МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Презентация Диплома

«Численное решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа»

Студент: Терентьев Антон, гр. 504

Научный руководитель : Фаворский А.П.

Задача

Одной из основных задач теории численных методов является поиск алгоритмов и оптимизация параметров для решения определенных уравнений с заданной точностью при минимизации времени вычислений. Создание быстрого и эффективного метода применимо по отношению к конкретному уравнению и в каждом случае требует его изучения.

Моей задачей является изучение и сравнение численных решений задачи Дирихле для двумерного стационарного уравнения Лапласа в квадратной области, а именно, сравнение методов переменных направлений и метода Дугласа-Писсмана-Рэкфорда.

Рассматриваемое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1;$$

Продольно-поперечная Разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{U}_{i,j} - U_{i,j}}{\tau} = \dfrac{\overline{U}_{i+1,j} - 2\overline{U}_{i,j} + \overline{U}_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + f_{i,j} \\ \dfrac{\widehat{U}_{i,j} - \overline{U}_{i,j}}{\tau} = \dfrac{\overline{U}_{i+1,j} - 2\overline{U}_{i,j} + \overline{U}_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{\widehat{U}_{i,j+1} - 2\widehat{U}_{i,j} + \widehat{U}_{i,j-1}}{h^2} + f_{i,j} \end{cases}$$

$$U_{i,0} = \overline{U}_{i,0} = \widehat{U}_{i,0} = 0$$
$$U_{i,N} = \overline{U}_{i,N} = \widehat{U}_{i,N} = 0$$
$$U_{0,j} = \overline{U}_{0,j} = \widehat{U}_{0,j} = 0$$
$$U_{N,j} = \overline{U}_{N,j} = \widehat{U}_{N,j} = 0$$

$U^0(x,y) = U(x,y) = A(1-x)x(1-y)y$, $A=16$

Метод прогонки для вычисления $\overline{U}_{i,j}$ (аналогично $\widehat{U}_{i,j}$)

$$\frac{\tau}{h^2}\left(\overline{U}_{i+1,j} - 2\overline{U}_{i,j} + \overline{U}_{i-1,j}\right) - \overline{U}_{i,j} = -U_{i,j} - \frac{\tau}{h^2}\left(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}\right) - \tau f_{i,j}$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \rho \qquad \rho\overline{U}_{i-1,j} - (2\rho+1)\overline{U}_{i,j} + \rho\overline{U}_{i+1,j} = -\left[U_{i,j} + \tau f_{i,j} + \rho\left(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}\right)\right]$$

$$-\left[U_{i,j} + \tau f_{i,j} + \rho\left(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}\right)\right] = Fx_{i,j}$$
$$\rho = A_{xi}$$
$$\rho = B_{xi}$$
$$(2\rho+1) = C_{xi}$$

$$\begin{cases} A_{xi}\overline{U}_{i-1,j} - C_{xi}\overline{U}_{i,j} + B_{xi}\overline{U}_{i+1,j} + Fx_{i,j} \\ \overline{U}_{i,0} = \overline{U}_{i,N} = \overline{U}_{0,j} = \overline{U}_{N,j} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{i+1} = B_i/(C_i - A_i\alpha_i)$$
$$\beta_{i+1} = (A_iB_i + F_i)/(C_i - A_i\alpha_i)$$
$$\alpha_1 = B_0/C_0$$
$$\beta_1 = F_0/C_0$$

$$\overline{U}_{N,j} = 0$$
$$\overline{U}_{i,j} = \alpha_{i+1}\overline{U}_{i+1,j} + \beta_{i+1} \qquad i = N-1, \dots, 0$$

$$\varphi_{i,j} = \frac{\widehat{U}_{i,j+1} - 2\widehat{U}_{i,j} + \widehat{U}_{i,j-1}}{h^2} + \frac{\widehat{U}_{i+1,j} - 2\widehat{U}_{i,j} + \widehat{U}\,-_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j}$$

Разложение функции в ряды Фурье

$$\overline{U}_{k,j} = U_{k,j} = U_* e^{i\pi kh + i\pi jh + i\pi nt}$$

$$\overline{U}_{k,j} = U_{k,j} = U_* \overline{q} e^{i\pi kh + i\pi jh} \qquad e^{int} = \overline{q} \qquad |\overline{q}| < 1$$

$$\overline{q} - 1 = \frac{\tau}{h_x^2} \overline{q} \left(e^{i\pi k h_x} - 2 + \overline{e}^{i\pi k h_x} \right) + \frac{\tau}{h_y^2} \left(e^{i\pi j h_y} - 2 + \overline{e}^{i\pi j h_y} \right)$$

$$\sin^2 \left(\pi \frac{h_x k}{2} \right) = a \qquad \sin^2 \left(\pi \frac{h_y j}{2} \right) = b \quad 0 \le a \le 1 \quad 0 \le b \le 1$$

$$h_x = h_y = h \qquad \rho = \frac{\tau}{h^2}$$

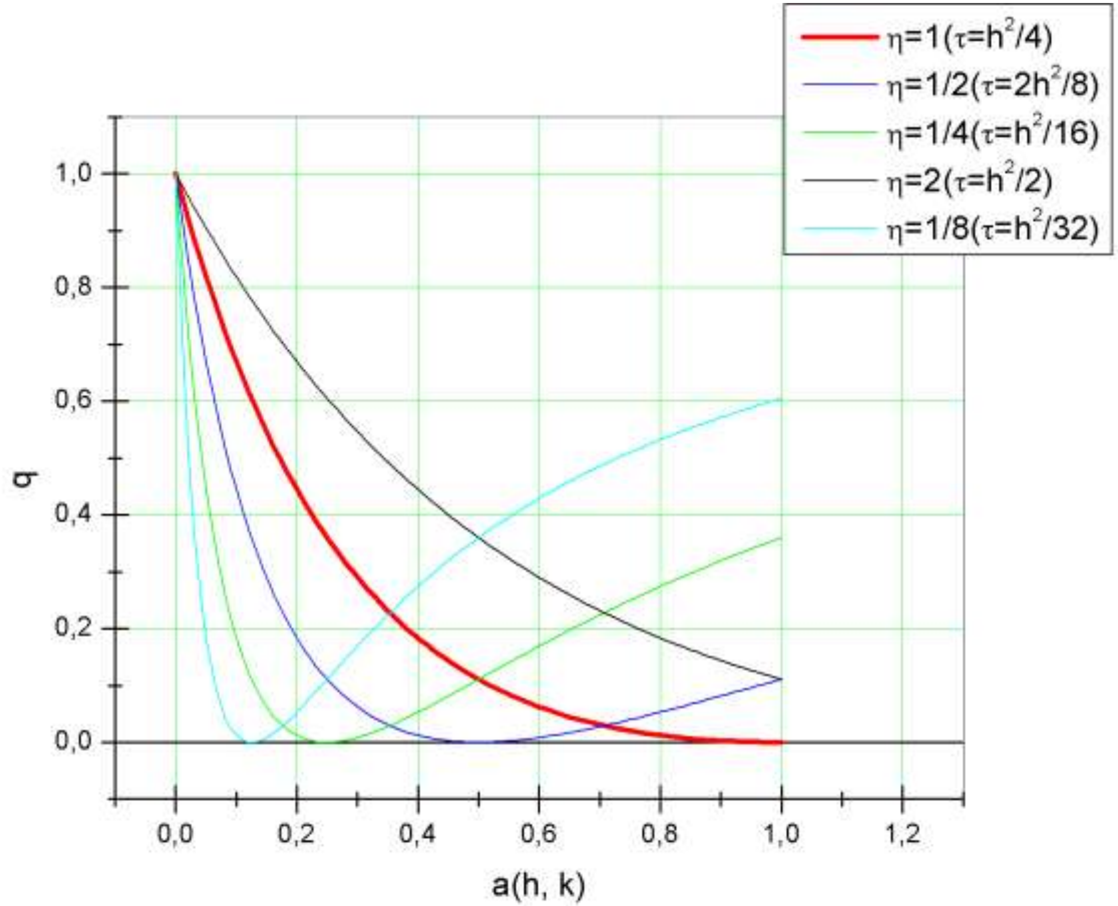
$$\overline{q} = \frac{1 - 4\rho b}{1 + 4\rho a}$$

Аналогично: $$\hat{q} = \frac{1 - 4\rho a}{1 + 4\rho b}$$

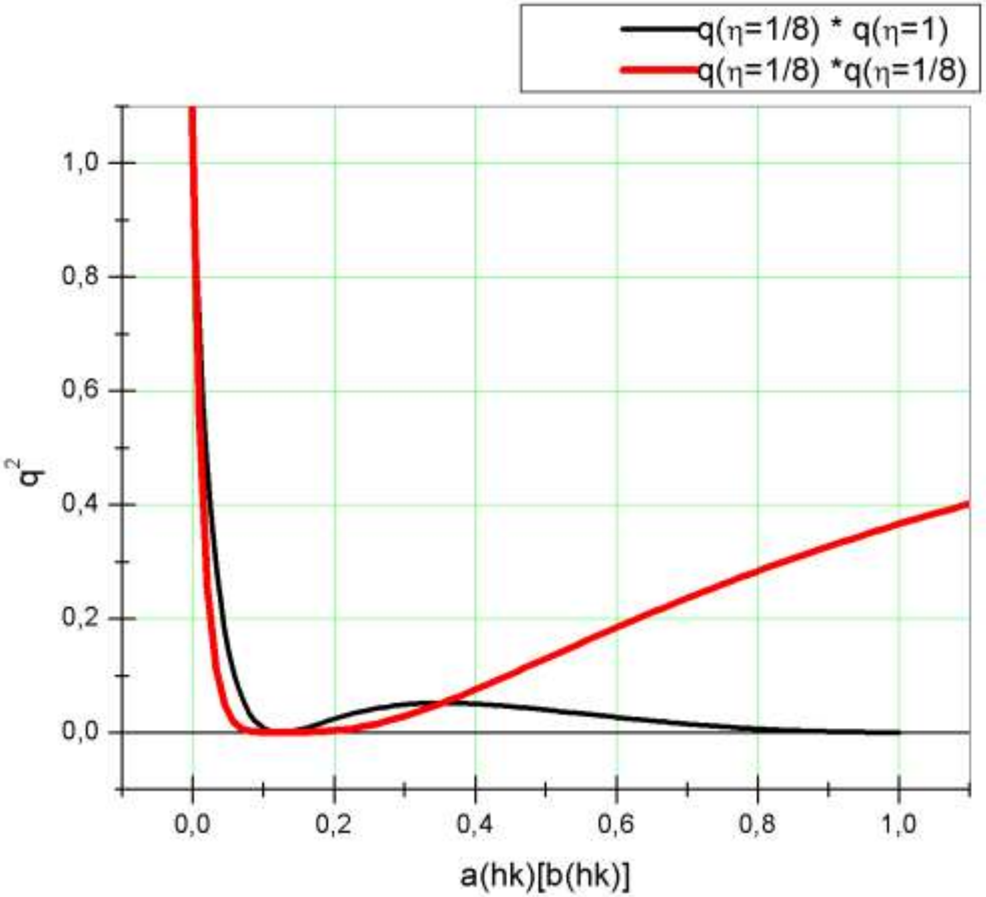
$$\widetilde{U}_{k,j} = \tilde{q} U_{k,j}$$

$$\tilde{q} = \overline{q}\hat{q} = \frac{(1 - 4\rho b)}{(1 + 4\rho a)} \frac{(1 - 4\rho a)}{(1 + 4\rho b)}$$

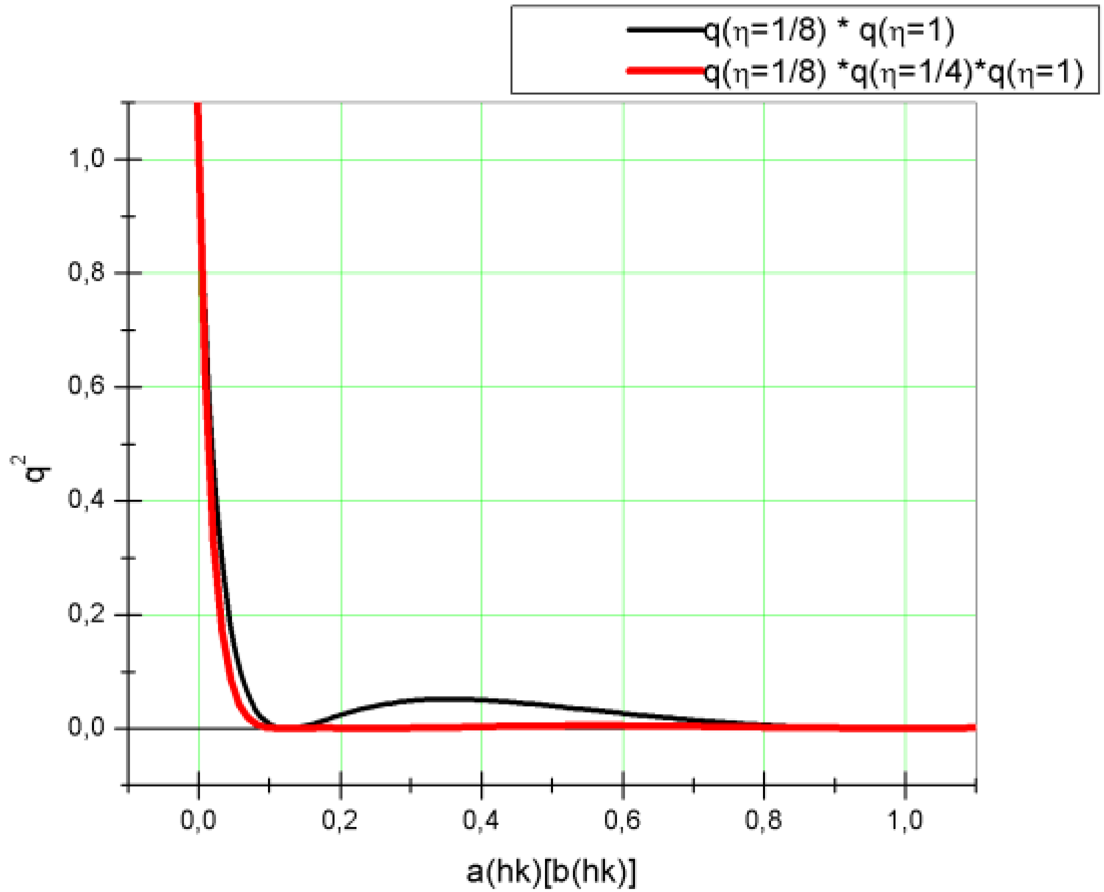
Зависимость q от a для разных $\tau(\eta)$.$\eta=1/\rho$



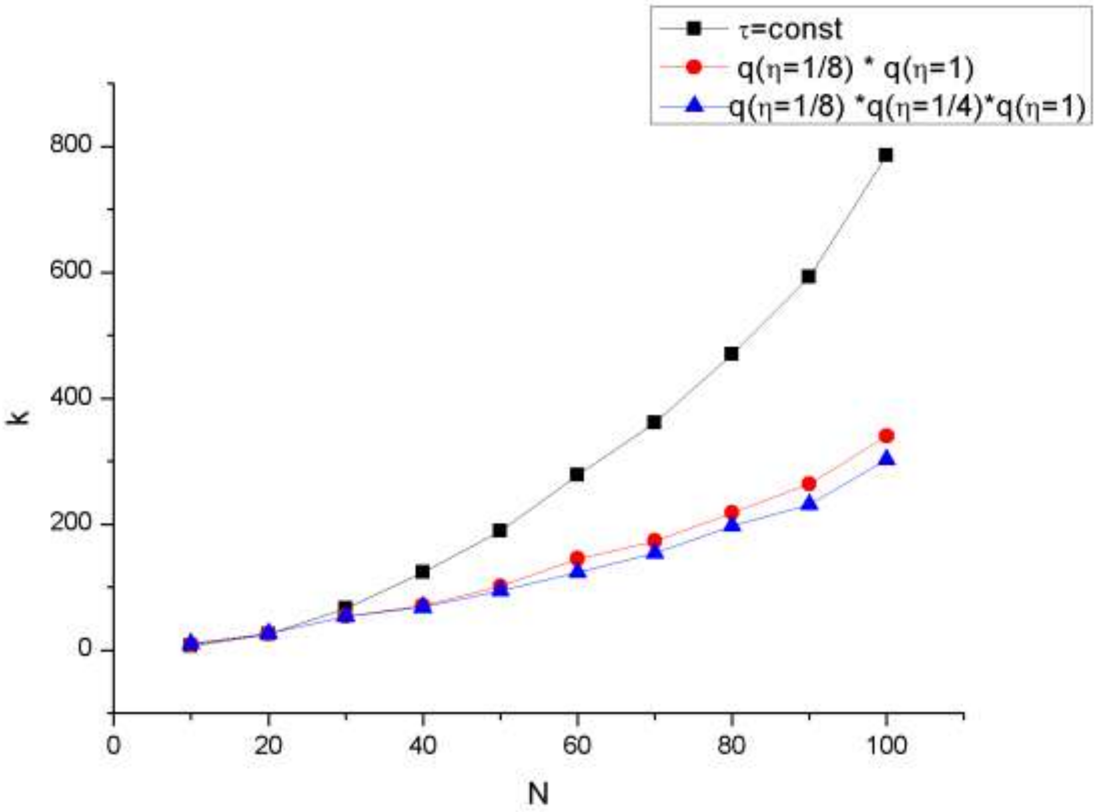
Зависимость q^2 от a для разных $\tau(\eta)$.η=1/ ρ



Зависимость q от a для разных $\tau(\eta)$.η=1/ ρ



Результаты


τ=const
q(η=1/8) * q(η=1)
q(η=1/8) *q(η=1/4)*q(η=1)
800
600
400
200
0
k
0
20
40
60
80
100
N

Выводы

Для малого размера сети N (N<20) количество итераций практически не зависит от выбора метода численного решения. При возрастании размера сетки метод Дугласа-Писсмана-Рэкфорда значительно превосходит по эффективности метод переменных направлений. При последовательном использовании 2-х параметров $\tau(\eta)$ количество итераций уменьшается по сравнению с реализацией простой продольно-поперечной схемы с постоянным итерационным параметром, но вот разницы между использованием 2-х и 3-х последовательных итерационных параметров практически нет.

Алгоритм Дугласа-Писмана-Рэкфорда, как показано в данной работе, является довольно эффективным способом улучшения продольно-поперечной схемы для большого размера сетки. Подобная методика подбора итерационных параметров может быть рассмотрена и для более сложных классов уравнений, например, для уравнений с переменными коэффициентами.

Спасибо за внимание!