \alpha^2}{L^2}}} \right)) \\ y = \sqrt{(a(1 - e \cos \xi))^2 - x^2} \end{cases}$$

Численные методы

- Явный метод Эйлера
- Неявный метод Эйлера
- Семейство неявных трехстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты
- Метод Штермера-Верле
- Явный четырехстадийный метод Рунге-Кутты
- Метод средней точки

Метод Штермера-Верле

- Система в общем виде

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(q) \end{cases}$$

- Численный метод

$$\begin{cases} v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{h}{2} f(q_n) \\ q_{n+1} = q_n + h v_{n+\frac{1}{2}} \\ v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(q_{n+1}) \end{cases}$$

Семейство неявных трехстадийных методов Рунге- Кутты

- Система уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} \equiv \frac{d}{dt} U = F(U) \equiv F \begin{pmatrix} v \\ -\text{grad}(U(r)) \end{pmatrix}$$

- Метод

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} + \tau \left(b_1 \begin{pmatrix} K_1^r \\ K_1^v \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} K_2^r \\ K_2^v \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} K_3^r \\ K_3^v \end{pmatrix} \right),$$

$$\begin{pmatrix} K_1^r \\ K_1^v \end{pmatrix} = F \left(\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} K_1^r \\ K_1^v \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} K_2^r \\ K_2^v \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} K_3^r \\ K_3^v \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right)$$

- Таблица Батчера

$\frac{1}{2}b_1$	$(1 - 2b_1)\left(\frac{1}{2} + s_{12}\right)$	$b_1\left(\frac{1}{2} + s_{13}\right)$
$b_1\left(\frac{1}{2} - s_{12}\right)$	$\frac{1}{2} - b_1$	$b_1\left(\frac{1}{2} + s_{12}\right)$
$b_1\left(\frac{1}{2} - s_{13}\right)$	$(1 - 2b_1)\left(\frac{1}{2} - s_{12}\right)$	$\frac{1}{2}b_1$
b_1	$1 - 2b_1$	b_1

Семейство неявных трехстадийных методов Рунге- Кутты

- По крайней мере 2 порядок аппроксимации

$$(b_1 \neq 0, 0.5, s_{12} \neq 0.5, s_{13} \neq 0.5)$$

- По крайней мере 4 порядок аппроксимации

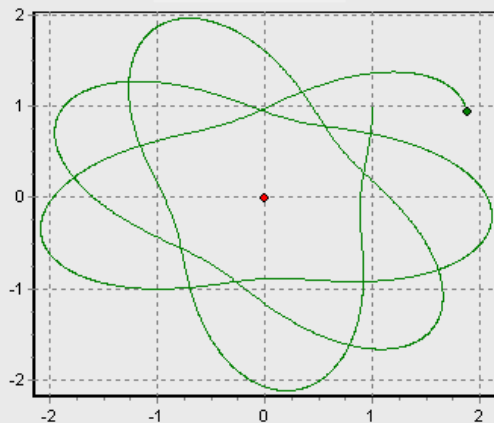
$$(1 - b_1)s_{12} + b_1s_{13} = \pm 0.5 * (6 * b_1)^{-0.5}$$

- По крайней мере 6 порядок аппроксимации

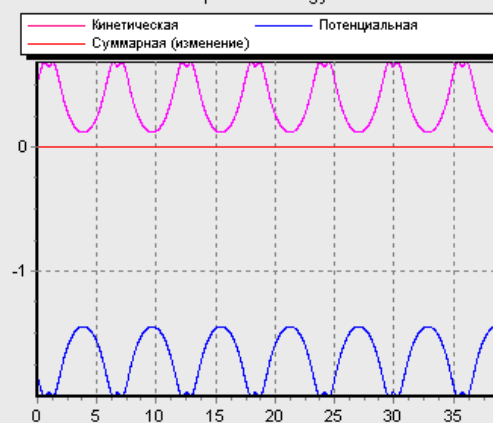
$$\left(b_1 = \frac{5}{18}, s_{12} = \pm \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^{0.5}, s_{13} = \pm \frac{3}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{0.5} \right)$$

Интерфейс программы

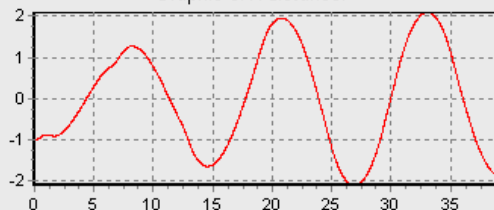
Movement of bodies



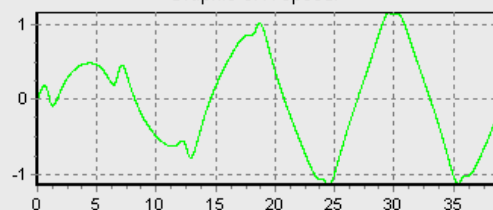
Graphic of Energy.



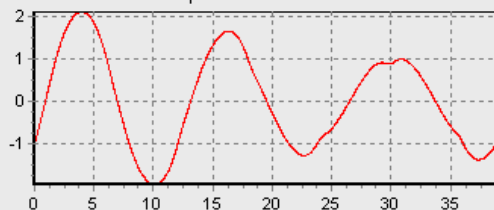
Graphic of X distance.



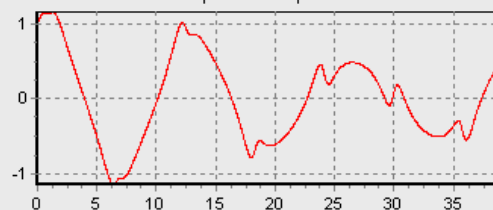
Graphic of X speed.



Graphic of Y distance



Graphic of Y speed



Welcome to Mathematical Movement of 2 Bodies in 2D!

Choose potential from the list below:

- ☒ Kratcer's
☐ Newton's
☐ Lennard-Jones

Coefficient 1:
 Coefficient 2:

Eps:
 Sig:

Weight 1:
 Weight 2:

Coordinate X1:
 Coordinate Y1:

Coordinate X2:
 Coordinate Y2:

Speed X1:
 Speed Y1:

Speed X2:
 Speed Y2:

Calculated Mu:

Calculated r120:

Calculated U0:

Calculated E0:

Calculated L0:

Calculate and draw

Choose calculating method

- ☐ Euler's explicit
☒ Runge-Kutt
☐ Euler's implicit
☐ Middle point
☐ Stormer-Verlet
☐ Impl. Runge-Kutt

Step:
 Step over:
 End time:

Start calculating method

Iteration:

E12:

Next step

Distance x:

Speed x:

Distance y:

Speed y:

Automatic

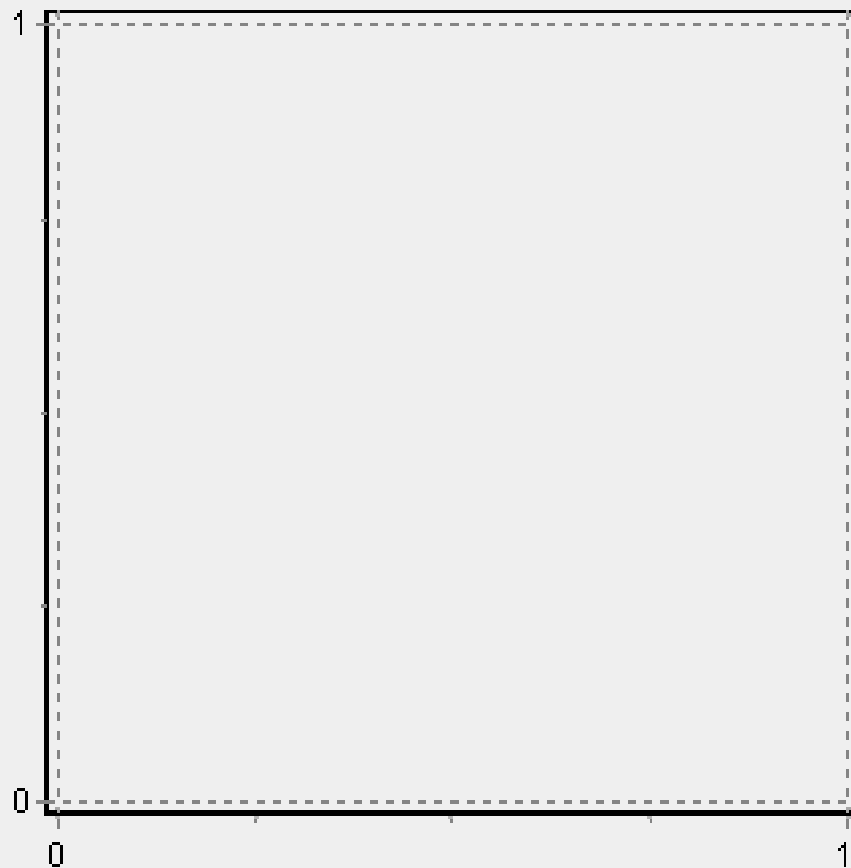
Time step now:

Usefull information about calculations and errors:

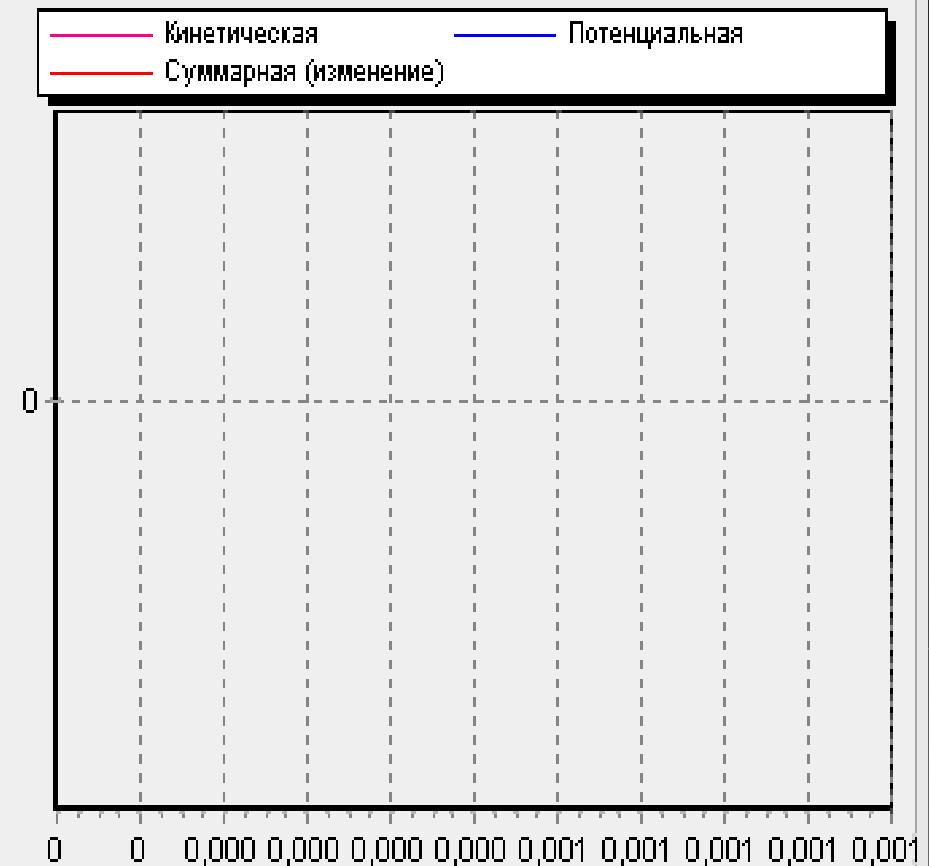
Step is set by optimal value:
 0.0157067146838982

Метод средней точки для НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Movement of bodies

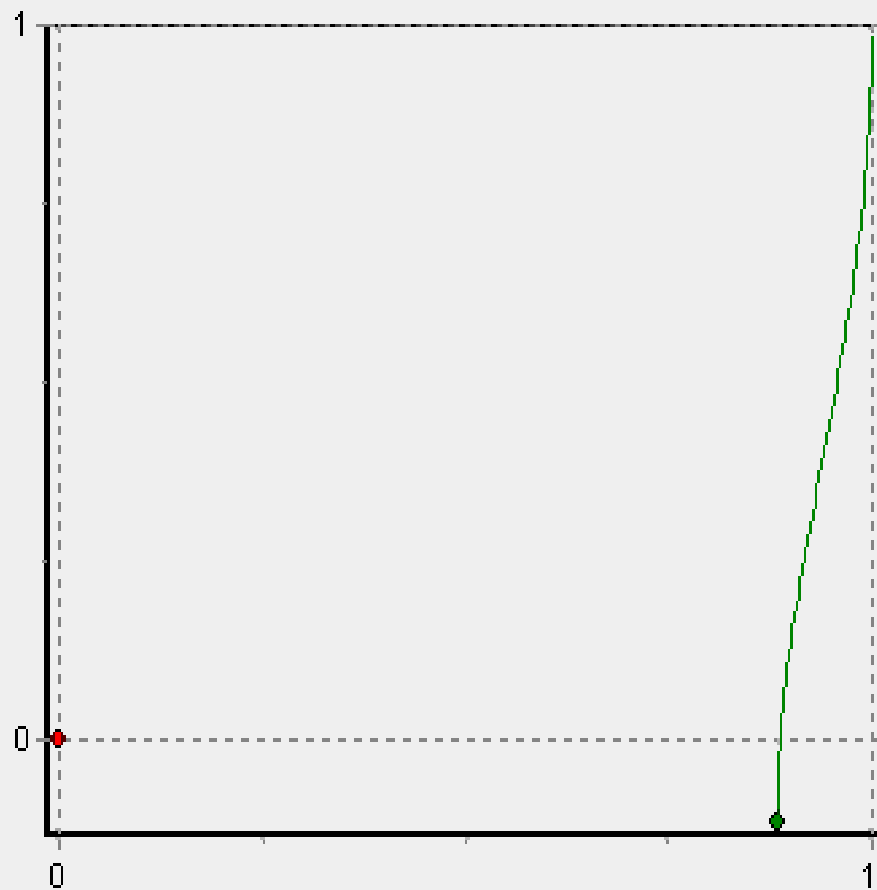


Graphic of Energy.

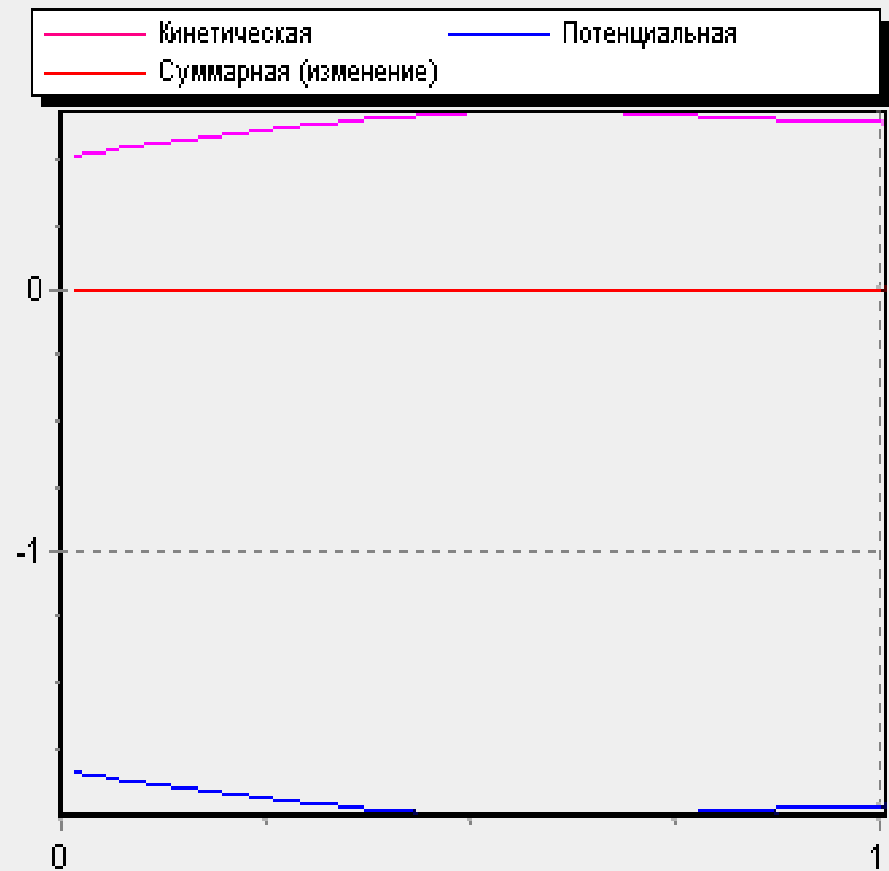


Неявный трехстадийный метод Рунге-Кутты

Movement of bodies



Graphic of Energy.

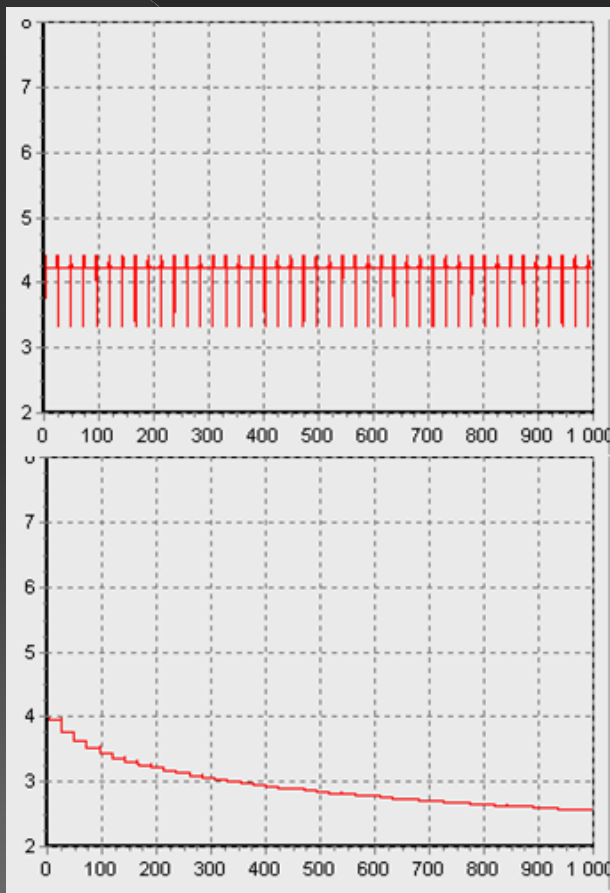


Выводы дипломной работы

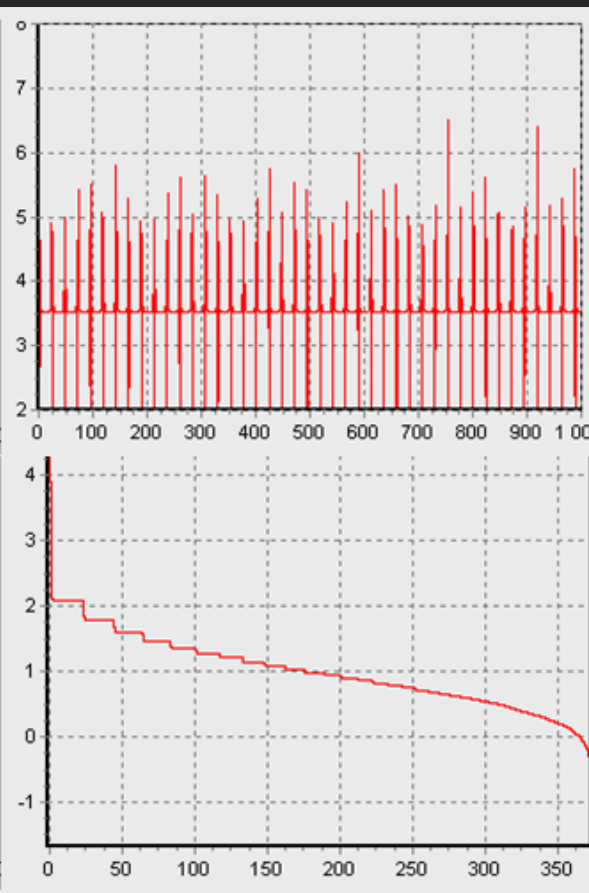
- При использовании явного метода Эйлера энергия существенно растёт, при неявном и средней точки - убывает
- При использовании методов Штермера-Верле и неявного метода Рунге-Кутты энергия сохраняется существенно дольше

ВЫВОДЫ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

Неявный метод Р.-К.
4 порядка



Метод Штермера-Верле



Явный Р.-К. 4 порядка

Метод средней точки