Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Ефимова Анна Александровна

"Изучение эффективности вариационного алгоритма усвоения данных при численном решении уравнения переноса по схеме уголок".

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
В. М. Головизнин

Москва 2018

Цель работы

- Разработать программу решения прямой задачи для простейшего уравнения переноса по схеме первого порядка аппроксимации «уголок»
- Сформулировать задачу восстановления неизвестных начальных условий по результатам измерений значений искомой функции на дискретном множестве точек
- Построить сопряженную систему разностных уравнений
- Вычислить градиент функционала невязки
- Запрограммировать градиентный метод поиска минимума функционала невязки
- Исследовать сходимость алгоритма вариационного усвоения данных в зависимости от полноты данных мониторинга

Постановка прямой задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \quad \mathrm{c} = 1; \quad x \in [0,1]; \quad t \in [0,1];$$

$$\varphi(x,0) = f(x); \quad \varphi(0,\mathrm{t}) = 0; \quad f(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-0.2}{0.1}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{x-0.25}{0.1}\right)^2\right];$$

Постановка задачи усвоения данных

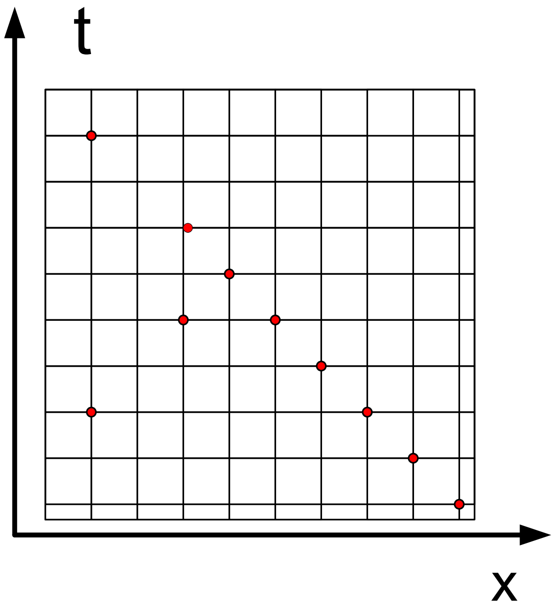
Найти минимум функционала

$$\Phi = \frac{1}{2}\iint\sum\left(\varphi - \varphi^*\right)^2 \delta\left(x - x_k, t - t_l\right)dxdt; \Rightarrow \min\Phi$$

На решениях уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \quad \mathrm{c} = 1; \quad x \in [0,1]; \quad t \in [0,1];$$

При различных начальных данных $\varphi(x,0) = f(x);$



Численное решение прямой задачи

$$\frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{\tau}+c\cdot\frac{\varphi_i^n-\varphi_{i-1}^n}{h}=0;\ \tau=\frac{1}{N-1};\quad h=\frac{1}{M-1};$$

$$\varphi\left(x_i,0\right)=f\left(x_i\right);\ i=1,\ldots M;$$

$$\varphi\left(0,t_n\right)=0;\quad n=1,\ldots,N-1;$$

Разностная задача восполнения начальных данных

Найти минимум функционала

$$\min\Phi\left\{\varphi\left(x_i,0\right)\right\}=\sum_{k,l\in sh1}\left(\varphi_k^l-\varphi_k^{*l}\right)\cdot\tau h\cdot\delta\left(i-k,n-l\right);$$

При условии

$$\frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{\tau}+c\cdot\frac{\varphi_i^n-\varphi_{i-1}^n}{h}=0;\ \tau=\frac{1}{N-1};\quad h=\frac{1}{M-1};$$

$$\varphi\left(0,t_n\right)=0;\quad n=1,\ldots,N-1;$$

Функция Лагранжа

$$\Phi^*\left\{\varphi\left(x_i,0\right)\right\}=\frac{1}{2}\sum_{k,l\in sh1}\left(\varphi_k^l-\varphi^{*l}_{\ k}\right)^2\cdot\tau h\cdot\delta\left(i-k,n-l\right)+$$

$$+\sum_i\ \sum_n\lambda_i^n\left\{\frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{\tau}+c\cdot\frac{\varphi_i^n-\varphi_{i-1}^n}{h}=0;\ \right\}\cdot\tau h$$

Сопряженная задача

$$\frac{\lambda_i^{n-1}-\lambda_i^n}{\tau}+c\cdot\frac{\lambda_{i+1}^n-\lambda_i^n}{h}=\left(\varphi_k^l-\varphi^{*l}_{\ k}\right)\delta\left(i-k,n-l\right);$$

$$\lambda_i^N=0,\quad i=1,\ M\text{ -}1;\quad \lambda_M^n=0,n=N,...,2;$$

Градиентный метод минимизации функционала

Градиент функционала

$$\frac{\partial \Phi^* \left\{ \varphi \left(x_i, 0 \right) \right\}}{\partial \varphi_i^1} = \lambda_i^1; \qquad grad \left(\Phi \right)^* = \left(\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{M-1}^1 \right)^T;$$

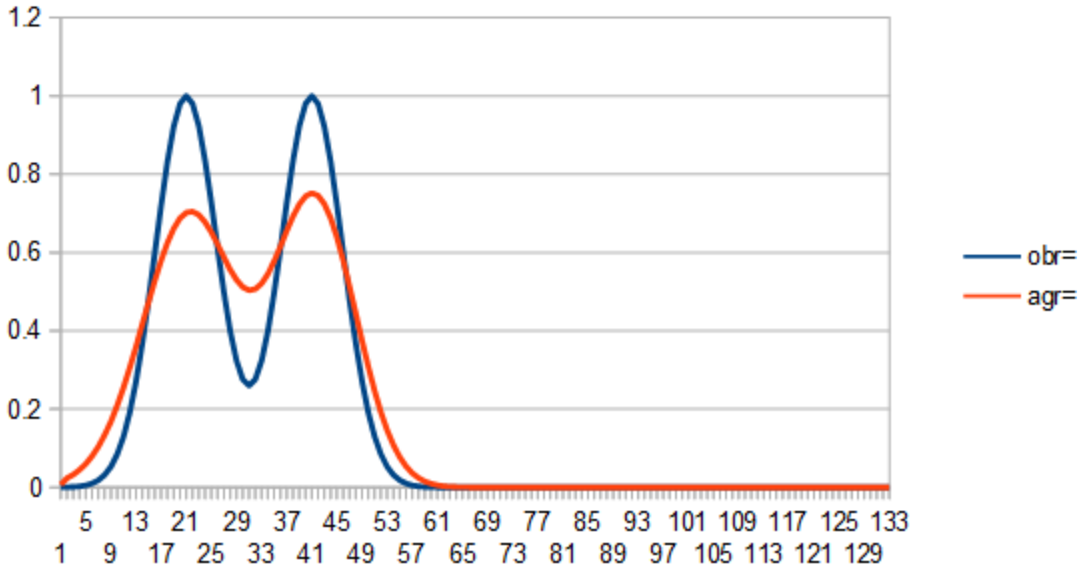
Метод градиентного спуска

$$\left(\varphi_i^1 \right)^{s+1} = \left(\varphi_i^1 \right)^s - \omega^{s+1} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\left(\partial \varphi_i^1 \right)^s};$$

Итерационные параметры подбираются экспериментально

Примеры расчетов

Градиент функционала. 100 измерений, по одному на каждый пространственный узел в разные моменты времени



Число пространственных узлов – 100, временных слоев - 300

Заключение

- Разработана программа решения прямой задачи для простейшего уравнения переноса по схеме первого порядка аппроксимации «уголок»
- Получена сопряженная система разностных уравнений
- Запрограммирован градиентный метод поиска минимума функционала невязки
- Частично исследована сходимость алгоритма вариационного усвоения данных в зависимости от полноты данных мониторинга

Спасибо за внимание!