Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

«Метод частиц для задачи об ударной волне в двумерном случае»

Научный руководитель: Богомолов С.В.

Выполнила: Бондарь Е.А., группа 504

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Эйлера газовой динамики для изотермического случая:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(v\rho u)}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \dfrac{\partial(u\rho v)}{\partial x} + \dfrac{\partial(v\rho v)}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\[2ex]
p = c^2 \rho
\end{cases}
$$

u, v - проекции скорости движения фронта на оси Ox и Oy
p (x, y, t) - давление
ρ (x, y, t) - плотность течения

Алгоритм решения задачи

1. Сдвиг частиц по явному методу Эйлера
2. Перестройка частиц вследствие их взаимодействия
3. Учет градиента давления
4. Использование «энтропийного» условия

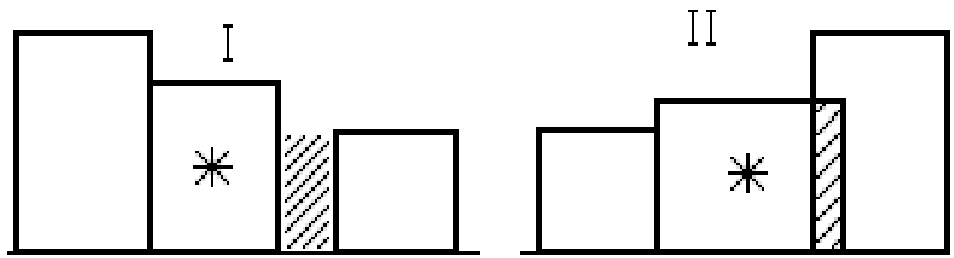
Сдвиг частиц по явному методу Эйлера

Координаты центров частиц вычисляются: $x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^{k} + \tau v_{i,j}^{k}$

$$y_{i,j}^{k+1} = y_{i,j}^{k} + \tau u_{i,j}^{k}$$

Скорость газа в точке $x_{ij}(t)$ вычисляется как $v_{i,j}^{k} = \frac{\rho v_{i,j}^{k}}{\rho_{i,j}^{t}}$,
аналогично для скорости газа в точке $y_{ij}(t)$

Перестройка частиц вследствие их взаимодействия



В результате сдвига возникают пересечения(II) и зазоры(I) между частицами, которые представляют из себя ошибку аппроксимации. Поэтому необходимо произвести перестройку частицы, т.е. изменение их ширины.

Учет градиента давления

Законы сохранения импульса частицы:

$$V_{\rho v_{ij}}(t_{k+1}) - V_{\rho v_{ij}}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(p\big(a_{ij}(t)\big) - p\big(b_{ij}(t)\big)\Big)dt$$

$$U_{\rho v_{ij}}(t_{k+1}) - U_{\rho v_{ij}}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(p\big(c_{ij}(t)\big) - p\big(d_{ij}(t)\big)\Big)dt$$

Аппроксимируем интегралы:

$$V_{\rho v_{ij}}(t_{\mathrm{k+1}}) = V_{\rho v_{ij}}(t_k) + \tau\Big(p_{ij}^{-}(t_k) - p_{ij}^{+}(t_k)\Big)$$

$$U_{\rho v_{ij}}(t_{k+1}) = U_{\rho v_{ij}}(t_k) + \tau\Big(p_{ij}^{-}(t_k) - p_{ij}^{+}(t_{\mathrm{k}})\Big)$$

Правило выбора давления на границе :

По оси Ox:

$$p_{ij}^{-}(t_k) = p_{i-1,j}^{k} \text{ при } dx^{-} > 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \le \rho_{i-1,j}^{k} \text{ или } dx^{-} < 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \ge \rho_{i-1,j}^{k}$$

$$p_{ij}^{+}(t_k) = p_{i+1,j}^{k} \text{ при } dx^{+} > 0 \text{ и } \rho_{i}^{k} \le \rho_{i+1,j}^{k} \text{ или } dx^{+} < 0 \text{ и } \rho_{i}^{k} \ge \rho_{i+1,j}^{k}$$

По оси Oy:

$$p_{ij}^{-}(t_k) = p_{i,j-1}^{k} \text{ при } dy^{-} > 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \le \rho_{i,j-1}^{k} \text{ или } dy^{-} < 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \ge \rho_{i,j-1}^{k}$$

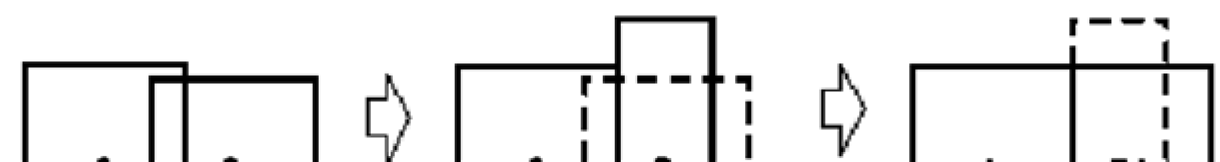
$$p_{ij}^{+}(t_k) = p_{i,j+1}^{k} \text{ при } dy^{+} > 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \le \rho_{i,j+1}^{k} \text{ или } dy^{+} < 0 \text{ и } \rho_{ij}^{k} \ge \rho_{i,j+1}^{k}$$

«Энтропийное» согласование

В результате сжатия частицы значения её плотности или импульса могут оказаться больше, чем максимальное соответствующее значение одной из частиц, приведших в перестройке.

В случае разрежения полученные значения функций могут оказаться меньше, чем соответствующие значения для частицы, с которой произошло взаимодействие.

Для устранения требуется чтобы плотность или импульс частицы не превышали соответствующих максимальных значений для частицы, приведшей к перестройке → перестройка частицы и смещение её центра



Результаты расчетов:

Начальные условия :

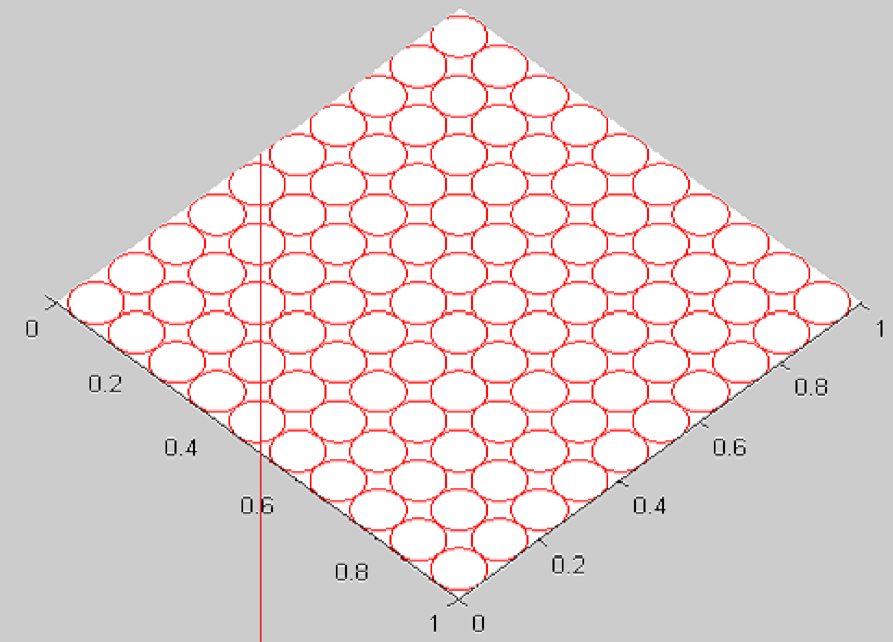
$$\mathrm{v_r} = \mathrm{u_r} = 2 - \sqrt{2}\ ; \quad \mathrm{v_l} = \mathrm{u_l} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \mathcal{D} = 2\sqrt{2}$$

$$\tau = 0.01 \ \ r = 0.06$$

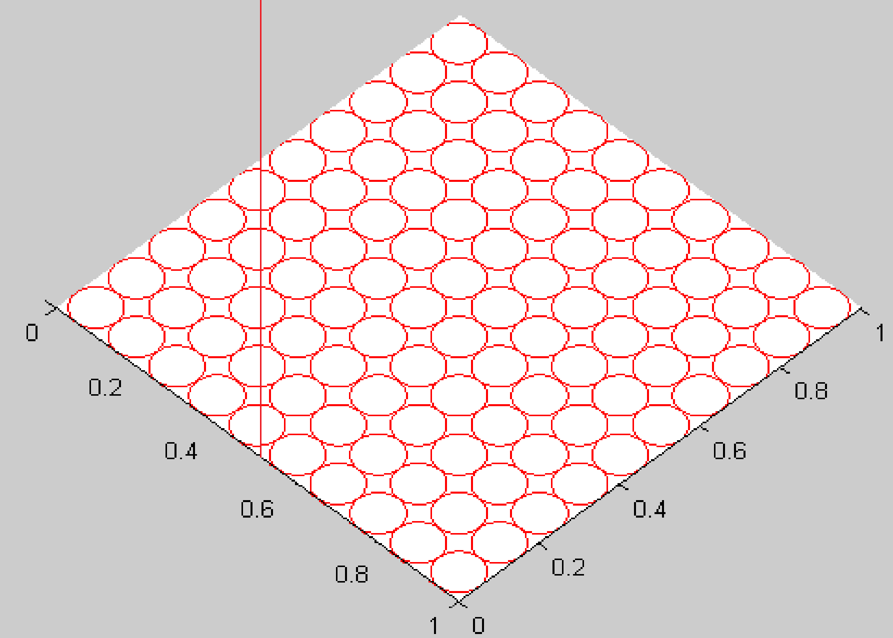
$$\rho_\mathrm{r} = 1.0 \ \rho_\mathrm{l} = 2.0$$

Шаг по времени: 0

Плотность

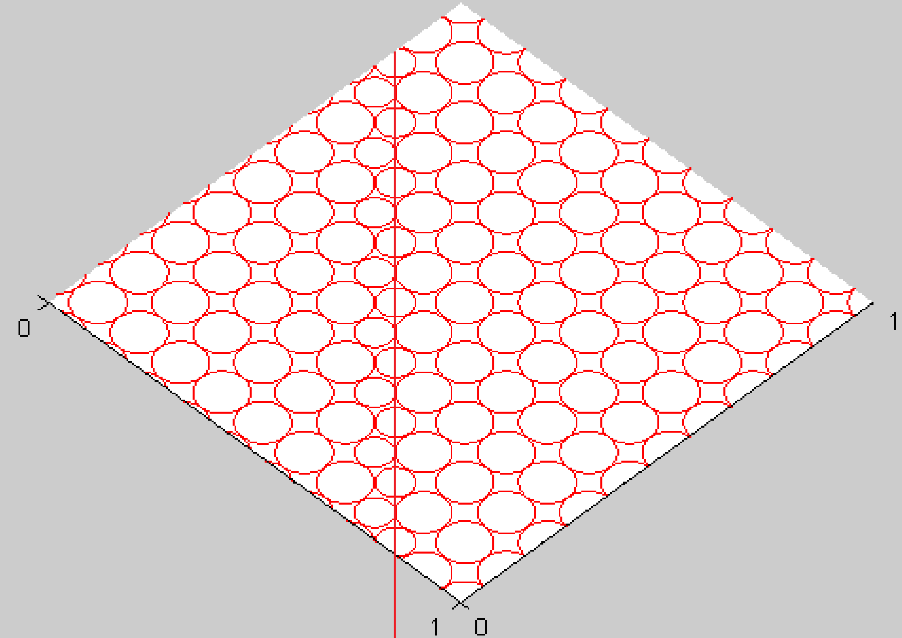


Импульс

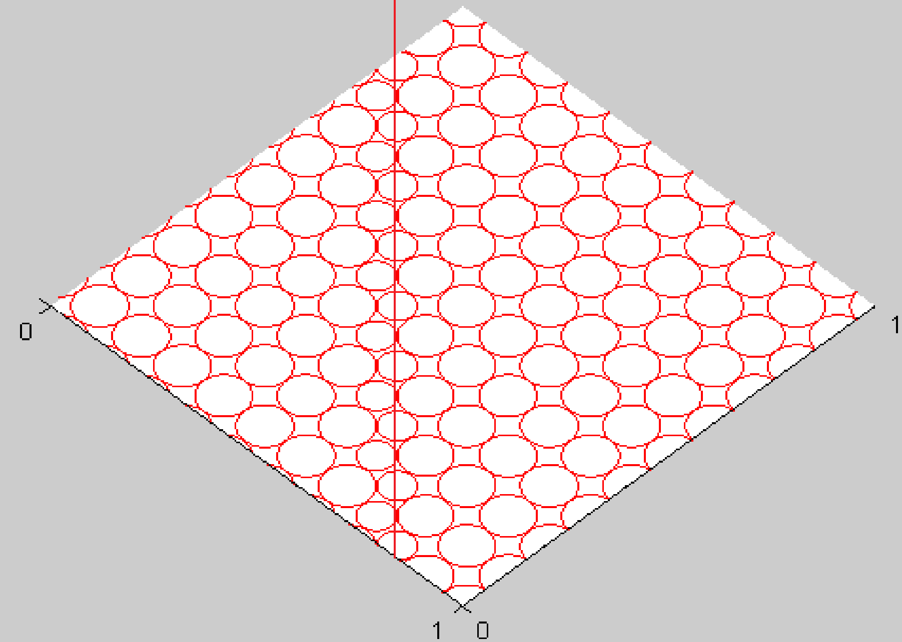


Шаг по времени : 100

Плотность



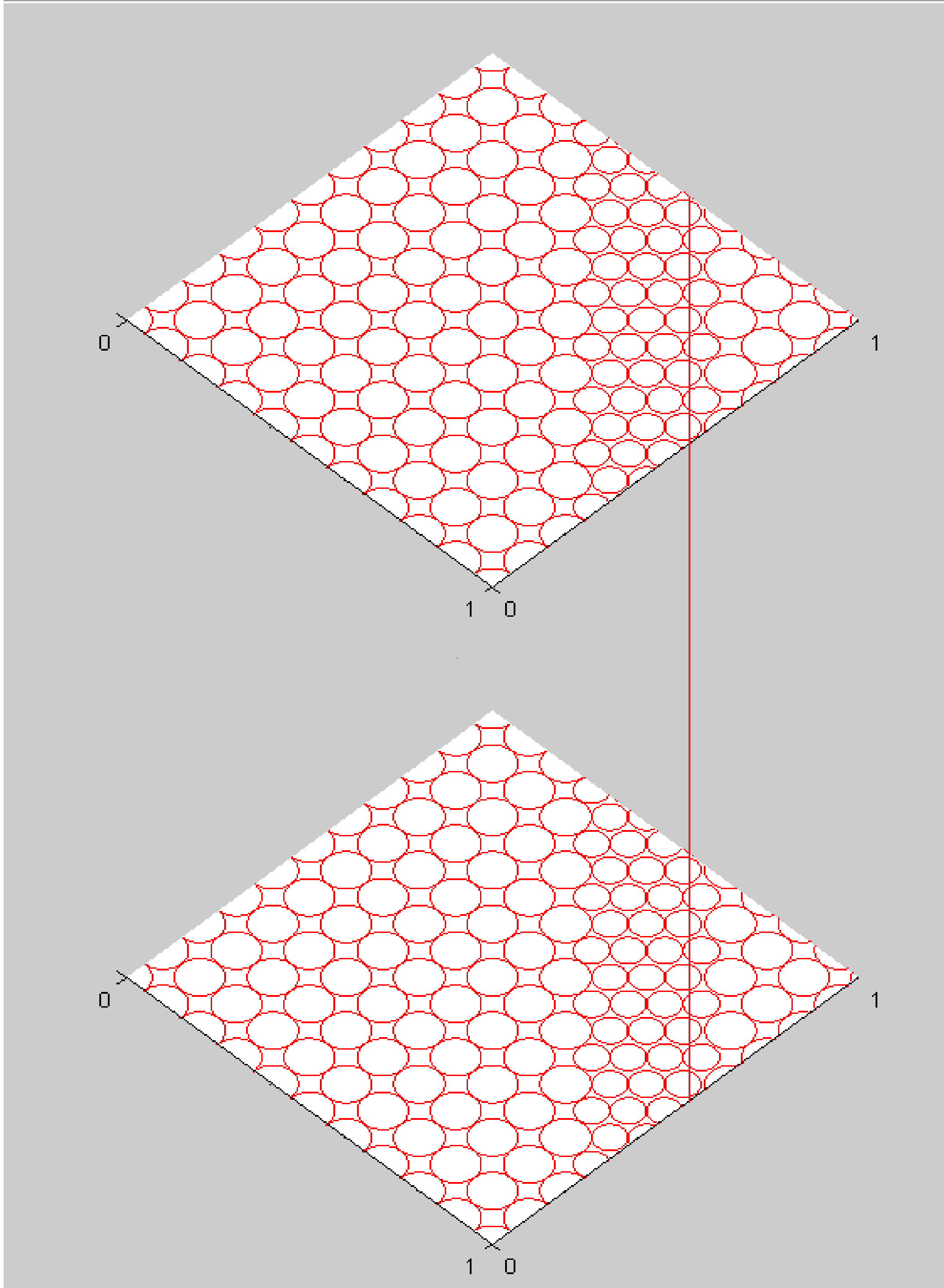
Импульс



Шаг по времени : 500

Плотность

Импульс



Спасибо за внимание.