Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

«Сравнение стохастического м детерминированного метода частиц для решения квазилинейного уравнения диффузии»

Научный руководитель: Богомолов С.В.

Выполнил: Беспамятнов Д.А., группа 505

Цель работы

- Цель работы изучить поведения стохастического и детерминированного методов частиц при численном решении квазилинейного уравнения диффузии.
- Программно реализовать стохастический и детерминированный методы частиц для квазилинейного уравнения диффузии.
- Сравнить оба метода с точным решением.

Квазилинейное уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

Стохастический метод частиц

Мы решаем квазилинейное уравнение диффузии. Искомая функция – функция плотности частиц $u(x)$

Обычно для функции $u(x)$ составляют уравнение. Но можно и проследить за перемещением каждой частицы, которая будет двигаться по закону:

$$dx = \sigma(u)dW$$, где

$$dW = \sqrt{dt} * \xi$$

$$\xi - N(0,1)$$

Математическая основа метода частиц

$$u(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{m \to 0} \frac{N(m, \Delta x) * m}{\Delta x}$$

$$N(m, \Delta x) = \left| \left\{ b \in B(m) \middle| \left| x_b - x \right| < \frac{\Delta x}{2} \right\} \right|$$

$B(m)$ - множество всех частиц.

x_b - координата b-ой частицы

$dx = \sigma(u) dW$ - закон движения

Численное решение

1)Разбиваем область на конечные элементы.

2)Предполагаем, что функции u(x), f(x) кусочно постоянны и на элементах постоянны.

3)Инициализация: задаем начальное распределение $u_0(x)$.

Затем вычисляем количество частиц в ячейке. Добавляем в каждую ячейку это количество частиц.

$$n_i^0 = \frac{u_i^0 h}{m}$$

4) Перемещение частиц

$$x_b^{j+1} = x_b^j + \sigma(u_i^j) * \sqrt{\Delta t} * \xi$$

$$\xi = \cos(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r}$$

r и φ – независимые случайные величины. Принимают значения из [0,1]. Это есть преобразование Бокса-Мюллера.

5) Учет правых частей. Частицы добавляем равномерно: $\Delta n_i = \dfrac{f(u_i^j) * \Delta t * h}{m}$

6) Вычисление новой u_i:

а) Вычислить n_i^{j+1}

б) $u_i^{j+1} = \dfrac{m * n_i^{j+1}}{h}$

7) Переходим на шаг 4)

Детерминированный метод частиц

1) Поток частиц: $Q(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(u)\frac{\partial u}{\partial x}$

2) Так же вводится сетка.

3) Инициализация

4) Вычисляем поток на каждой границе:

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{u_{i+1}+u_i}{2}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{h}$$

5) Вычисляем новое значение u(x):

$$u_i^{j+1} = u_i^j + Q_{i+\frac{1}{2}} * \Delta t$$

$$u_{i+1}^{j+1} = u_{i+1}^j - Q_{i+\frac{1}{2}} * \Delta t$$

Тестовая задача

1) Задача одномерная
2) $\sigma^2(u) = u$
3) $f = u^2$
4) Начальное распределение при t=0:

$$u(x,t) = \begin{cases} \left[q_0 * (t_f - t)\right]^{-\frac{1}{\sigma}} * \left\{ \dfrac{2*(\sigma+1)}{\sigma*(\sigma+2)} * \cos^2 \dfrac{\pi * x}{L_T} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, |x| \le \dfrac{L_T}{2} \\ 0, |x| > \dfrac{L_T}{2} \end{cases}$$

Точное решение

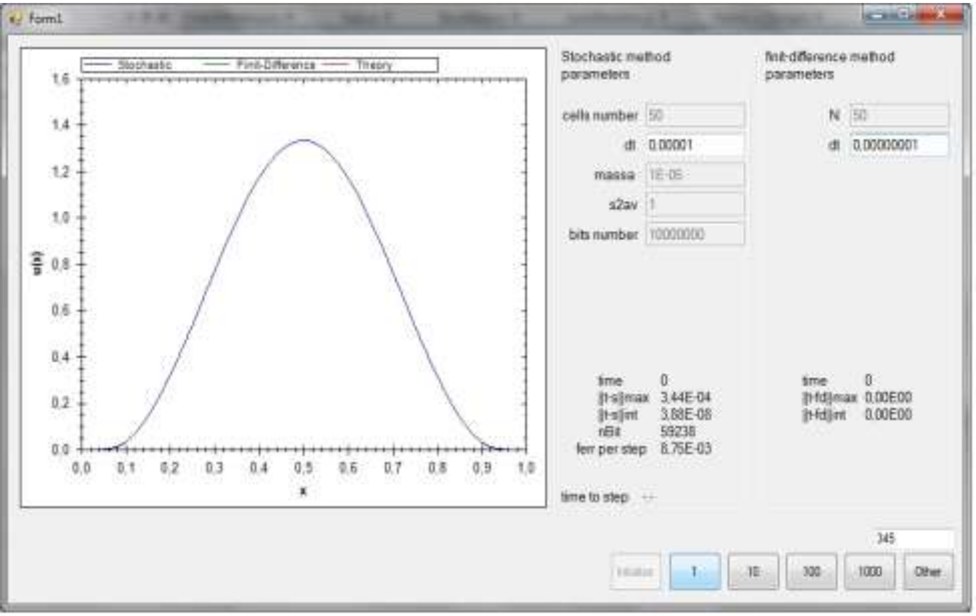
Изучим пространственно-временное поведение распределения температуры в теплопроводном веществе с нелинейными источниками тепла. Энергия выделяется в результате горения, протекания химических или иных реакций. Среда считается неограниченной (Задача Коши), процесс горения одномерным. Он описывается уравнением $\frac{\partial T}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 * T^{\sigma} * \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_0 * T^{\beta}$ $\beta > 1$ $-\infty < x < \infty$ $q_0 > 0$

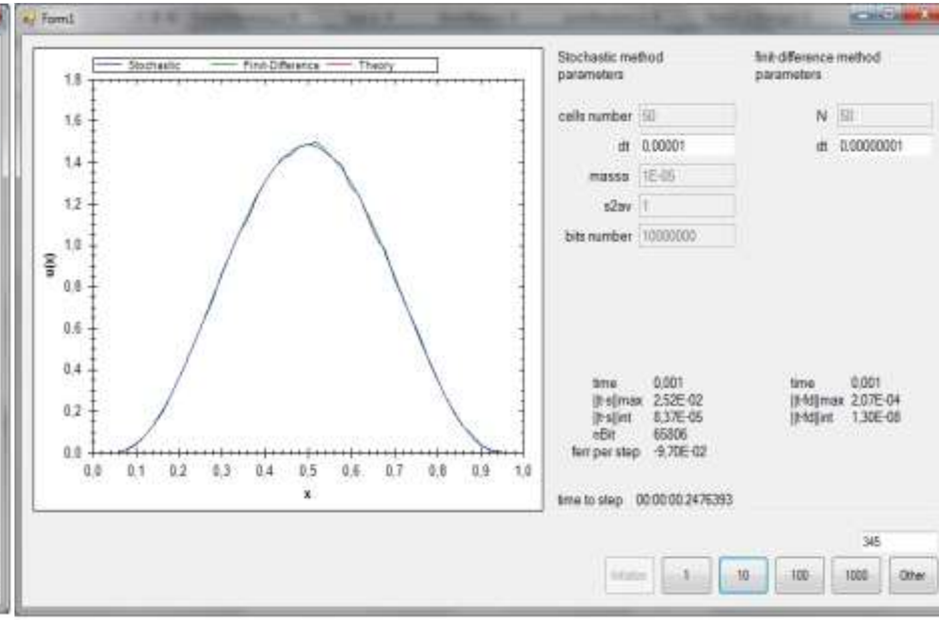
С начальной функцией: $T(x, t_0) = T_0(x)$ $-\infty < x < \infty$

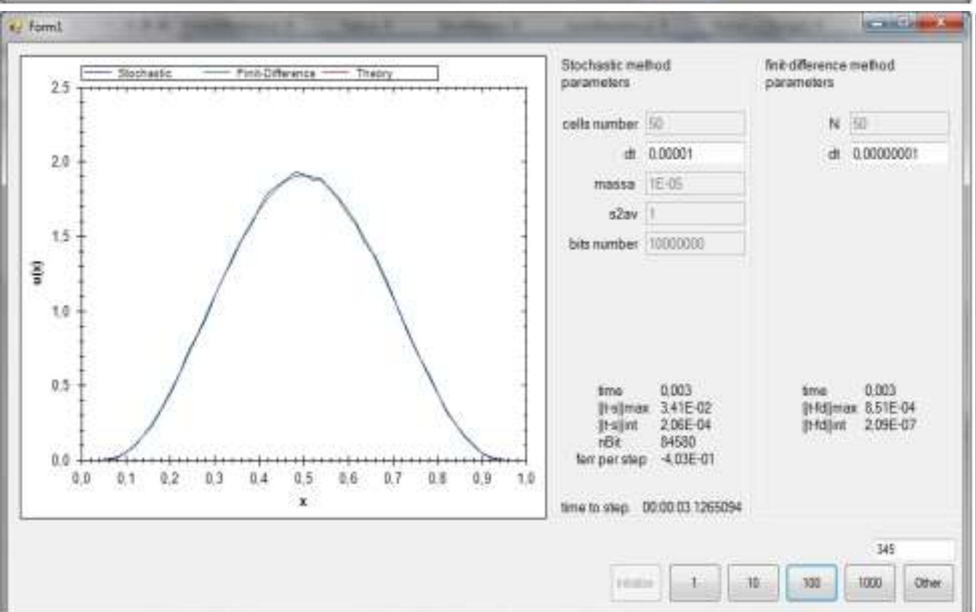
Ответ:

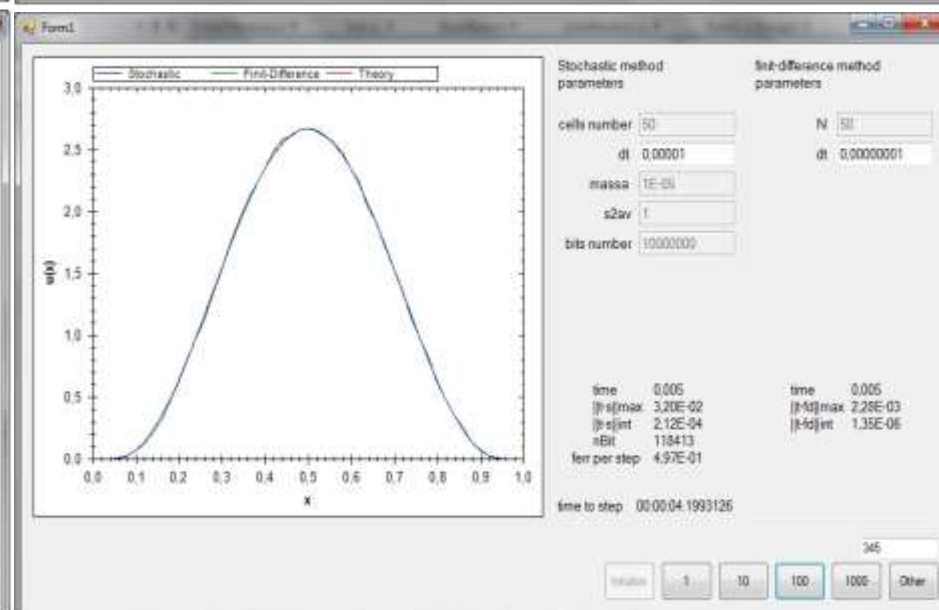
$$u(x,t) = \begin{cases} \left[q_0 * (t_f - t)\right]^{-\frac{1}{\sigma}} * \left\{\dfrac{2*(\sigma+1)}{\sigma*(\sigma+2)} * \cos^2 \dfrac{\pi * x}{L_T}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}, |x| \le \dfrac{L_T}{2} \\ 0, |x| > \dfrac{L_T}{2} \end{cases}$$

Результаты расчетов

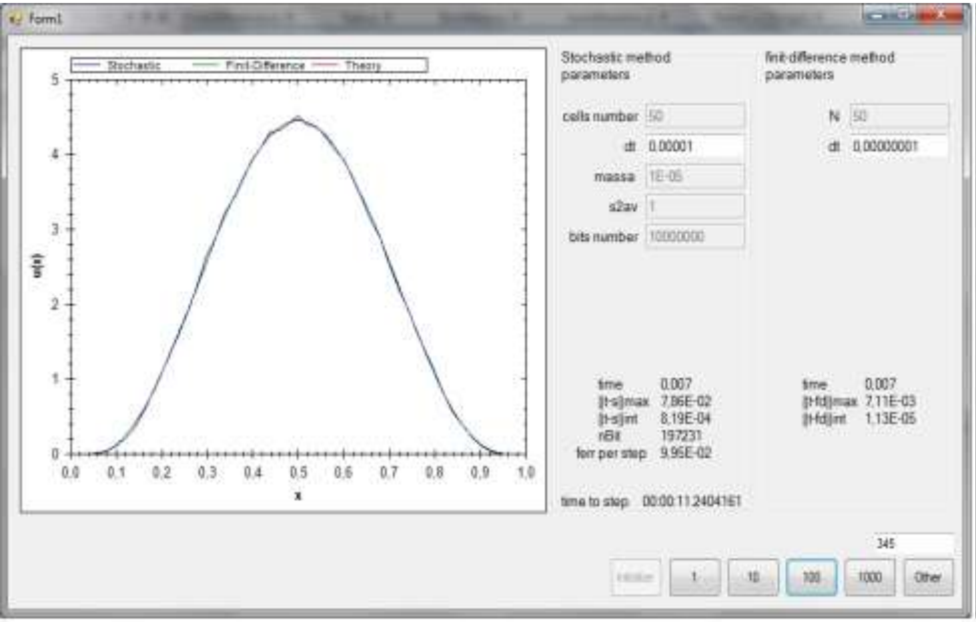


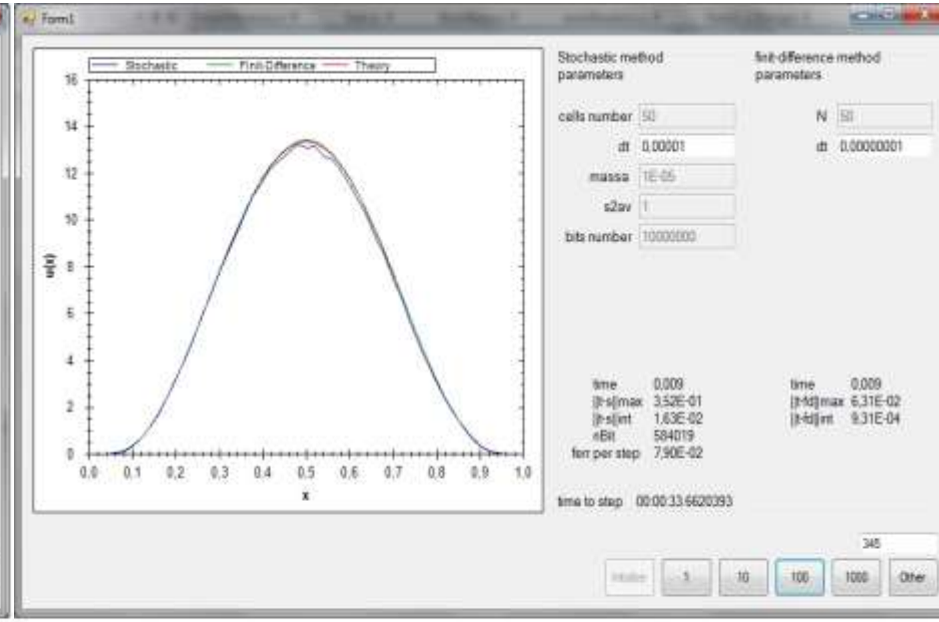


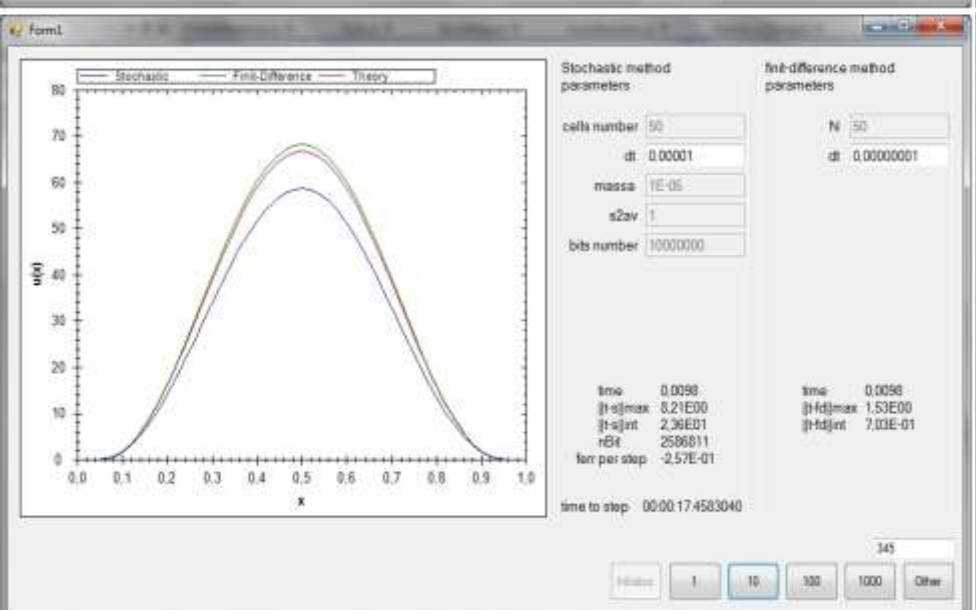


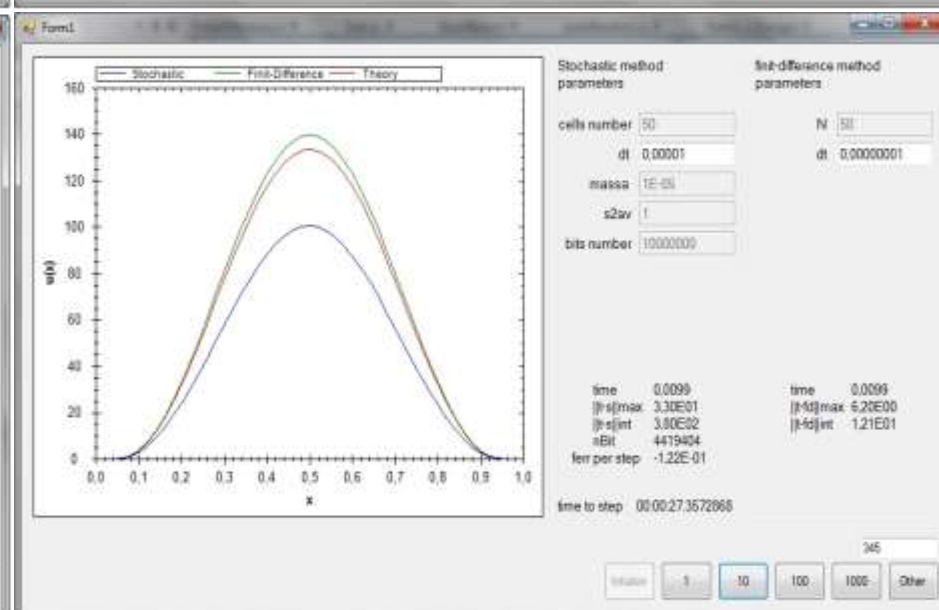


Результаты расчетов









Выводы

Целью данной работы было получение численного решения квазилинейного уравнения диффузии стохастическим и детерминированным методом частиц.
Приведен алгоритм решения. В качестве тестового задания было выбрано точное решение для квазилинейного уравнения диффузии. Показано, что при достаточно малом шаге по времени получена приемлемая точность. Сравнивая оба метода, выясняется, что детерминированный метод частиц более точен, чем стохастический. Однако большим плюсом стохастического метода частиц является возможность его простого распараллеливания, что довольно актуально при увеличении объема вычислений в наше время.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ