Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова.
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Вычислительных Методов

Исследование симметрично-симплектических методов на точных решения задачи Кеплера

Бакеев Руслан Надирович

Научный руководитель
Д.ф-м.н., профессор
Еленин Георгий Георгиевич

Задача Коши для гамильтоновой системы

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{p}_i}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial \bar{q}_i} \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{p}_i} \\[2ex]
\bar{q}_i \quad t_0 \quad = \bar{q}_{oi} \\[2ex]
\bar{p}_i \quad t_0 \quad = \bar{p}_{oi}
\end{cases}
$$

$$i = 1 \ldots N$$

Глобальные характеристики задачи Коши:

1. Закон сохранения полного количества движения
2. Закон сохранения полного момента количества движения
3. Закон сохранения полной энергии
4. Симплектичность
5. Обратимость по времени
6. Сохранение фазового объема

Постановка задачи

В настоящей работе исследуется вопрос о возможности вычислительных методов Рунге-Кутты сохранять глобальные характеристики решения на примере задачи Кеплера.

Задача Кеплера, является частным случаем гамильтоновой системы

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma M \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r_0}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}$$

Причины выбора задачи Кеплера:

- Задача имеет точное решение, представимое в виде комбинации элементарных функций
- У задачи Кеплера существует дополнительный первый интеграл – вектор Рунге-Ленца-Лапласа

Получение точного решения

Для тестирования вычислительных методов необходимо иметь аппарат для получения точного решения задачи Кеплера.

Задача Кеплера → Задача о движении двух независимых математических маятников

$$v_x = \frac{q_1 w_2 + q_2 w_1}{q_1^2 + q_2^2} \qquad x = q_1 q_2$$

$$dt = (q_1^2 + q_2^2)ds, s(0) = 0$$

$$v_y = \frac{q_1 w_1 - q_2 w_2}{q_1^2 + q_2^2} \qquad y = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2)$$

С помощью замены переменных Леви-Чивита можно <u>линеаризовать задачу Кеплера</u>, сведя ее к задаче о движении двух математических маятников.

Симметрично-симплектичекие методы Рунге-Кутты

Выбор симметрично-симплектических методов из всего семейства двухстадийных методов обусловлен тем, что такие методы осуществляют симплектическое отображение на одном шаге, сохраняют фазовый объем, дают обратимое по времени решение, а также сохраняют линейные и квадратичные формы.

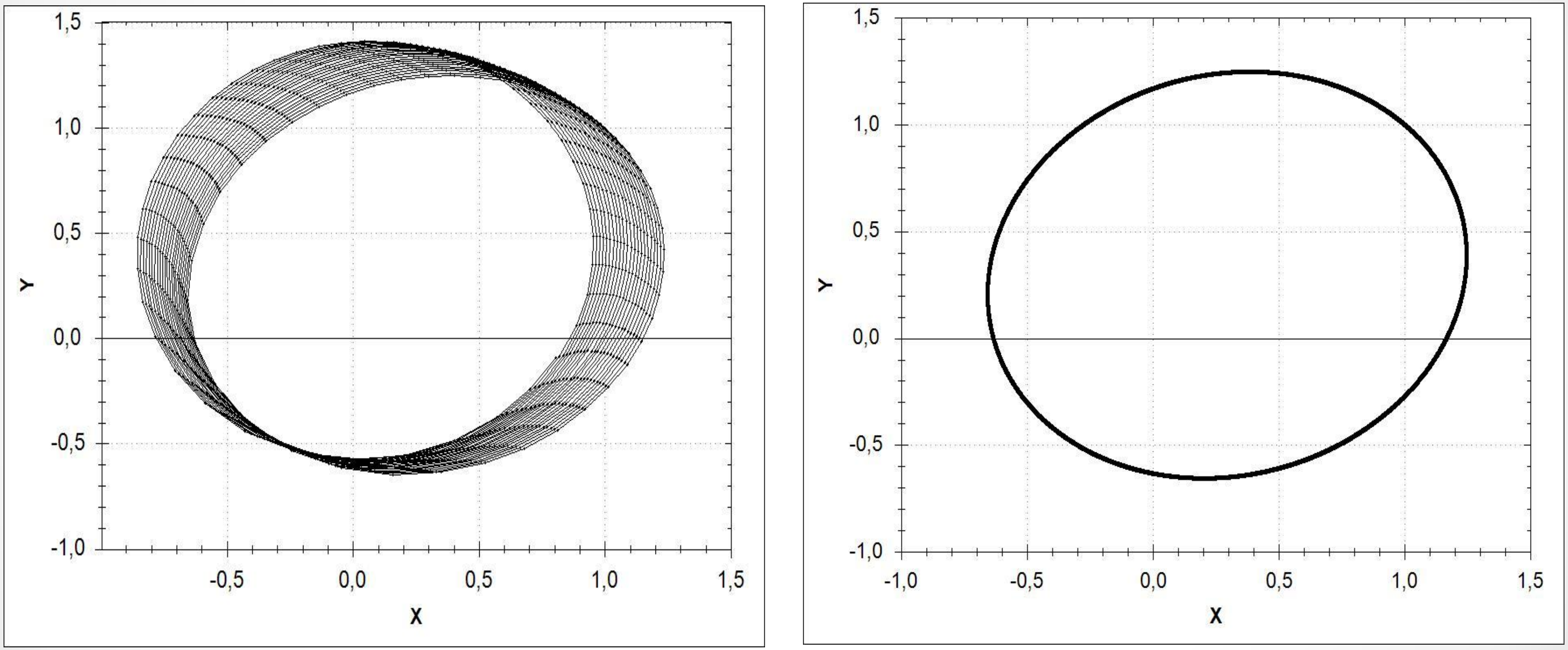
$$\mathbf{K}_{11} + \nabla U(\mathbf{R}_i + 0.5\tau(1+s_{12})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_i + 0.25\tau^2\mathbf{M}^{-1}((0.5-s_{12}^2)\mathbf{K}_{11} + (0.5+s_{12})\mathbf{K}_{21})) = 0$$

$$\mathbf{K}_{21} + \nabla U(\mathbf{R}_i + 0.5\tau(1-s_{12})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_i + 0.25\tau^2\mathbf{M}^{-1}((0.5-s_{12})\mathbf{K}_{11} + (0.5-s_{12}^2)\mathbf{K}_{21})) = 0$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i + 0.5\tau(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21})$$

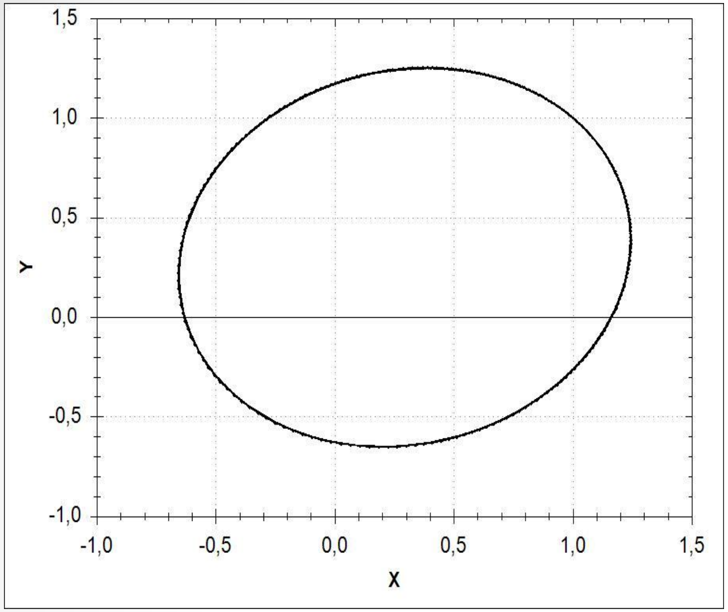
$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \tau\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_i + 0.25\tau^2\mathbf{M}^{-1}((1-s_{12})\mathbf{K}_{11} + (1+s_{12})\mathbf{K}_{21})$$

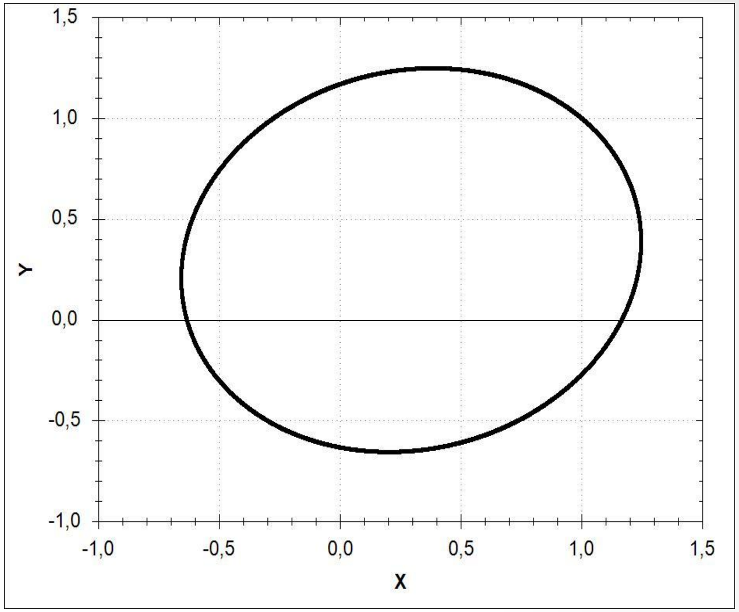
Пример точного и приближенного решения задачи

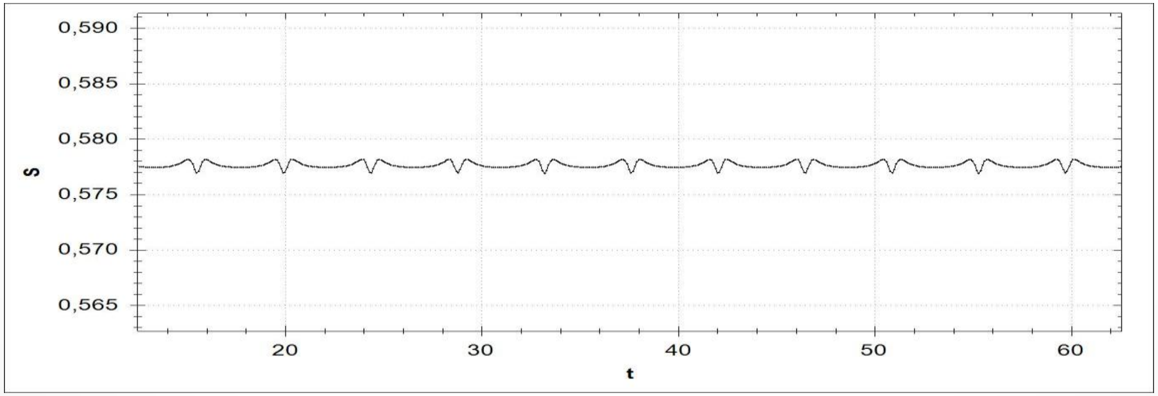


Численное решение, полученное с помощью двухстадийного симметрично-симплектического метода Рунге-Куты с постоянным s = 0.3 (слева) и точное решение (справа).

Используя свободный параметр можно минимизировать квадрат невязки дисбаланса энергии

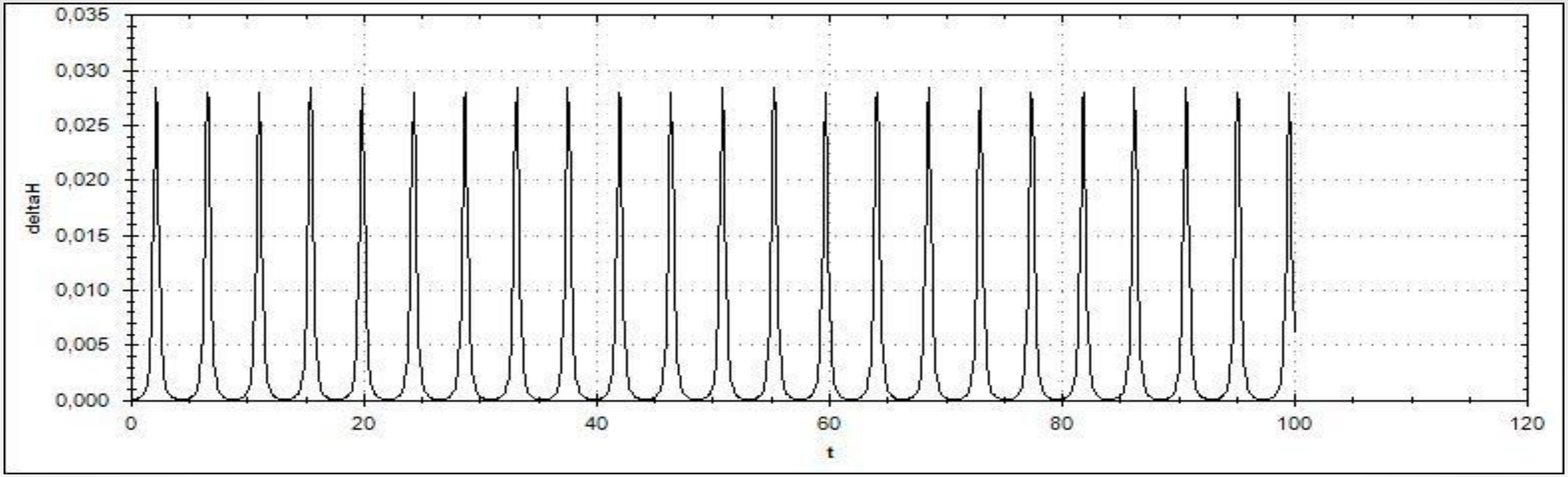


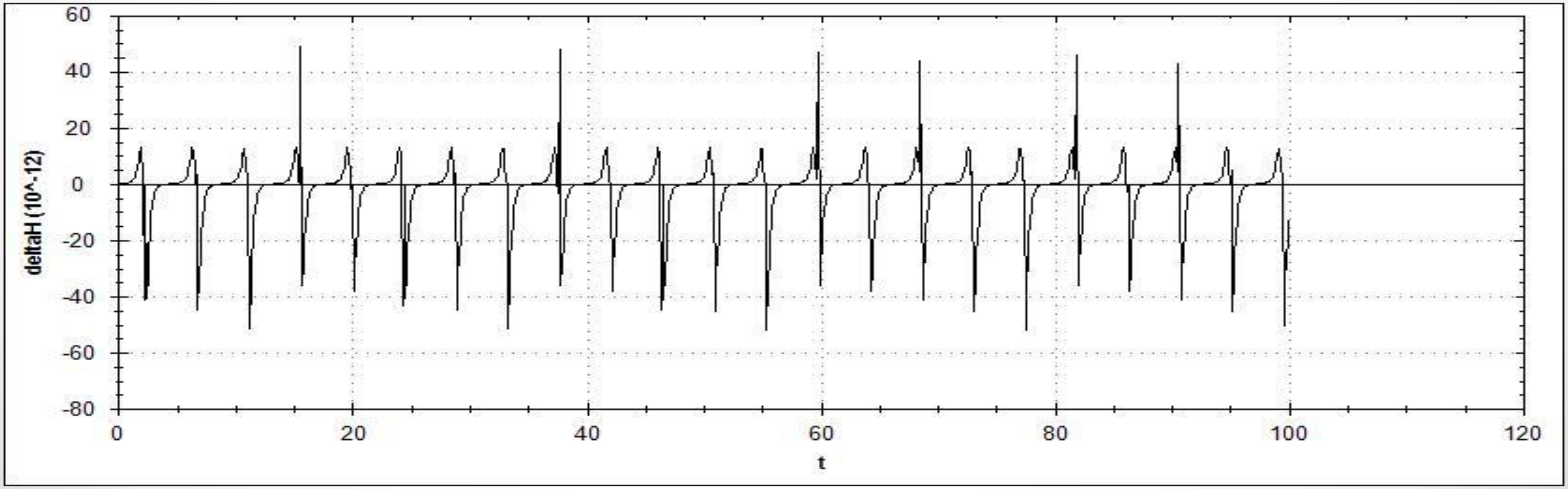




Численное решение при выборе оптимального параметра симметрично-симплектического двухстадийного метода Рунге-Кутты (слева) и точного решения (справа).

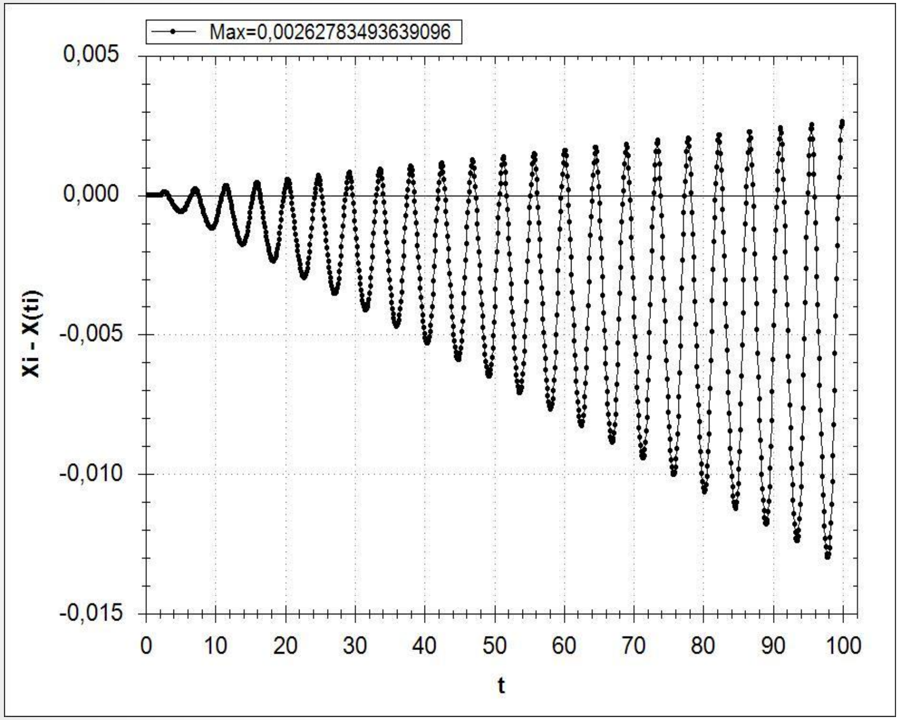
Дисбалансы энергии

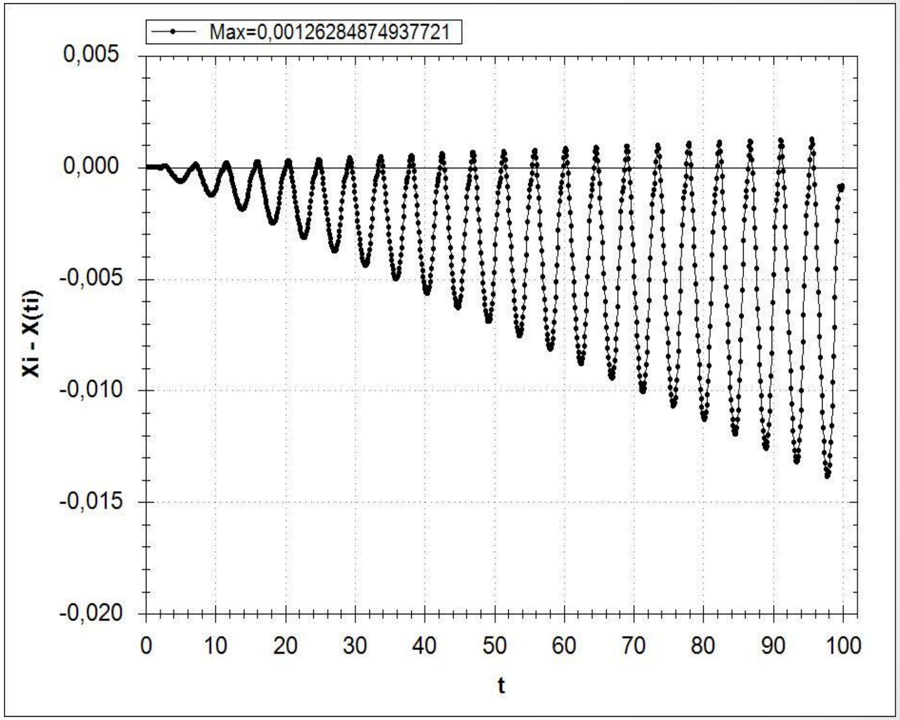




Дисбаланс энергии в зависимости от времени

Погрешности метода четвертого порядка и метода с оптимальным параметром

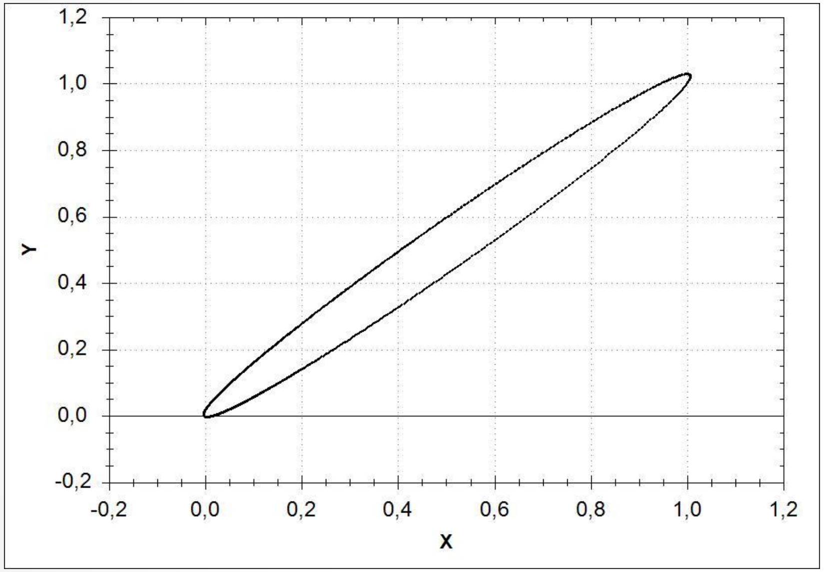




Метод с оптимальным выбором параметра имеет погрешность меньше, чем метод четвертого порядка примерно в два раза.

Метод с адаптивным шагом

Численное решение задачи с большим эксцентриситетом требует относительно малый шаг по времени.



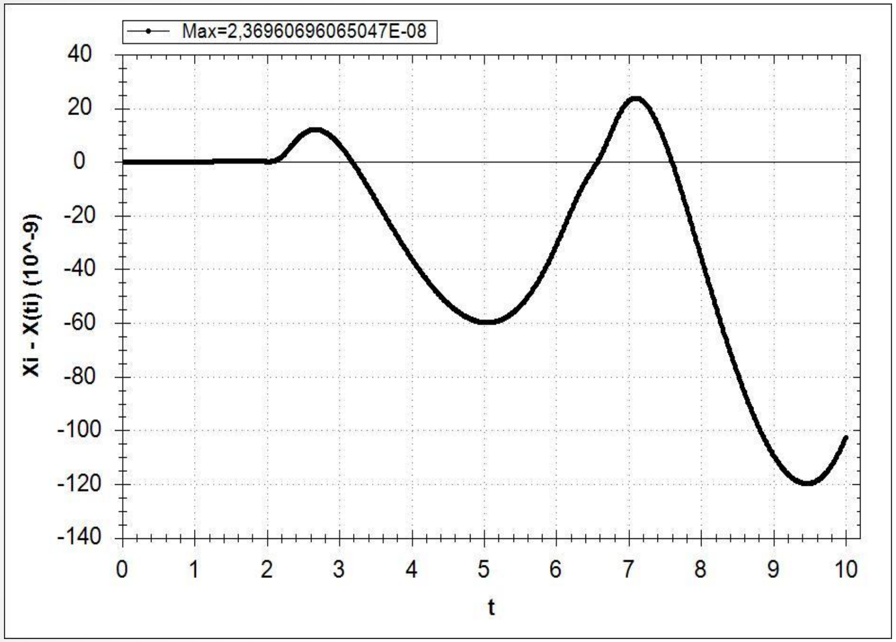
$$\frac{dt}{ds} = f(x, y, v_x, v_y)$$

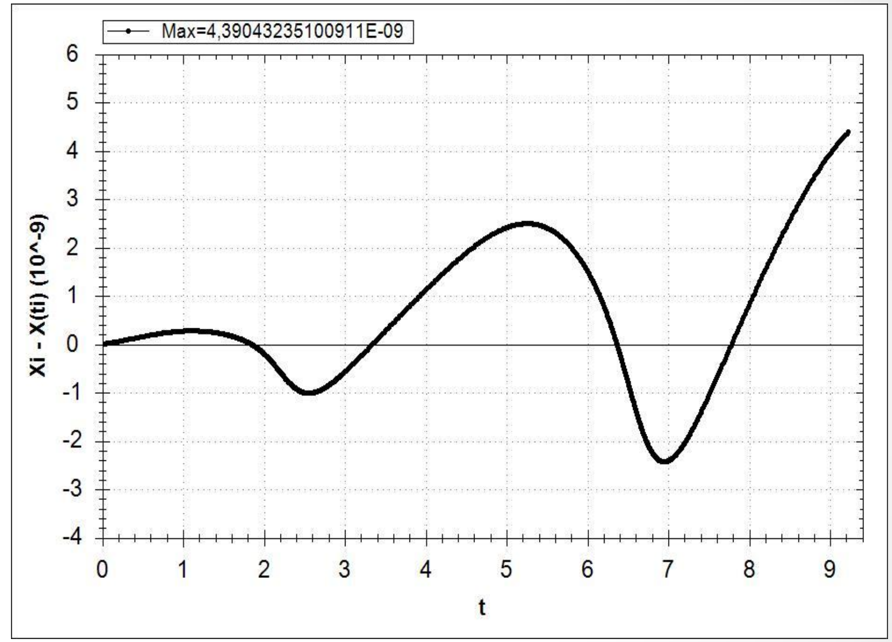
$$f = \mathrm{r}^2 = x^2 + y^2$$

$$\overline{H} = f(H - H(0))$$

Адаптивный шаг позволил сократить время работы программы для подобной задачи примерно в несколько раз.

Погрешности методов с адаптивным и постоянным шагом





Из графиков хорошо видно, что метод с адаптивным шагом имеет максимальную погрешность на порядок меньше метода с постоянным шагом. Тем не менее, в методе с адаптивным шагом погрешности распределены более равномерно по всей оси времени.

Результаты

Предложен и исследован симметрично-симплектический метод Рунге-Кутты с выбором свободного параметра минимизируещего дисбаланс полной энергии.

Предложен и исследован метод с адаптивным шагом позволяющий сократить расчетное время.

Установлено, что полученные методы имеет по точности превосходят методы четвертого порядка.

Созданы компьютерные программы для получения точного решения задачи Кеплера на произвольной сетке, а также для реализации вычислительных алгоритмов решения задачи симметрично-симплектическими методами Рунге-Кутты.

Спасибо
за внимание!