



МГУ имени М.В. Ломоносова  
факультет Вычислительной Математики и Кибернетики  
кафедра Вычислительных методов

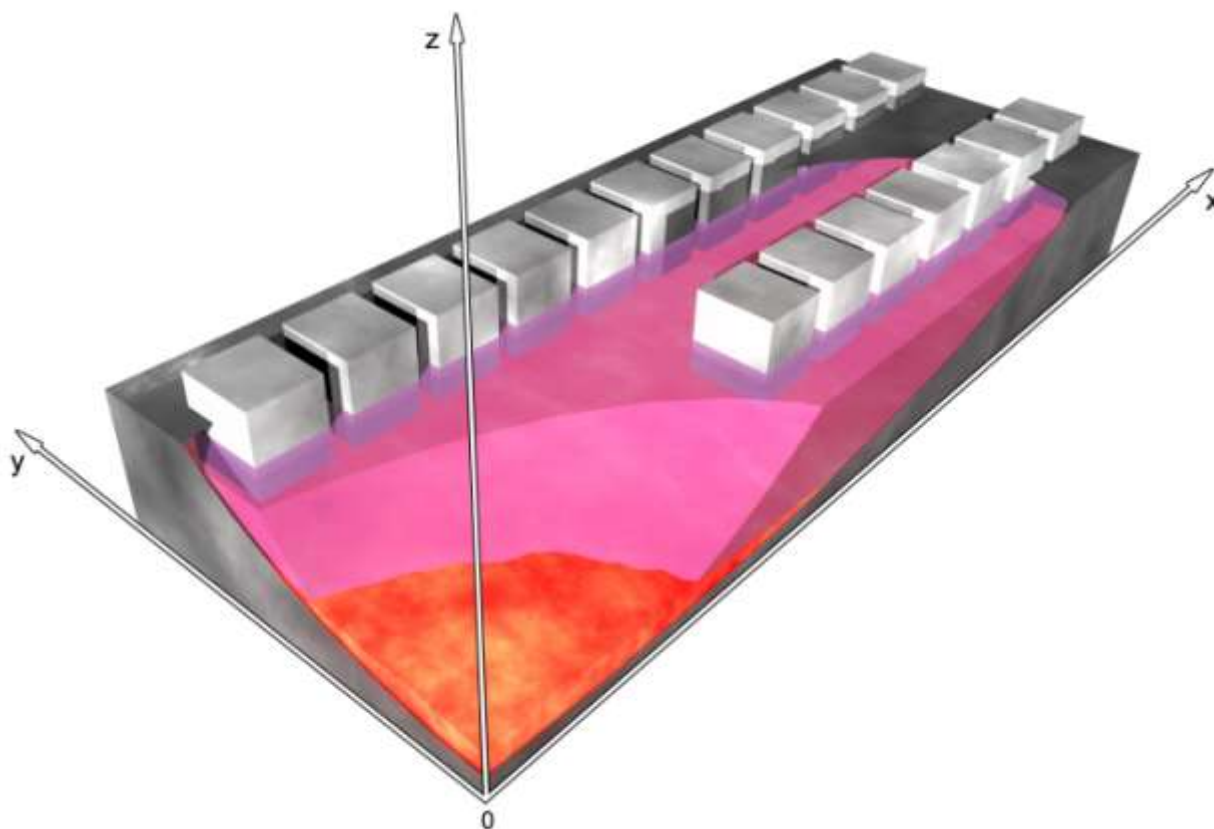
# Численное моделирование вихревых структур, возникающих в процессе электролиза алюминия.

Калмыков Алексей Вадимович

Научный руководитель:

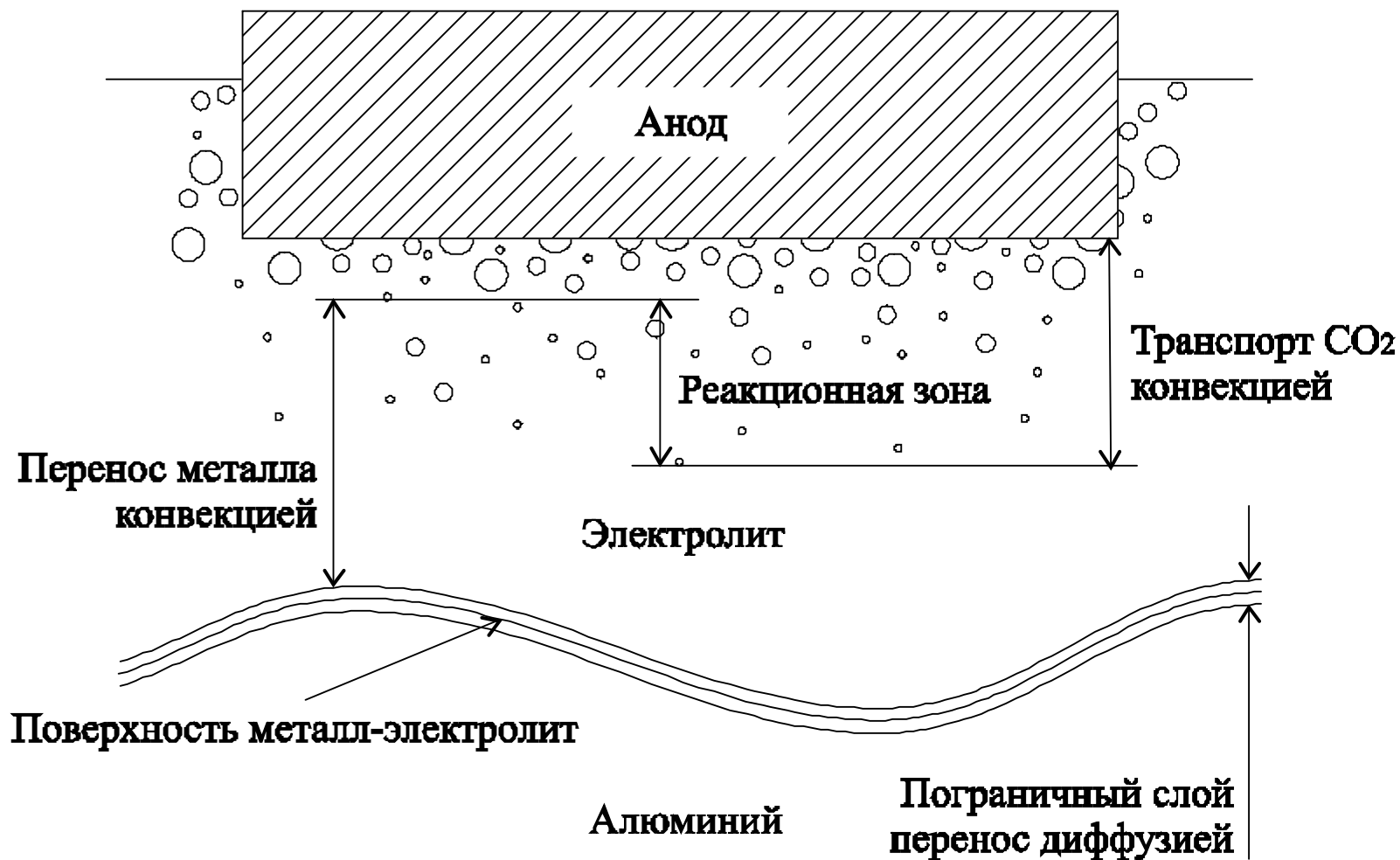
д.ф-м.н. Савенкова Надежда Петровна

# Параметры процесса электролиза



Геометрические размеры рассматриваемого электролизёра составляют 8.9 м в длину, 3.7 м в ширину и 0.65 м в высоту. Рабочая температура колеблется в пределах 940-980°C, при таких температурах начинается процесс электролиза и плотность алюминия превосходит плотность криолита.

# Схематичное изображение процесса



# Математическая постановка

В каждой точке объёма ванны занятого смесью вводятся макроскопические скорости компонент смеси, давление и объёмные доли компонент смеси -  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_m \rho_m \vec{v}_m) = M_m \quad \text{-уравнение неразрывности } m\text{-ой фазы}$$

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m \vec{v}_m}{\partial t} + (\vec{v}_m, \vec{\nabla})(\alpha_m \rho_m \vec{v}_m) = \alpha_m \vec{\nabla} p - \alpha_m \rho_m \vec{g} + \mu_m \alpha_m \Delta \vec{v}_m + \vec{P}_m + \alpha_m \vec{F}$$

-уравнение изменения импульса  $m$ -ой фазы.

где  $p$  - давление,  $\mu_m$  - динамическая вязкость среды,

$\vec{P}_m$  - объёмная плотность силы трения (Стоксовой силы) между компонентами смеси за счёт вязких сил,

$\vec{F}$  - объёмная плотность силы, обусловленной электромагнитным полем (силы Лоренца)

Граничные условия для скорости:  $\vec{v}_m \Big|_{\Gamma} = 0$ .

Начальные поля будут приведены ниже.

# Моделирование давления

1. Гидростатическая модель.[2]

$$p(x, y, z) = p_{атм} + g \int_z^H (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) dz$$

2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.[1]

$$\Delta p = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \sum_{m=1,2} \left( (\vec{v}_m, \vec{\nabla}) (\alpha_m \vec{v}_m) - \alpha_m \mu_m \Delta \vec{v}_m \right) + \vec{g} - \vec{F} \right)$$

$$p|_{\Gamma} = p_{атм} + g \int_{z_0(x,y)}^{L_z} (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) dz$$

3. Задача Неймана для уравнения Пуассона.[3]

$$\Delta p = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \sum_{m=1,2} \left( (\vec{v}_m, \vec{\nabla}) (\alpha_m \vec{v}_m) - \alpha_m \mu_m \Delta \vec{v}_m \right) + \vec{g} - \vec{F} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left( \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \sum_{m=1,2} \left( (\vec{v}_m, \vec{\nabla}) (\alpha_m \vec{v}_m) - \alpha_m \mu_m \Delta \vec{v}_m \right) + \vec{g} - \vec{F} \right)_n.$$

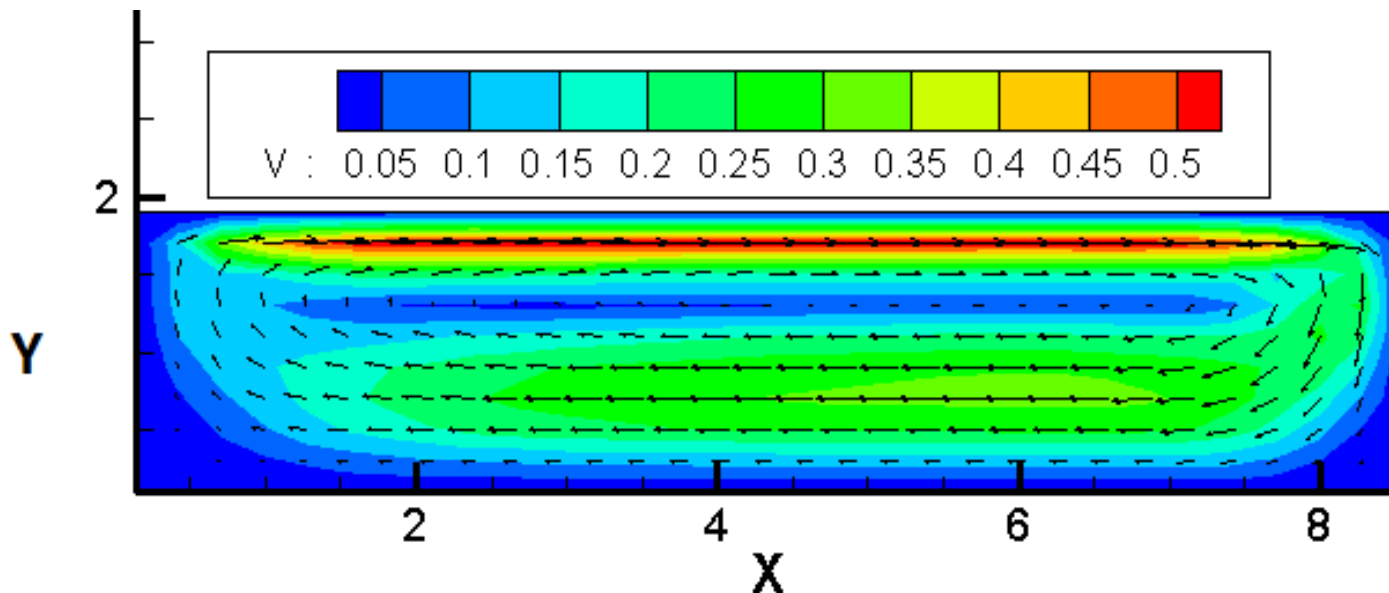
# Численный эксперимент

Поставим модельную задачу: двухмерная однофазная модель с подвижной верхней границей области, т.е. на верхней границе задано постоянное значение горизонтальной составляющей скорости. Уравнение для импульса примет вид:

$$\frac{\partial \alpha \rho \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})(\alpha \rho \vec{v}) = \alpha \vec{\nabla} p + \alpha \rho \vec{g} + \alpha \mu \Delta \vec{v},$$

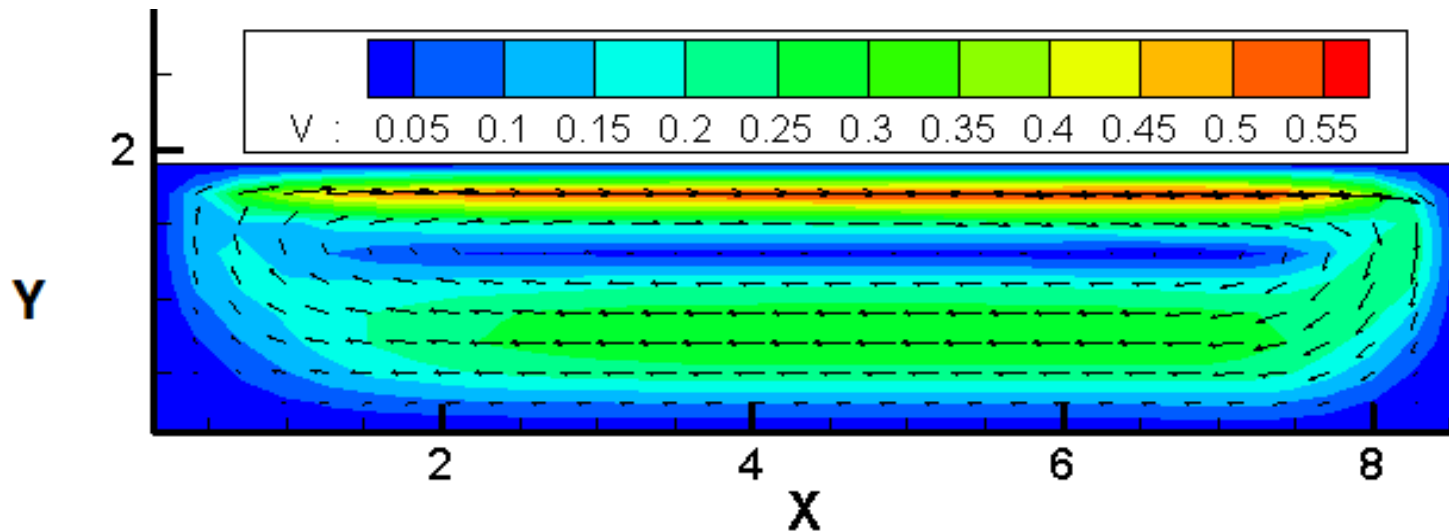
Ниже приведены результаты расчётов для разных моделей давления в момент времени  $t = 2$  секунды. Цель: получить вихрь в расчётной области. Одним из критериев метода является близость дивергенции скорости к 0.

1. Гидростатическая модель.  $\text{div}(\vec{V}) = 0,014720$

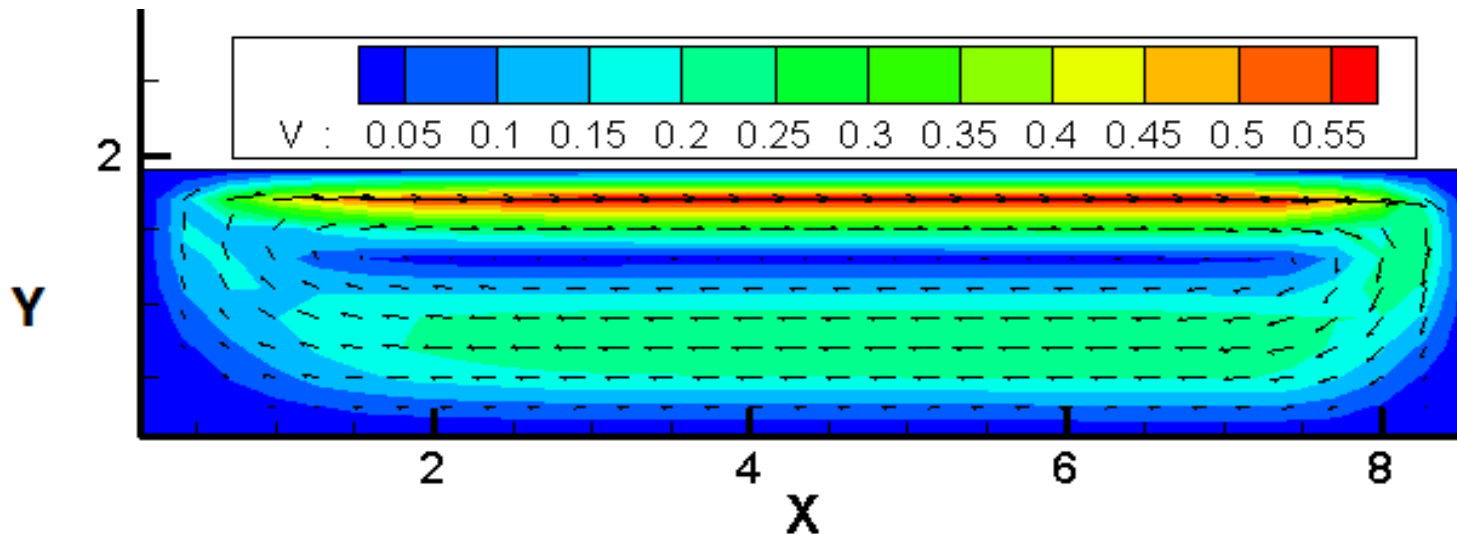


# Численный эксперимент

2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.  $\text{div}(V) = 0,002748$



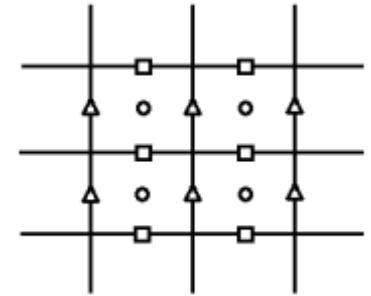
3. Задача Неймана для уравнения Пуассона.  $\text{div}(V) = 0,000012$



# Численный метод решения задачи

Разнесённая сетка(2-х мерный случай)

Кругам на сетке приписан центр масс элементарного объёма, в этих узлах определены давления магнитные силы и объёмные фазы алюминия и электролита. Треугольникам приписаны X-овые составляющие скоростей фаз алюминия и электролита, квадратам – Y-овые составляющие скоростей фаз. [4]



Сетка в трёхмерном случае аналогична:  $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_{v_x} \cup \Omega_{v_y} \cup \Omega_{v_z},$

$$\Omega_c = \left\{ (x_i, y_j, z_k) \mid x_i = i \cdot \Delta x, y_j = j \cdot \Delta y, z_k = k \cdot \Delta z, \right. \\ \left. i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z} \right\}$$

$$\Omega_{v_x} = \left\{ (x_i, y_j, z_k) \mid x_i = i \cdot \Delta x, y_j = j \cdot \Delta y, z_k = k \cdot \Delta z, \right. \\ \left. i = \overline{1, N_x + 1}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z} \right\}$$

Сетки для других компонент определены аналогично.

По временной координате введём неравномерную сетку:





# Численный метод решения задачи

Разностная схема для уравнения неразрывности:

$$\alpha_{ijk}^{n+1} = \alpha_{ijk}^n - \Delta t \left( \frac{\overline{\alpha_{i+1,jk}^n u_{i+1,jk}^n} - \overline{\alpha_{ijk}^n u_{ijk}^n}}{\Delta x} + \frac{\overline{\alpha_{ij+1,k}^n v_{ij+1,k}^n} - \overline{\alpha_{ijk}^n v_{ijk}^n}}{\Delta y} + \frac{\overline{\alpha_{ijk+1}^n w_{ijk+1}^n} - \overline{\alpha_{ijk}^n w_{ijk}^n}}{\Delta z} - \frac{M_m}{\rho_m} \right),$$

Разностная схема уравнения импульса для X-овой составляющей:

$$u_{ijk}^{n+1} = \frac{1}{\alpha_{ijk}^{n+1}} \left( \alpha_{ijk}^n u_{ijk}^n + \Delta t \left( - \frac{\overline{\alpha_{ijk}^n (u_{ijk}^n)^2}}{\Delta x} - \frac{\overline{\alpha_{ij+1,k}^n u_{ij+1,k}^n v_{ij+1,k}^n} - \overline{\alpha_{ijk}^n u_{ijk}^n v_{ijk}^n}}{\Delta y} - \frac{\overline{\alpha_{ijk+1}^n u_{ijk+1}^n w_{ijk+1}^n} - \overline{\alpha_{ijk}^n u_{ijk}^n w_{ijk}^n}}{\Delta z} - \frac{\overline{\alpha_{ijk}^n p_{i+1,jk}^n} - \overline{p_{ijk}^n}}{\rho_m \Delta x} + \frac{\overline{\alpha_{ijk}^n}}{\rho_m} F_x + \overline{\alpha_{ijk}^n} \frac{\mu_m}{\rho_m} \left( u_{xx}^n + v_{yy}^n + w_{zz}^n \right) + \frac{P_x^n}{\rho_m} \right) \right)$$

черта означает, что величина линейно усредняется и определяется в узле, необходимым для разностной производной, величина в квадратных скобках аппроксимируется с учётом значения скорости, т. е. против потока.

# Моделирование давления

Разносный аналог уравнения Лапласа:

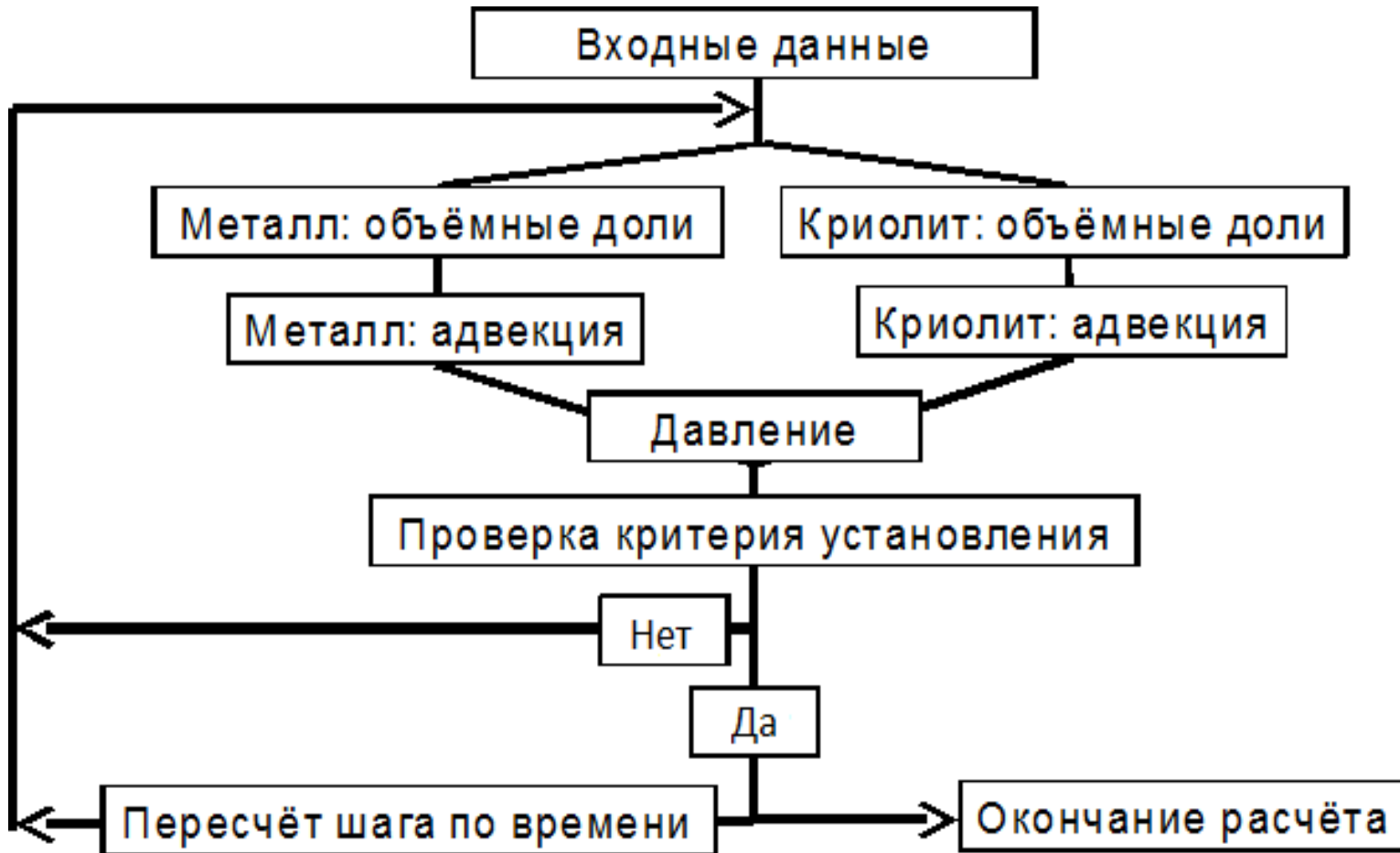
$$p = \left( \frac{p_{i+1jk} - p_{i-1jk}}{\Delta x^2} + \frac{p_{ij+1k} - p_{ij-1k}}{\Delta y^2} + \frac{p_{ijk+1} - p_{ijk-1}}{\Delta z^2} - \text{div} A_{ijk} \right) / \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right),$$

$$(A_{ijk})_x = \sum_{m=1,2} \left( - \frac{\overline{\alpha_{ijkm}^n \rho_m (u_{ijkm}^n)^2}}{\Delta x} - \frac{\overline{\alpha_{ij+1km}^n \rho_m u_{ij+1km}^n v_{ij+1km}^n} - \overline{\alpha_{ijkm}^n u_{ijkm}^n v_{ijkm}^n}}{\Delta y} \right. \\ \left. - \frac{\overline{\alpha_{ijk+1m}^n \rho_m u_{ijk+1m}^n w_{ijk+1m}^n} - \overline{\alpha_{ijkm}^n u_{ijkm}^n w_{ijkm}^n}}{\Delta z} + \right. \\ \left. \overline{\alpha_{ijkm}^n \mu_m \rho_m (u_{xxm}^n + v_{yym}^n + w_{zzm}^n)} + \overline{\alpha_{ijkm}^n \rho_m g} \right) + F_{ijk}$$

Граничные условия:

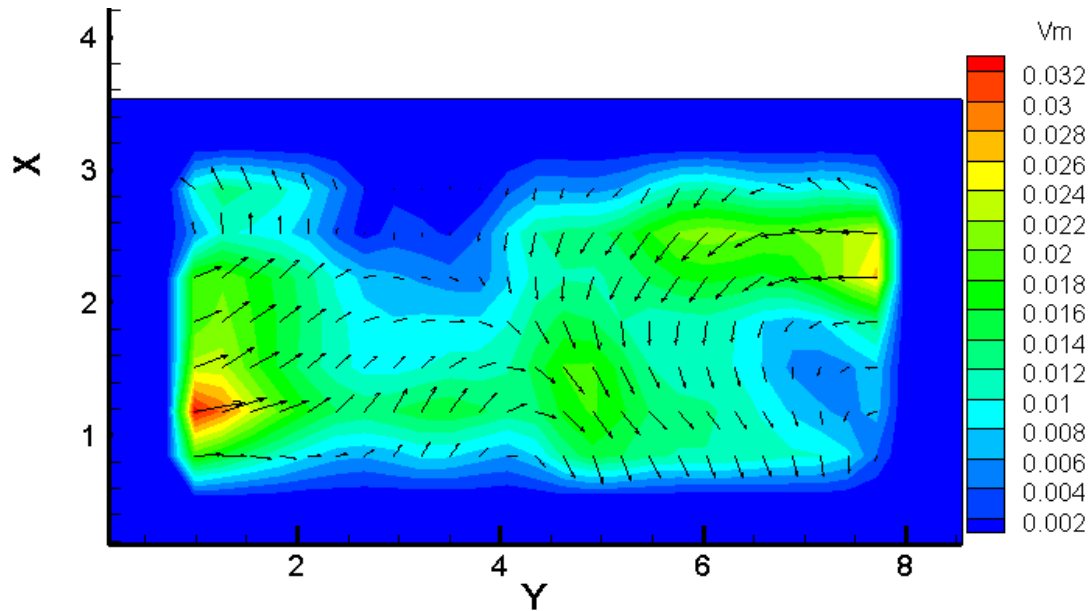
$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = (A_{ijk})_n.$$

# Алгоритм численного решения задачи



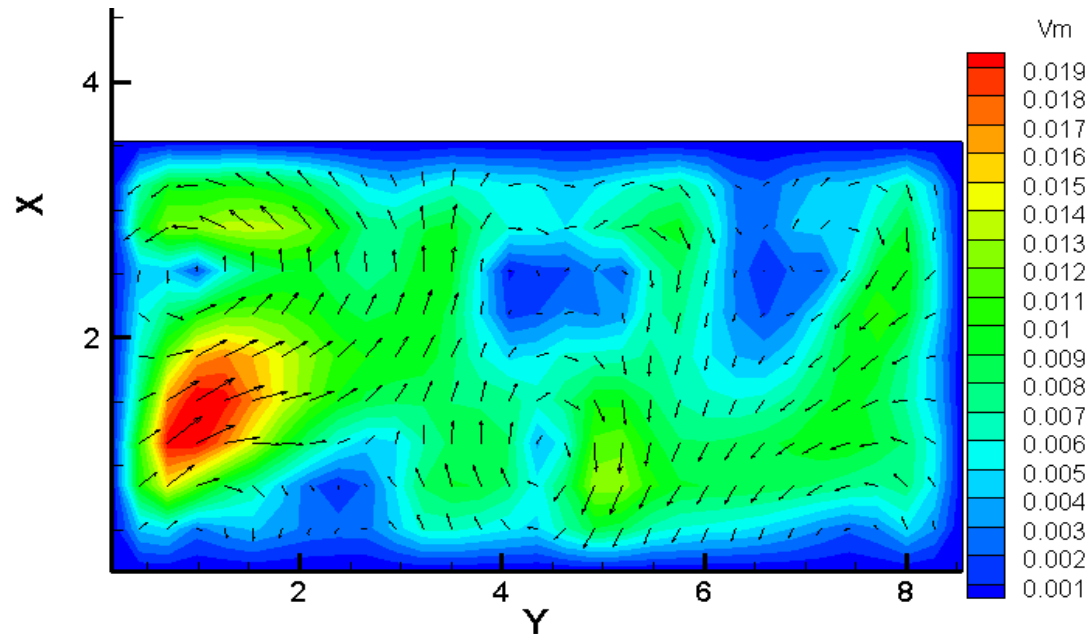
Данный алгоритм решения задачи даёт первый порядок аппроксимации по пространству и времени.[4]

# Начальные поля



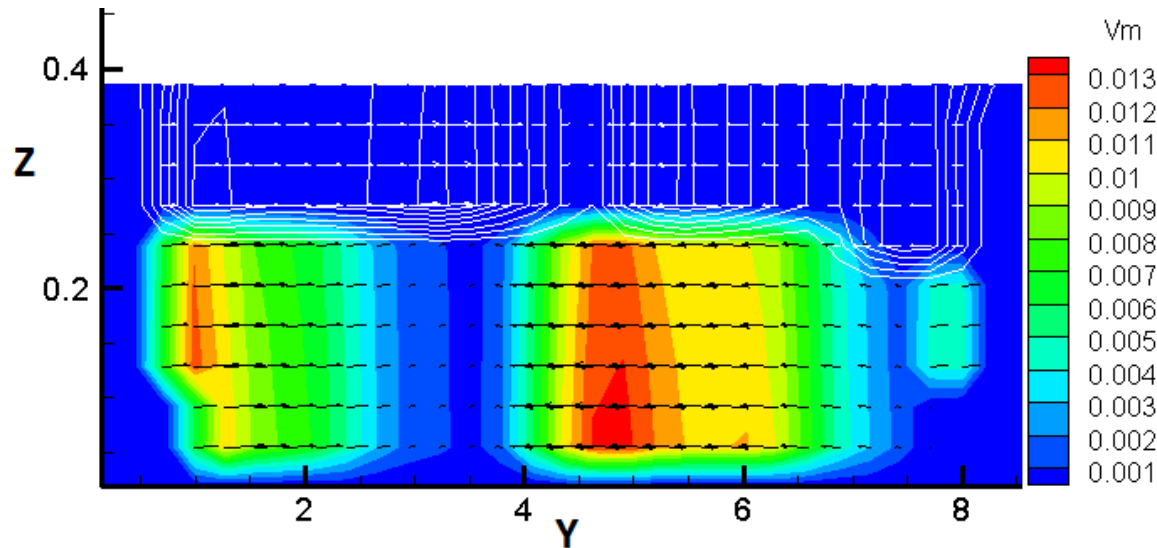
Начальное распределение полей скоростей является реальным распределением, снятыми с промышленной ванны.

На верхнем рисунке представлено распределение скоростей в среднем слое среды алюминия, на нижнем – в среднем слое электролита.



В дальнейшем проведём сравнение результатов для данных срезов.

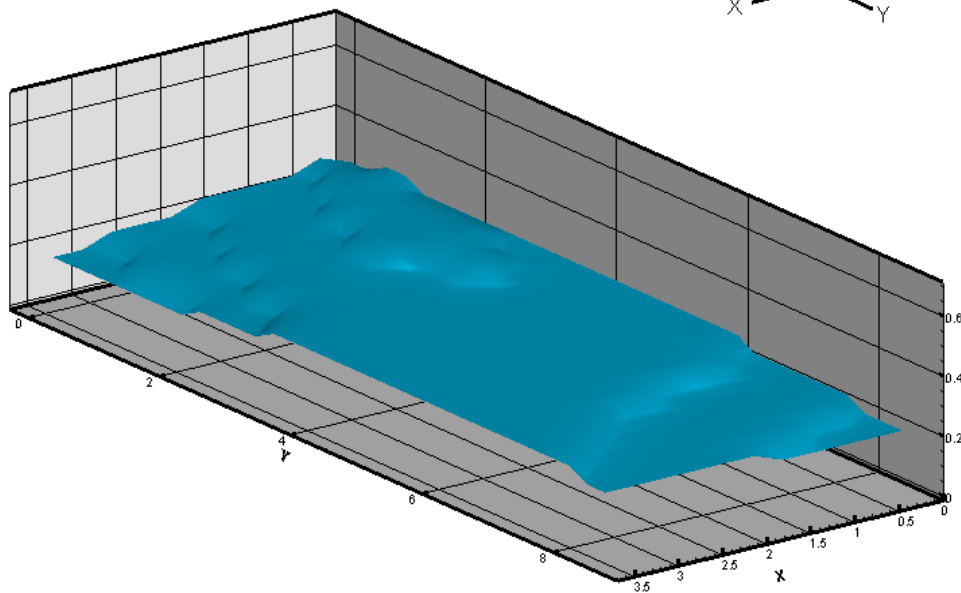
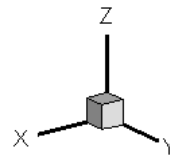
# Начальные поля



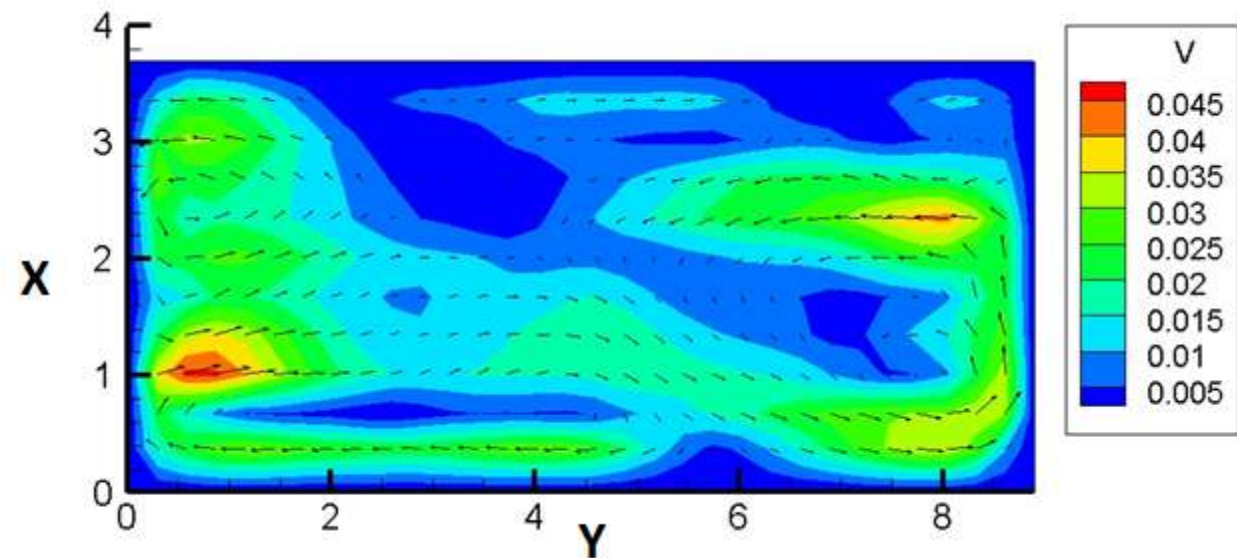
На верхнем рисунке представлено распределение скоростей в плоскости YZ.

Здесь и далее черными стрелками обозначена скорость в среде алюминия, белыми – в среде электролита.

На нижнем рисунке представлена поверхность раздела сред алюминия и электролита. Её конфигурация повлияет на дальнейшее распределение скоростей.

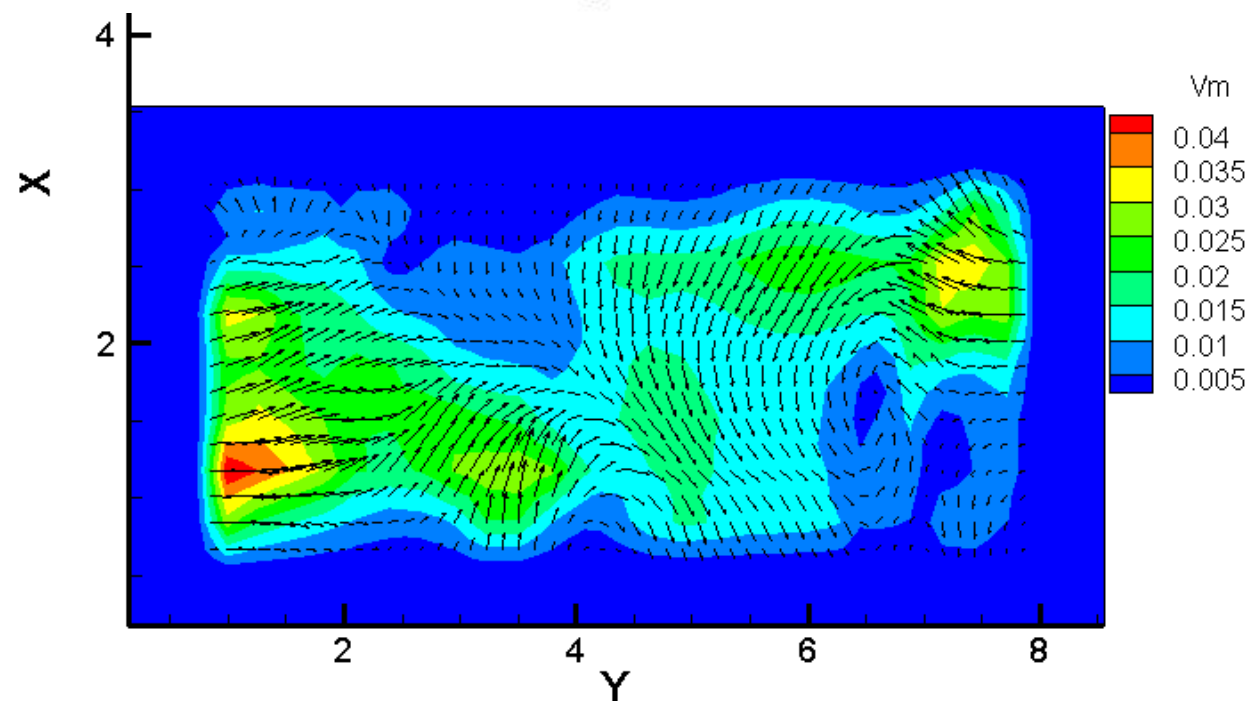


# Сравнение численных экспериментов



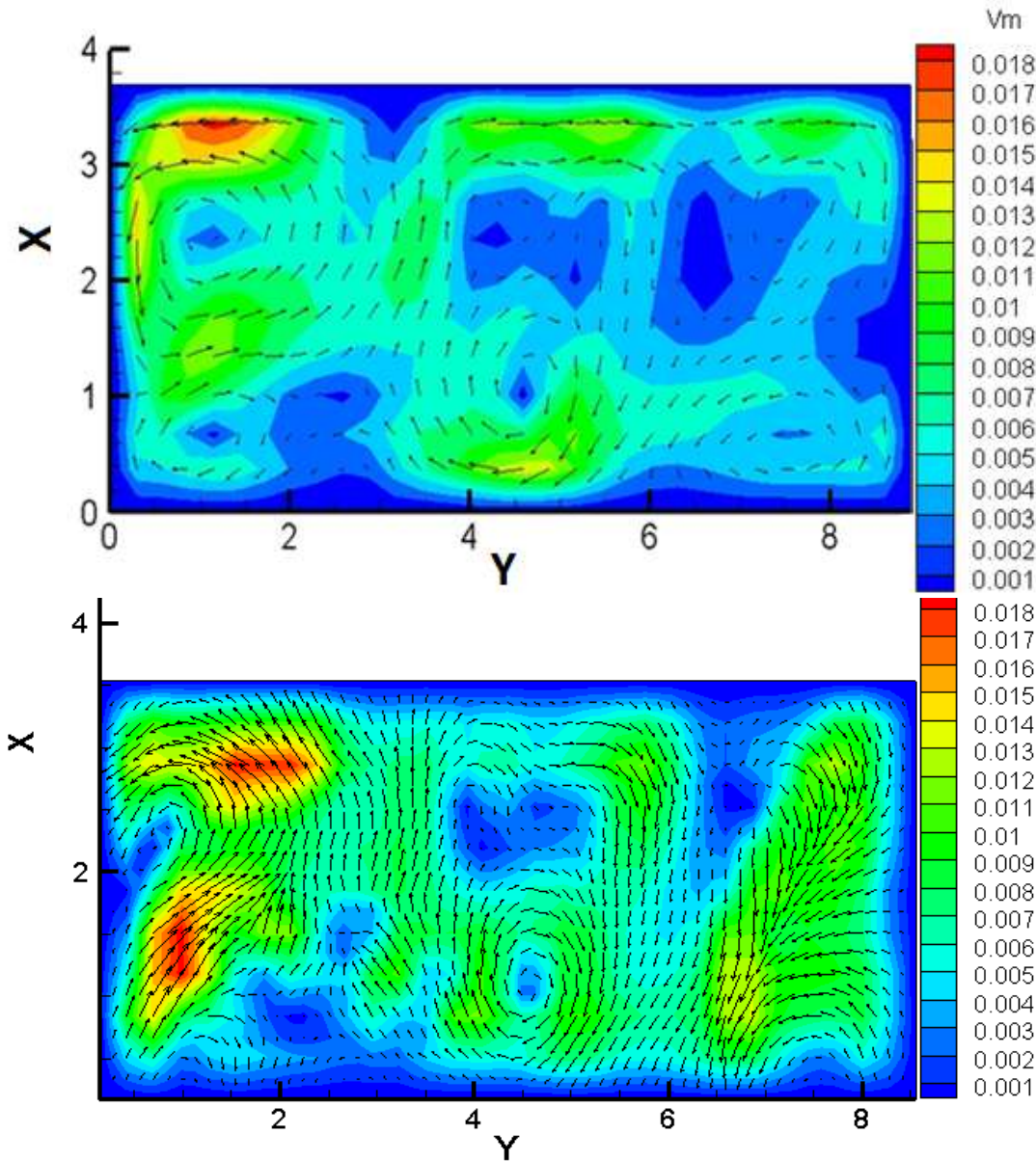
Сравнение будем проводить с результатами полученными в [5]. На рисунках представлено распределение скоростей в плоскости  $XY$  в среднем слое среды алюминия.

Первый рисунок – результат расчёта из [5], второй – результат полученный в данной работе.



Верхний рисунок имеет более выраженные вихревые структуры и менее интенсивное течение, что говорит о большей стабильности процесса электролиза.

# Сравнение численных экспериментов

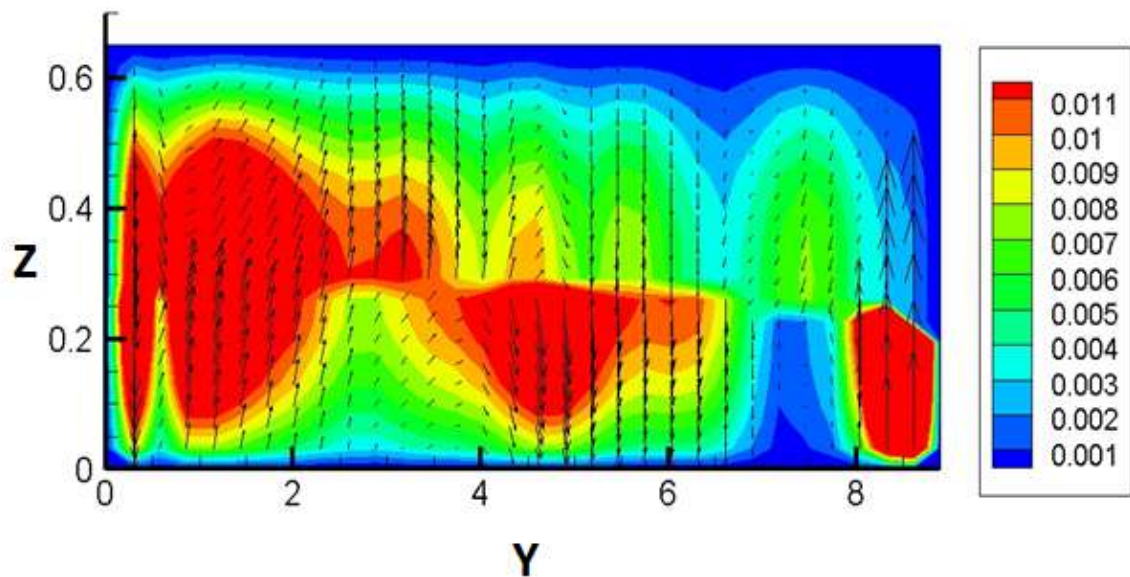


Приведены поля скоростей в среднем слое среды электролита в плоскости  $XY$ . Верхний рисунок – поле скоростей из работы [5], нижний – расчёт полученный в данной работе.

Так же как и в среде алюминия, в электролите на втором рисунке течение имеет более интенсивный характер, что влечёт за собой менее стабильную работу.

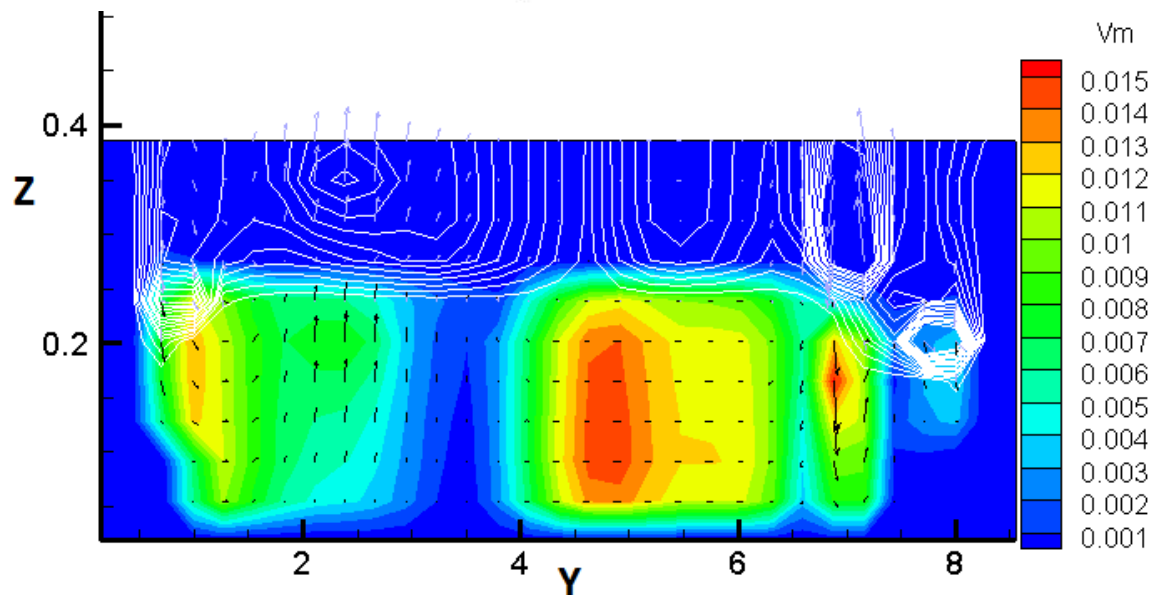


# Сравнение численных экспериментов



На верхнем рисунке взятом из [5] можно положить скорости выше  $h = 0.3$  относящиеся к среде электролита, соответственно ниже к среде алюминия.

Увеличение скоростей по оси  $OZ$  во втором случае говорит о меньшей стабильности процесса электролиза.





# Основные результаты работы

- Изучена математическая модель электролиза алюминия и численный метод её решения. На языке C написан программный пакет реализующий данный метод решения.
- Выбранный способ расчёта давления подходит для математического моделирования алюминиевого электролизёра.
- В результате численного эксперимента выявлены вихревые структуры, образующиеся в рабочем пространстве ванны в процессе электролиза алюминия.
- Проведено сравнение распределения вихревых гидродинамических полей электролизёра Содерберга и промышленного электролизёра, имеющего 22 анода.

# Список литературы

- [1] Р.И. Нигматулин «Динамика многофазных сред»// Москва ,«Наука», 1987, 352 стр.
- [2] О.Г. Провора «Математические модели для эффективного управления некоторыми теплофизическими процессами»//Новосибирский государственный университет 1997. Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора технических наук, стр. 26 – 27.
- [3] Nikolay Nikitin «Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates»// Institute of Mechanics of Moscow State University, Laboratory of General Aeromechanics, 117192, Michurinsky pr. 1, Moscow, Russian Federation. 2006, стр. 759 – 781.
- [4] С.В. Патанкар «Численные методы решения задач теплопроводности и динамики жидкости»// Москва Энергоатомиздат 1984, 145 стр.
- [5] С.В. Анпилов «Однофазные и многофазные математические модели электролиза алюминия»//МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.