

**Применение разрывного метода Галёркина
для решения уравнений Навье-Стокса**

Утиралов Д.И

Дипломная работа

Научный руководитель: Тишкин В.Ф.

Цель работы

- 1) Разработка методики определения компонент тензора вязких напряжений на границе области с условием прилипания для численного решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина.
- 2) Создание программного блока и последующая интеграция в программный комплекс для решения задач газовой динамики в двумерной постановке на сетках с ячейками треугольной формы.
- 3) Решение модельных задач.

Формулы уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого газа.

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса, записанные как система уравнений первого порядка

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = 0,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu S(\mathbf{v}), \quad S \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^*}{2}$$

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{F}^e(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^e(\mathbf{u})}{\partial y}, \quad \nabla \mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial \mathbf{F}^v(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})}{\partial y}$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{Bmatrix}, \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{Bmatrix}, \mathbf{G}^e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}^v(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \end{Bmatrix}, \mathbf{G}^v(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \text{ - тензор вязких напряжений, его компоненты вычисляются, как}$$

$$\tau_{xx} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (u_x + v_y) + 2\mu u_x$$

$$\tau_{yy} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (u_x + v_y) + 2\mu v_y$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu(u_y + v_x)$$

Где μ - коэффициент динамической вязкости, λ - объёмная вязкость, $\tau_{ij} (i, j = x, y)$ - компоненты тензора вязких напряжений. В данной работе не рассматривается влияние теплопроводности, $k = 0$.

Применение разрывного метода Галеркина на уравнениях Навье-Стокса

Покроем область Ω , на которой ищется решение треугольной сеткой $\Upsilon_h = \{K_i\}_{i \in I}$

На каждом элементе K приближенное решение системы уравнений будем искать в виде полиномов $P_k(\mathbf{x})$ степени k с зависящими от времени коэффициентами:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)_{h|K} = \sum_{i=0}^{n-1} U_i(t) \varphi_i^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in K_s$$

Разложение численного решения осуществляется по n функциям $P_k(\mathbf{x})$, являющихся базисом для полиномиальных функций $\varphi_i(\mathbf{x})$. В нашей работе берутся полиномы 1-ой степени с базисными функциями. Для ячейки с номером s они имеют вид

$$\varphi_0^s = 1$$

$$\varphi_1^s = \frac{x - x_c^s}{\Delta x}$$

$$\varphi_2^s = \frac{y - y_c^s}{\Delta y}$$

(x_c^s, y_c^s) - центр треугольника с номером s

$\Delta x, \Delta y$ - шаги сетки

Применение разрывного метода Галеркина на уравнениях Навье-Стокса(продолжение)

Возьмём к примеру уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

В каждом треугольнике K_s приближенные значения параметров ищутся в виде

$$\rho_{h|K_s} = \sum_{i=0}^2 \rho_i^s \varphi_i^s, \quad \rho u_{h|K_s} = \sum_{i=0}^2 \rho u_i^s \varphi_i^s, \quad \rho v_{h|K_s} = \sum_{i=0}^2 \rho v_i^s \varphi_i^s$$

Согласно разрывному методу Галеркина коэффициенты разложения неизвестных ищутся из условия ортогональности невязки уравнения всем базисным функциям φ_i^s на треугольнике с номером s . Интегрируя по частям и используя формулу Грина, приходим к системе из 3-х уравнений для каждой из базисных функций.

$$\int_{K_s} \varphi_i^s \left(\frac{\partial \rho_h^s}{\partial t} - \frac{\partial(\rho u)_h^s}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)_h^s}{\partial y} \right) dx dy = \int_{K_s} \varphi_i^s \cdot \frac{\partial \rho_h^s}{\partial t} dx dy - \oint_{K_s} [(\rho u)_h^s \cdot n_x + (\rho v)_h^s \cdot n_y] \varphi_i^s dS$$

$$- \int_{K_s} \left[(\rho u)_h^s \frac{\partial \varphi_i^s}{\partial x} + (\rho v)_h^s \frac{\partial \varphi_i^s}{\partial y} \right] dx dy = 0, \quad i = \overline{0, 2}$$

$(\rho u)_h, (\rho v)_h, \rho_h$

$$\sum_{j=0}^2 \frac{\partial \rho_j^s}{\partial t} \int_{K_s} \varphi_j \varphi_i dx dy = \oint_{K_s} \mathbf{h}_e^1(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) dS - \int_{K_s} \left[(\rho u)_h^s \frac{\partial \varphi_i^s}{\partial x} + (\rho v)_h^s \frac{\partial \varphi_i^s}{\partial y} \right] dx dy, \quad i = \overline{0, 2}$$

Функции $(\rho u)_h, (\rho v)_h, \rho_h$ являются разрывными на границе треугольника. Поэтому подынтегральная функция в правой части заменяется функцией численного потока, которая зависит от состояния в обеих граничных ячейкой и нормали к граничной стороне.

Граничные условия.

Особую роль для решения задач газодинамики имеет постановка граничных условий. Значение параметров задач на границе определяется типом граничного условия.

Основные типы граничных условий:

- 1) свободное втекание
- 2) свободное вытекание
- 3) условие симметрии
- 4) условие прилипания

В данной работе расчет граничных условий осуществляется путем введения фиктивных ячеек. Переменные в фиктивной ячейке определяются в зависимости от типа граничных условий.

Обозначим верхним индексом * параметры в приграничной ячейке.

- 1) Для условия симметрии параметры имеют вид

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho & E^* &= E \\ p^* &= p & u^* &= u \\ & & v^* &= -v\end{aligned}$$

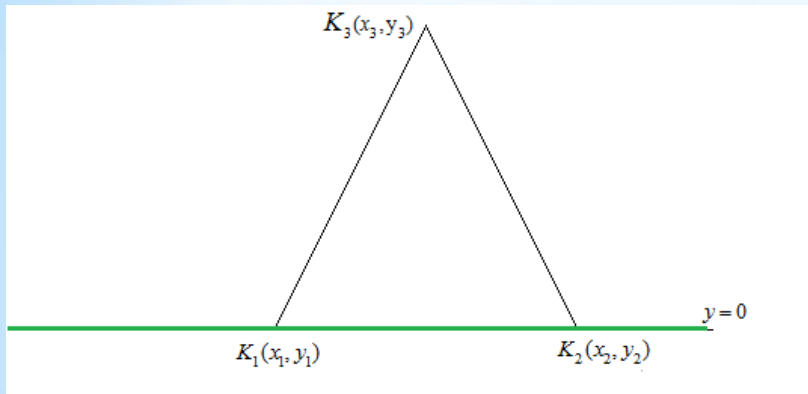
- 2) Для свободного втекания и свободного вытекания параметры задаются в виде

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho & E^* &= E \\ p^* &= p & u^* &= u \\ & & v^* &= v\end{aligned}$$

- 3) Для условия прилипания значения в фиктивных ячейках ставятся такие же, как и для условия симметрии. Но необходимым условием является $u=0, v=0$ на границе области. Далее мы предлагаем способ для задания компонентов тензоров вязкости в фиктивных ячейках с этим условием.

Задание компонент тензора вязких напряжений в фиктивной ячейки на границе с условием прилипания.

Допустим, что одна из граничных сторон с условием прилипания лежит на прямой $y = 0$. В противном случае можно воспользоваться преобразованием координат.



Для условия прилипания верно $u = 0, v = 0 \Rightarrow \rho u = 0, \rho v = 0$

Для точек K_1 и K_2 вершин треугольника выполнено

$$\rho u|_{K_1} = 0 \quad \text{и} \quad \rho u|_{K_2} = 0$$

Подставив координаты точек, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = \rho u_0 + \rho u_1 \frac{(x_1 - x_c)}{\Delta x} + \rho u_2 \left(-\frac{y_c}{\Delta y}\right) \\ 0 = \rho u_0 + \rho u_1 \frac{(x_2 - x_c)}{\Delta x} + \rho u_2 \left(-\frac{y_c}{\Delta y}\right) \end{cases}$$

Вычитая из 1-го уравнения 2-ое получаем

$$\rho u_1 \left(\frac{x_1 - x_2}{\Delta x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho u_1 = 0$$

Обозначим $k = \frac{-y_c}{\Delta y}$

Таким образом, можно прийти к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} = 0 \\ k \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Совершенно аналогично, проводя рассуждения относительно другой компоненты скорости, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t} = 0 \\ k \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Задание компонент тензора вязких напряжений в фиктивной ячейки на границе с условием прилипания (продолжение).

Рассмотрим следующие системы уравнений

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial(\rho u)_i}{\partial t} \int_{K_s} \varphi_i \varphi_j dx dy + \oint_{\partial K_s} \mathbf{h}_e^2(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) \varphi_j dS - \oint_{\partial K_s} \mathbf{h}_v^2(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \boldsymbol{\tau}^+, \boldsymbol{\tau}^-, \mathbf{n}) \varphi_j dS -$$

$$- \int_{K_s} \left[\rho_h u_h^2 + p_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \rho_h u_h v_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy + \int_{K_s} \left[\tau_{h,xx} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \tau_{h,xy} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial(\rho v)_i}{\partial t} \int_{K_s} \varphi_i \varphi_j dx dy + \oint_{\partial K_s} \mathbf{h}_e^3(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) \varphi_j dS - \oint_{\partial K_s} \mathbf{h}_v^2(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \boldsymbol{\tau}^+, \boldsymbol{\tau}^-, \mathbf{n}) \varphi_j dS -$$

$$- \int_{K_s} \left[\rho_h u_h v_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \rho_h v_h^2 + p_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy + \int_{K_s} \left[\tau_{h,xy} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \tau_{h,yy} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

Распишем потоковые функции для подынтегральной функций, содержащих компоненты тензора вязких напряжений. Индексом «+» обозначим параметры во внутренней ячейке, а «-» во внешней.

$$\mathbf{h}_v^2 = \frac{\tau_{xx}^+ + \tau_{xx}^-}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-}{2} \cdot n_y \quad \mathbf{h}_v^3 = \frac{\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{yy}^+ + \tau_{yy}^-}{2} \cdot n_y$$

$$\oint_{\partial K_s} [\tau_{h,xx}^\Gamma \cdot n_x + \tau_{h,xy}^\Gamma \cdot n_y] \varphi_j dS = \oint_{K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_3} [\tau_{h,xx}^\Gamma \cdot n_x + \tau_{h,xy}^\Gamma \cdot n_y] \varphi_j dS + \int_{K_1}^{K_2} \left[\frac{\tau_{h,xx}^+}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{h,xy}^+}{2} \cdot n_y \right] \varphi_j dS + \int_{K_1}^{K_2} \left[\frac{\tau_{h,xx}^-}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{h,xy}^-}{2} \cdot n_y \right] \varphi_j dS$$

$$\oint_{\partial K_s} [\tau_{h,xy}^\Gamma \cdot n_x + \tau_{h,yy}^\Gamma \cdot n_y] \varphi_j dS = \oint_{K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_3} [\tau_{h,xy}^\Gamma \cdot n_x + \tau_{h,yy}^\Gamma \cdot n_y] \varphi_j dS + \int_{K_1}^{K_2} \left[\frac{\tau_{h,xy}^+}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{h,yy}^+}{2} \cdot n_y \right] \varphi_j dS + \int_{K_1}^{K_2} \left[\frac{\tau_{h,xy}^-}{2} \cdot n_x + \frac{\tau_{h,yy}^-}{2} \cdot n_y \right] \varphi_j dS$$

Задание компонент тензора вязких напряжений в фиктивной ячейки на границе с условием прилипания (продолжение 2).

Используя то, что нормаль к граничной стороне равна $\vec{n} = (0, -1)$, приходим к системе

$$\frac{\partial(\rho u)_0}{\partial t} S_{\Delta} = A_0 - 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} d\Gamma$$

$$\frac{\partial(\rho u)_1}{\partial t} \int_{K_s} \frac{(x-x_c)^2}{\Delta x^2} dxdy + \frac{\partial(\rho u)_2}{\partial t} \int_{K_s} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} dxdy = A_1 - 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} \frac{(x-x_c)}{\Delta x} d\Gamma$$

$$\frac{\partial(\rho u)_1}{\partial t} \int_{K_s} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} dxdy + \frac{\partial(\rho u)_2}{\partial t} \int_{K_s} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} dxdy = A_2 - 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} \frac{(y-y_c)}{\Delta y} d\Gamma$$

Здесь в обозначениях имеются в виду именно компоненты тензора фиктивного треугольника.

\int_{Γ_3} - интеграл к стороне, лежащей на границе области

Обозначим $I_1 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} d\Gamma$, $I_2 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} x d\Gamma$, $I_3 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} y d\Gamma = 0$

$$\begin{cases} \frac{A_0 - I_1}{k \cdot S_{\Delta}} \int_{K_s} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} dxdy = A_1 - \frac{1}{\Delta x} I_2 + \frac{x_c}{\Delta x} I_1 \\ \frac{A_0 - I_1}{k \cdot S_{\Delta}} \int_{K_s} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} dxdy = A_2 + \frac{y_c}{\Delta y} I_1 \end{cases}$$

Аналогично из уравнения для ρv приходим к системе относительно I_4, I_5 , где

$$I_4 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} d\Gamma, \quad I_5 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} x d\Gamma, \quad I_6 = 0.5 \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} y d\Gamma = 0$$

$$\begin{cases} \frac{C_0 - I_4}{k \cdot S_{\Delta}} \int_{K_s} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} dxdy = C_1 - \frac{1}{\Delta x} I_5 + \frac{x_c}{\Delta x} I_4 \\ \frac{C_0 - I_4}{k \cdot S_{\Delta}} \int_{K_s} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} dxdy = C_2 + \frac{y_c}{\Delta y} I_4 \end{cases}$$

Разложение компонент тензора вязких напряжений по базису в фиктивной ячейке.

Зная, значения интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , можно найти значения коэффициентов разложения компонент тензора τ_{xy}, τ_{yy} внутри фиктивного треугольника

по базисным функциям

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \frac{(x - x_c)}{\Delta x}, \quad \varphi_2 = \frac{(y + y_c)}{\Delta y}$$

Имеем представление
$$\tau_{xy} = \sum_{i=0}^2 \tau_{xy_i} \varphi_i,$$

$$\tau_{yy} = \sum_{i=0}^2 \tau_{yy_i} \varphi_i$$

Приходим к системе

$$2I_1 = \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} d\Gamma = \tau_{xy_0} \int_{\Gamma_3} 1 d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1} \int_{\Gamma_3} (x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2} \int_{\Gamma_3} (y + y_c) d\Gamma$$

$$2I_2 = \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} x d\Gamma = \tau_{xy_0} \int_{\Gamma_3} x d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1} \int_{\Gamma_3} x(x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2} \int_{\Gamma_3} x(y + y_c) d\Gamma$$

$$2I_3 = \int_{\Gamma_3} \tau_{xy} y d\Gamma = \tau_{xy_0} \int_{\Gamma_3} y d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1} \int_{\Gamma_3} y(x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2} \int_{\Gamma_3} y(y + y_c) d\Gamma = 0$$

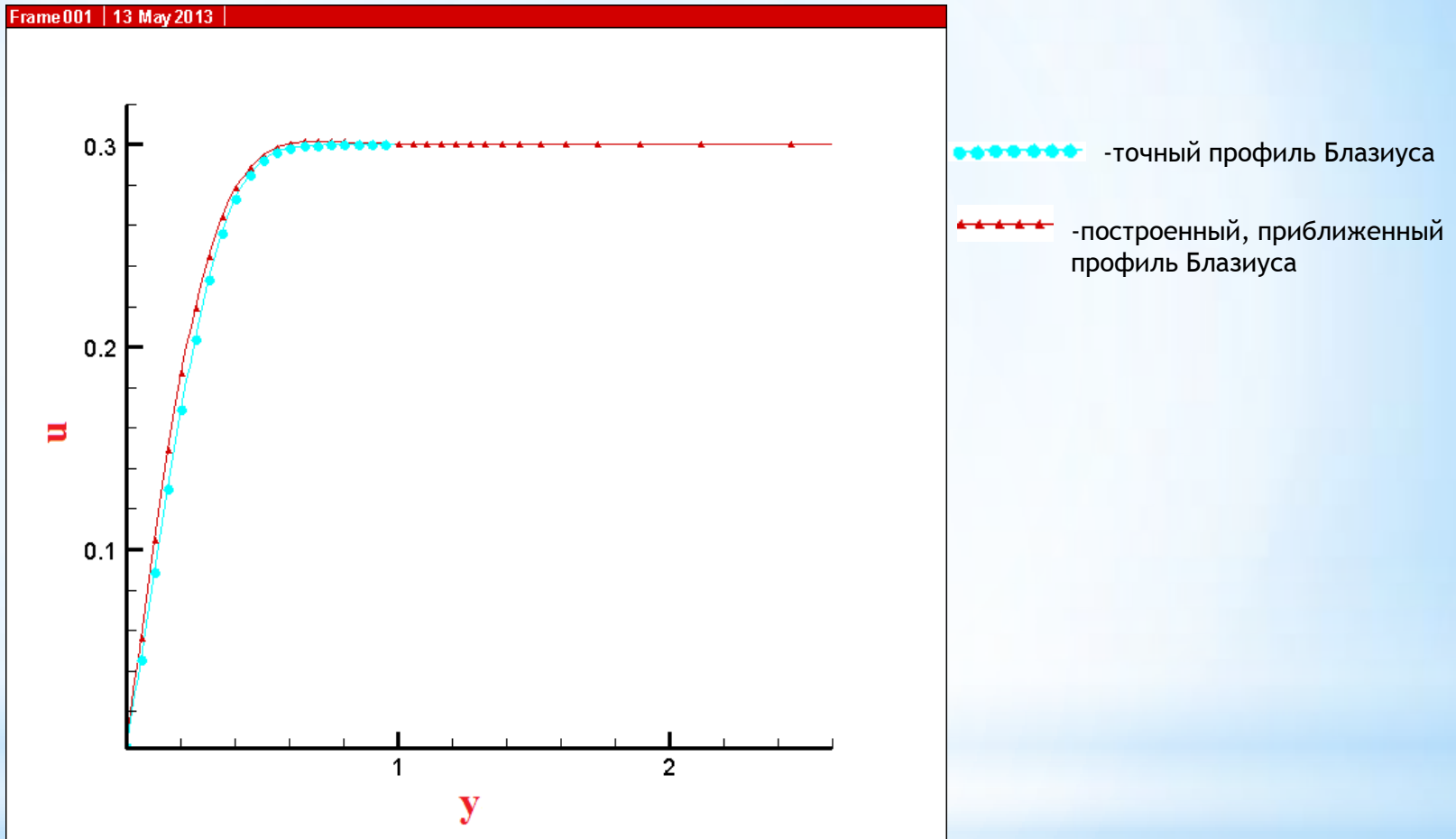
$$2I_4 = \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} d\Gamma = \tau_{yy_0} \int_{\Gamma_3} 1 d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1} \int_{\Gamma_3} (x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2} \int_{\Gamma_3} (y + y_c) d\Gamma$$

$$2I_5 = \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} x d\Gamma = \tau_{yy_0} \int_{\Gamma_3} x d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1} \int_{\Gamma_3} x(x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2} \int_{\Gamma_3} x(y + y_c) d\Gamma$$

$$2I_6 = \int_{\Gamma_3} \tau_{yy} y d\Gamma = \tau_{yy_0} \int_{\Gamma_3} y d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1} \int_{\Gamma_3} y(x - x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2} \int_{\Gamma_3} y(y + y_c) d\Gamma = 0$$

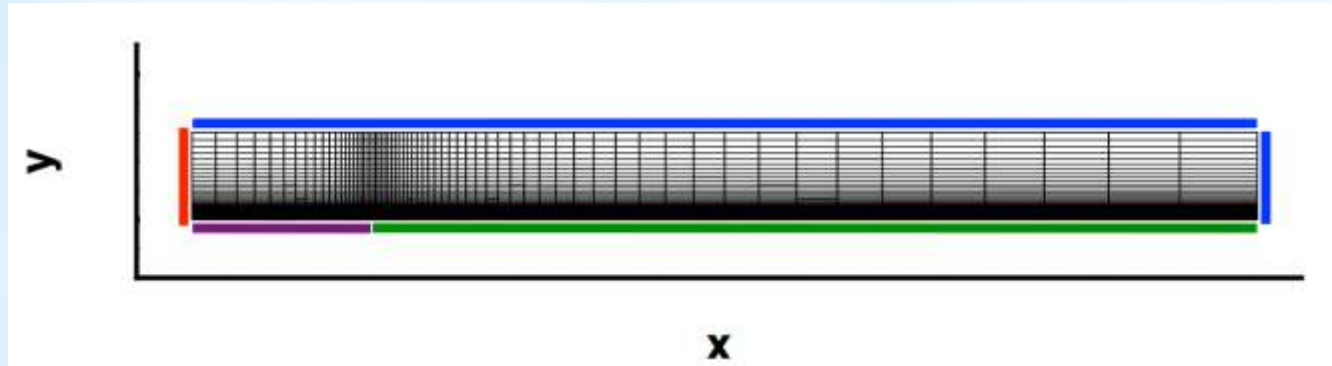
3-е и 6-е уравнение независимо от решения обращаются в 0 на прямой $y = 0$. Поэтому значение коэффициентов СЛАУ для этих уравнений задаем произвольно.

Результаты



На рис. изображены два графика точного профиля Блазиуса и приближенного профиля Блазиуса при $x = 40$.

Постановка задачи(расчет течения сжимаемого газа вдоль поверхности плоской пластины).



Расчетная область задачи имеет форму прямоугольника

$$x \in [0.0, 50.0]$$

$$y \in [0.0, 14.5]$$

Граничные условия: **свободное втекание**, **свободное вытекание**, **условие симметрии**, **условие прилипания**

Начальные условия. Внутри области в начальный момент времени у нас заданы условия

$$\rho(0, x, y) = 1$$

$$u(0, x, y) = 0.3$$

$$v(0, x, y) = 0$$

$$p(0, x, y) = 0.5$$

$$\gamma = 1.4$$

$$\mu = 0.01$$

Выводы

Промоделировано обтекание плоской пластины вязким слабо сжимаемым газом. Проведено сравнение результатов расчета с профилем Блазиуса и получено хорошее совпадение.

Новый способ определения компонент тензора вязких напряжений соответствует условию прилипания на границе области.

Спасибо за внимание ;)