Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Черный Константин Николаевич

# Моделирование коронарного кровообращения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**
д.ф-м.н., профессор
С.И. Мухин

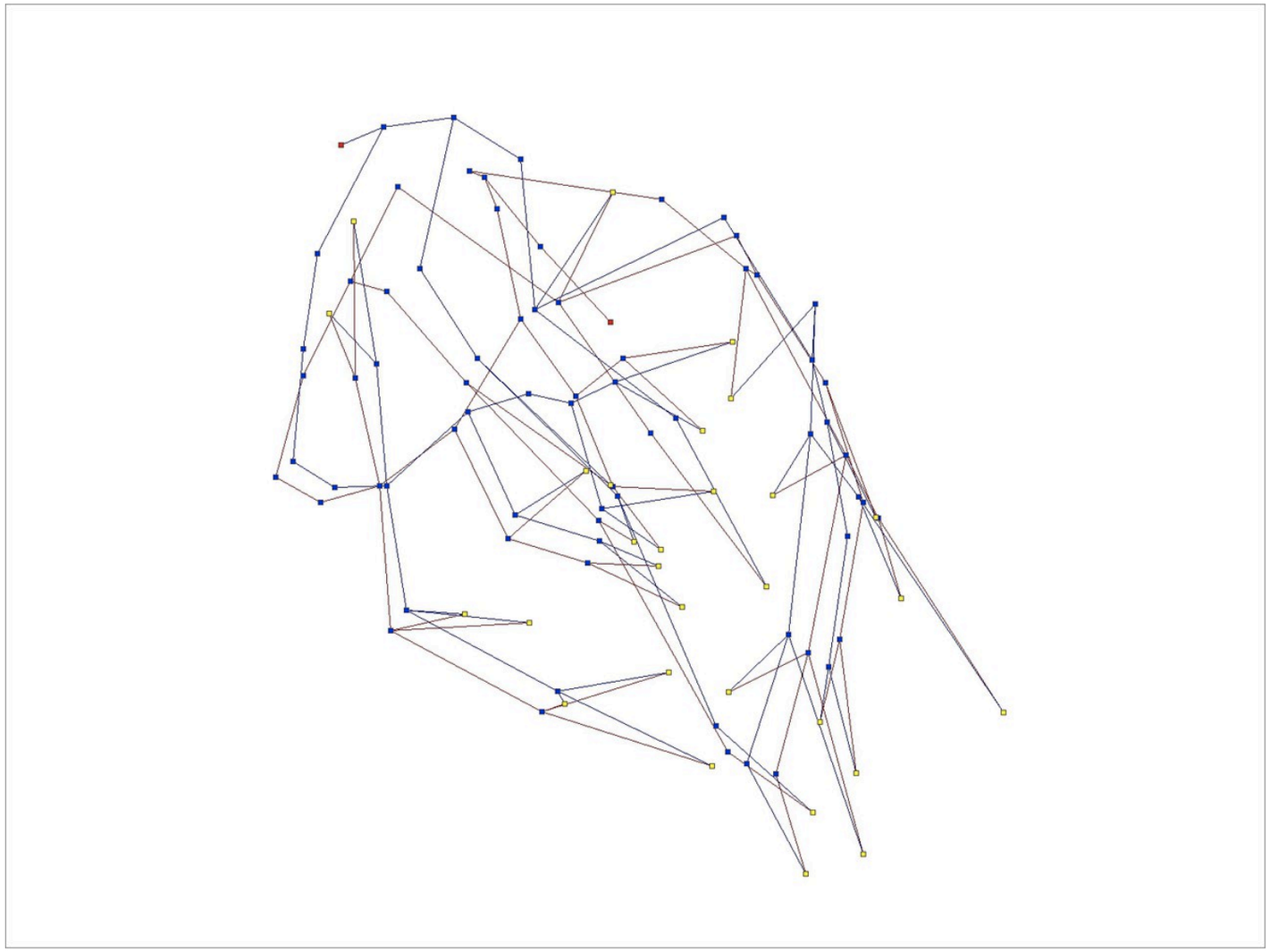
Москва, 2017

# Цель работы:

Моделирование течения крови в системе коронарных сосудов сердца, моделирование влияния положения клапана сердца на коронарное кровообращение, модификация уравнения состояния для учета изменения сечения сосудов при работе сердца, написание и отладка программы с последующим интегрированием в вычислительный комплекс.

# Постановка задачи:

Рассматривается граф для системы коронарных сосудов сердца. Узлам графа соответствуют участки ветвления, мышечной ткани и сердце, ребрам- артерии и вены.
Предполагается полное перекрытие клапаном сердца коронарного кровотока во время систолы (сокращения) желудочков сердца. В зависимости от фазы сердечного цикла изменяется сечение сосудов:в систолу уменьшается, в диастолу увеличивается.



# Математическая постановка задачи:

На каждом сосуде решается система уравнений гемодинамики в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{q_f}{\rho} \\ S = S(p) \end{cases}$$

$S$- площадь поперечного сечения сосуда $u(x,t)$-скорость движения крови вдоль сосуда $p(x,t)$-давление крови в кровеносном сосуде $q_f$- объемная плотность внешних сил

$x$- пространственная координата, в качестве которой выбрана длина дуги, проходящей через центры круговых поперечных сечений сосуда

$\rho$- плотность крови (const, жидкость считается несжимаемой)

# Разностная схема:

В каждом внутреннем узле пространственной сетки уравнения гемодинамики аппроксимируются следующими разностными уравнениями с весами:

$$\begin{cases} s_t + (su)_{\overset{0}{x}}^{(\sigma_1)} = (a_s u_{\bar{x}})_x^{(\sigma_1)} \\ u_t + \frac{1}{2}(u^2)_{\overset{0}{x}}^{(\sigma_2)} + \frac{1}{\rho}(p)_{\overset{0}{x}}^{(\sigma_3)} = (a_u u_{\bar{x}})_x^{(\sigma_2)} \\ s = S(p) \end{cases}$$

Здесь $\sigma_i$ , i=1,2,3- весовые множители.

Для решения системы уравнений используется метод Ньютона, в соответствии с которым $p^{k+1}=p^k+\delta p^k$, $u^{k+1}=u^k+\delta u^k$, $s^{k+1}=s(p^{k+1})$. k-номер итерации, приращения определяются из решения линеаризованных дискретных уравнений гемодинамики и условий их сопряжения в узлах графа.

# Описание клапана:

В вершине графа, соответствующей аортальному клапану, предполагаем выполнение равенства, выражающего закон сохранения массы:

$$z_i s_i u_i + z_j s_j u_j = 0$$

В зависимости от времени сердечного цикла, будет учитываться одно из следующих условий:

$z_i s_i u_i = 0$ -равенство нулю потока в систолу

$p_i = p_j$ -равенство давлений в диастолу

В линеаризованном виде данные выражения записсываются следующим образом:

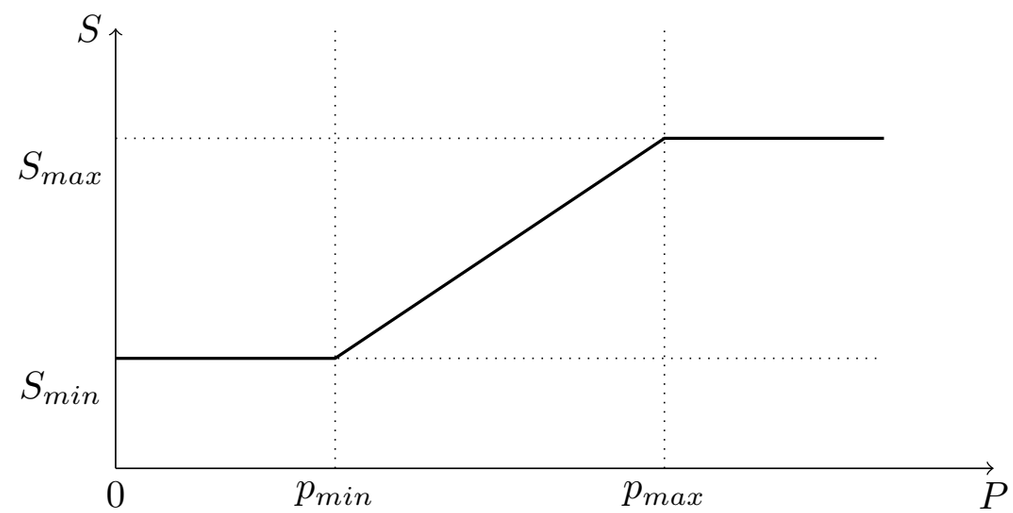
$$\begin{cases} \sum (z_k u_k \theta_k \delta p_k + s_k z_k \delta u_k) = -\sum z_k s_k u_k \\ (z_1 u_1 \theta_1 k_2 + k_1)\delta p_1 + z_1 s_1 k_2 \delta u_1 - k_1 \delta p_2 = k_1(p_1 - p_2) - k_2 z_1 s_1 u_1 \end{cases}, \quad \theta_k = \frac{\partial S_k}{\partial p}$$

где- $k_1 = 0,\ k_2 = 1$- во время систолы, $k_1 = 1,\ k_2 = 0$- во время диастолы.

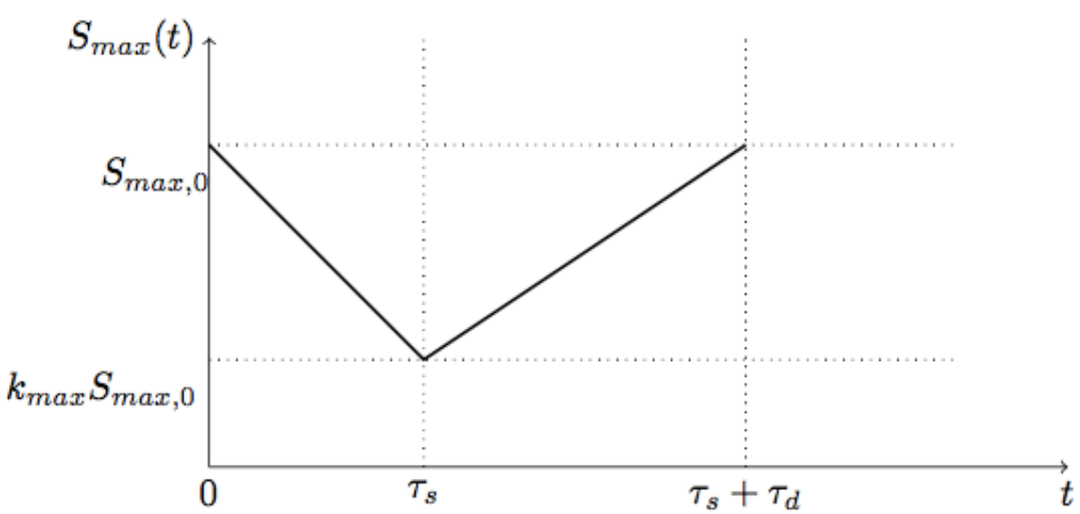
# Уравнение состояния для сечения:

$$S(p) = \begin{cases} S_{min} + \frac{S_{max} - S_{min}}{p_{max} - p_{min}}(p - p_{min}), & p_{min} < p < p_{max} \\ S_{min}, & p \leq p_{min} \\ S_{max}, & p_{max} \geq p \end{cases}$$

где $S_{min}$, $S_{max}$, $p_{min}$, $p_{max}$- параметры, заданные на каждом сосуде.



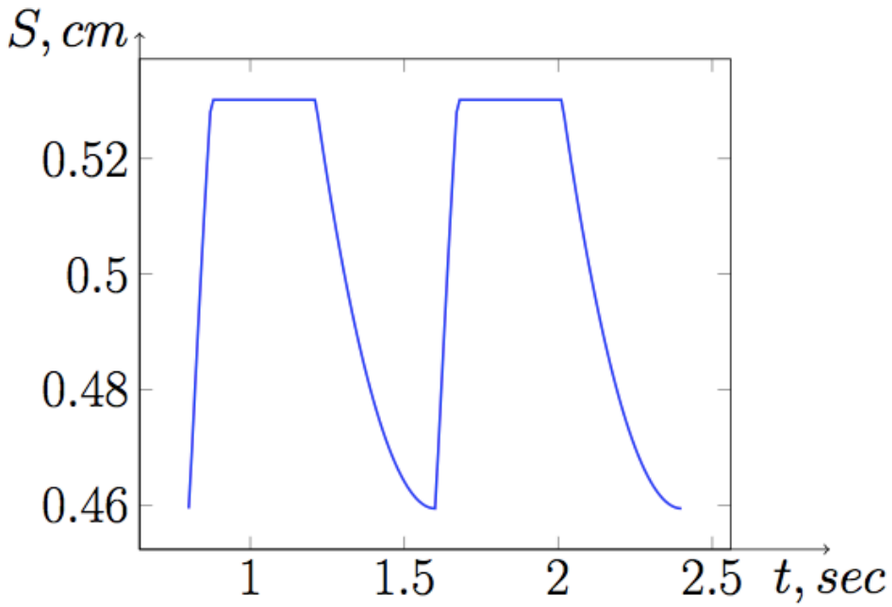

Значение *Smax* будет варьироваться в зависимости от времени сердечного цикла следующим образом:



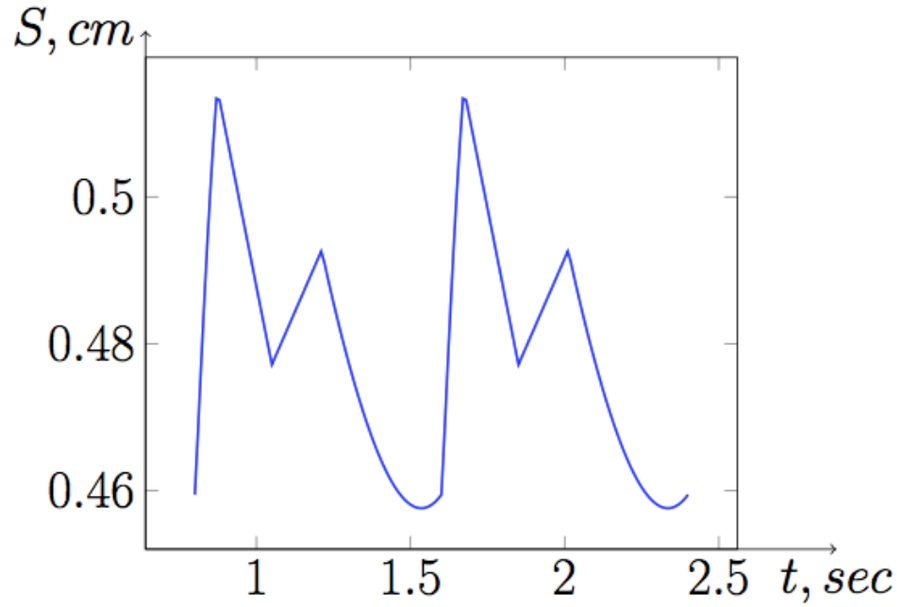

$$S_{max}(t) = \begin{cases} S_{max,0} - \frac{(1 - k_{max})S_{max,0}}{\tau_s}t, & 0 \leq t \leq \tau_s \\ k_{max}S_{max,0} + \frac{(1 - k_{max})S_{max,0}}{\tau_d}(t - \tau_s), & \tau_s < t \leq \tau_s + \tau_d \end{cases}$$

$\tau_s$-время систолы, $\tau_d$-время диастолы, $k_{max}$-коэффициент сужения сосуда

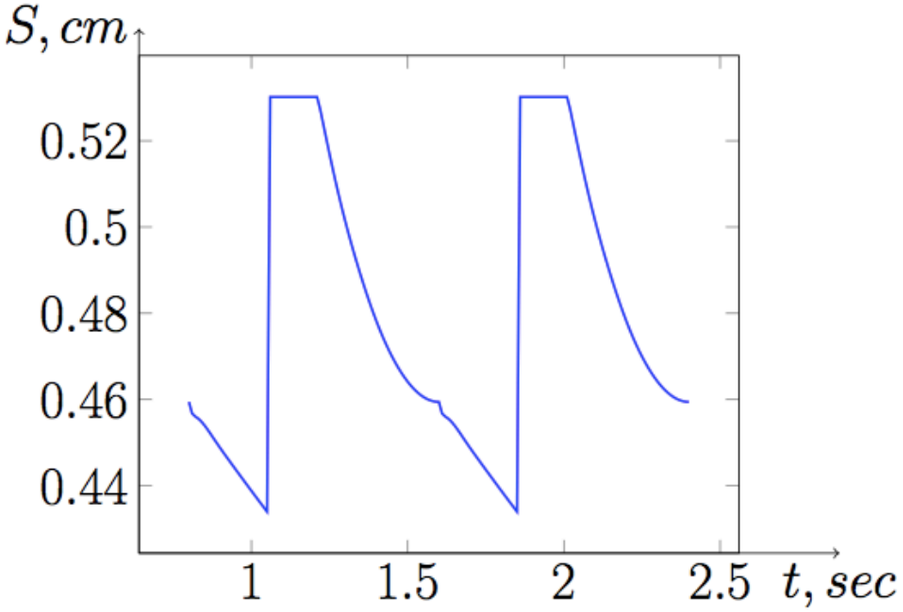
# Площадь сечения



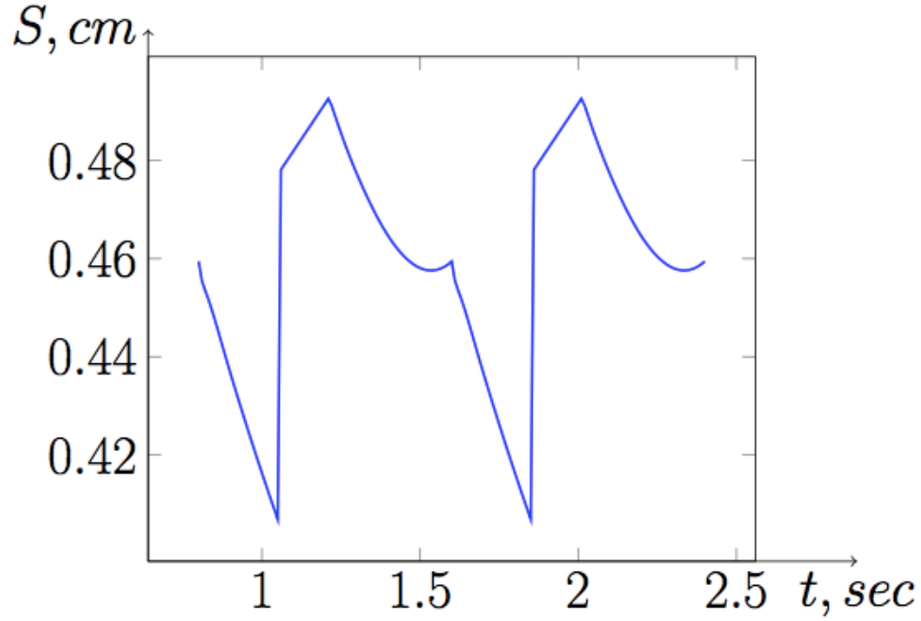

без аортального клапана, *Smax=Smax(n)*




без аортального клапана, *Smax=Smax(n,t)*

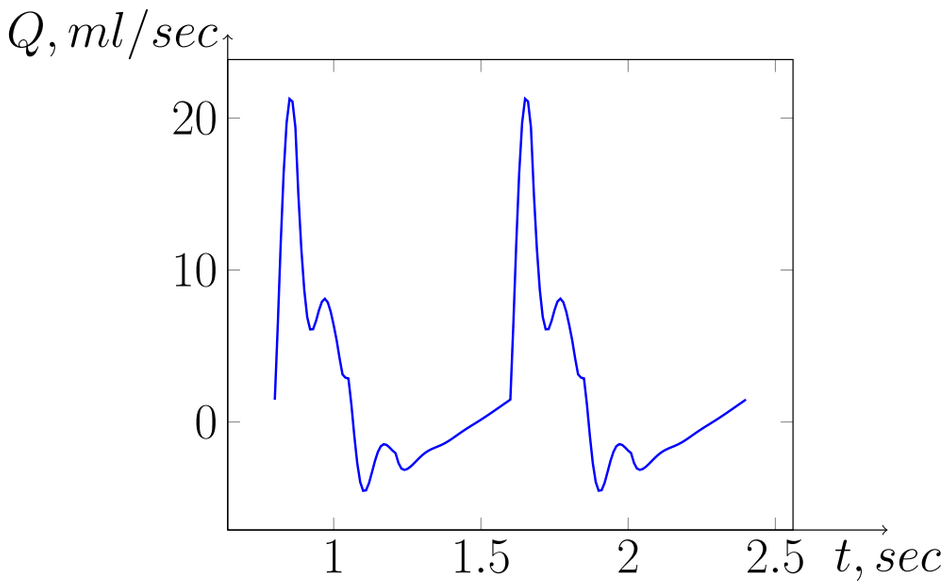



с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n)*



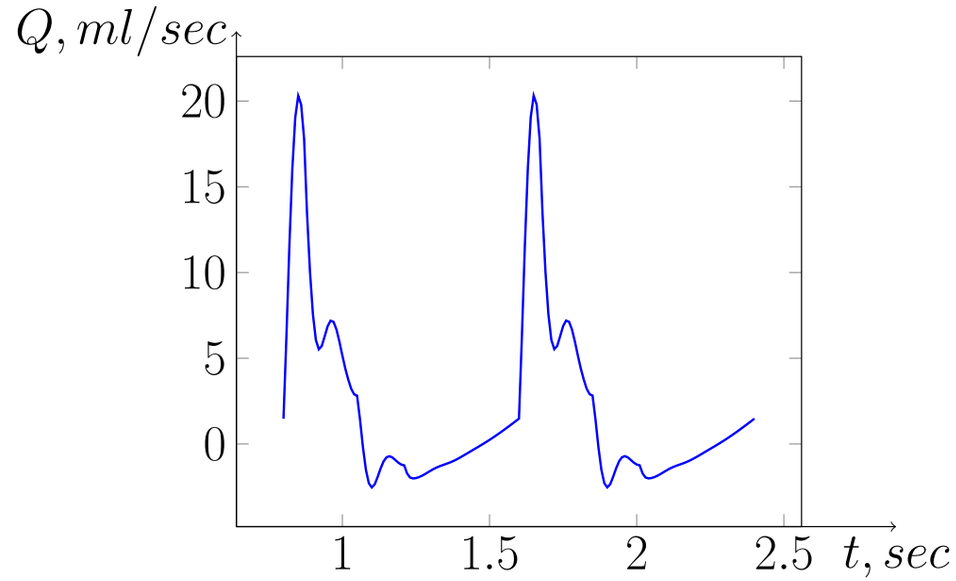

с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n,t)*

# Поток



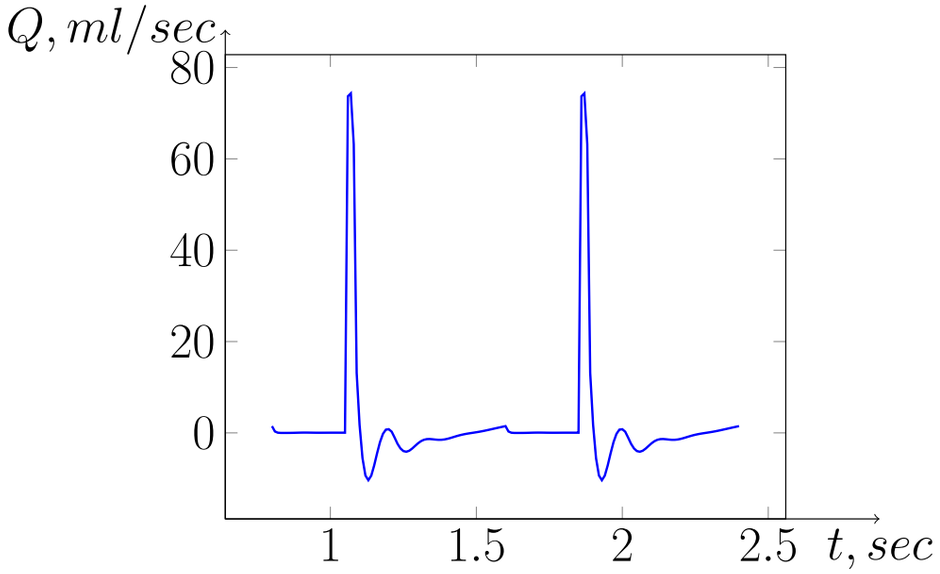

без аортального клапана, *Smax=Smax(n)*

$Q_{цикл}$=1,69 мл



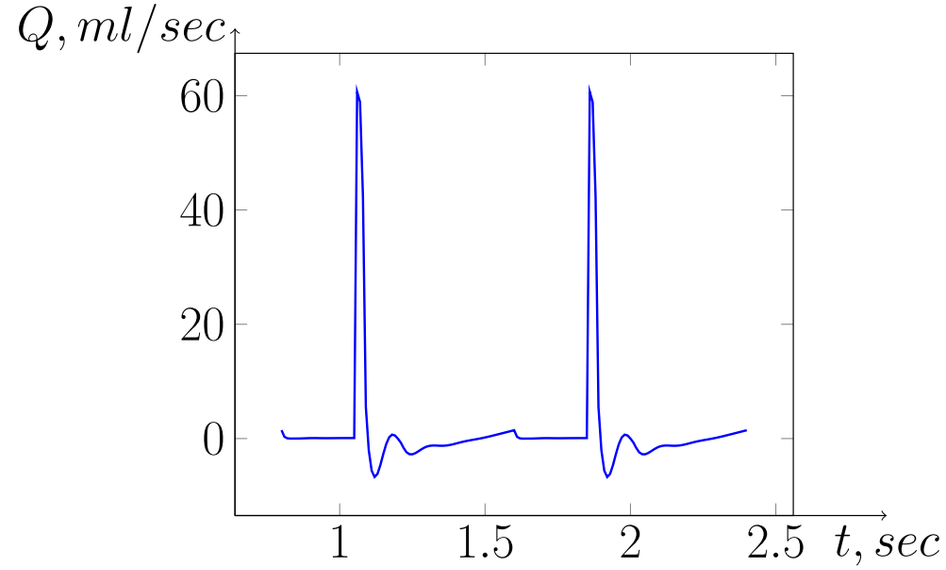

без аортального клапана, *Smax=Smax(n,t)*

$Q_{цикл}$=1,53 мл




с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n)*

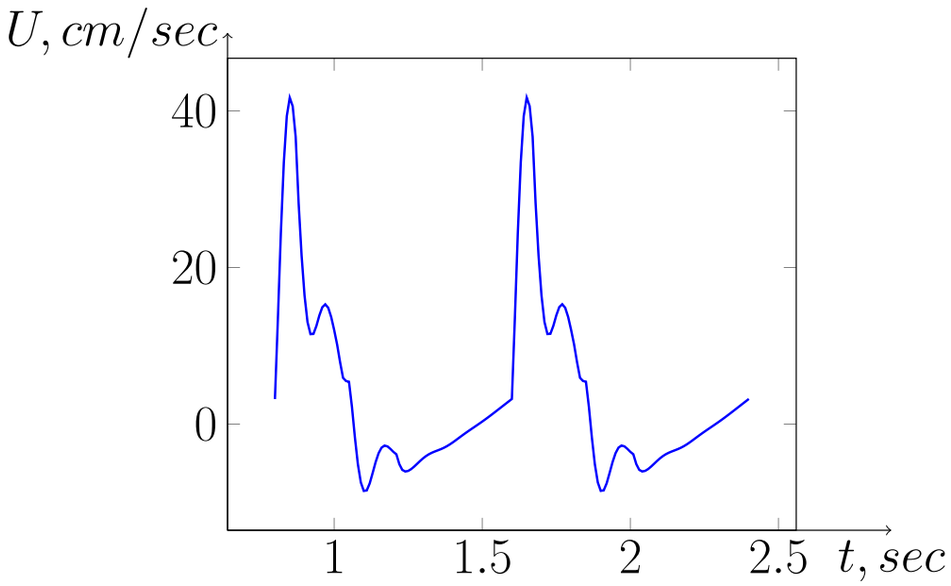
$Q_{цикл}$=1,42 мл



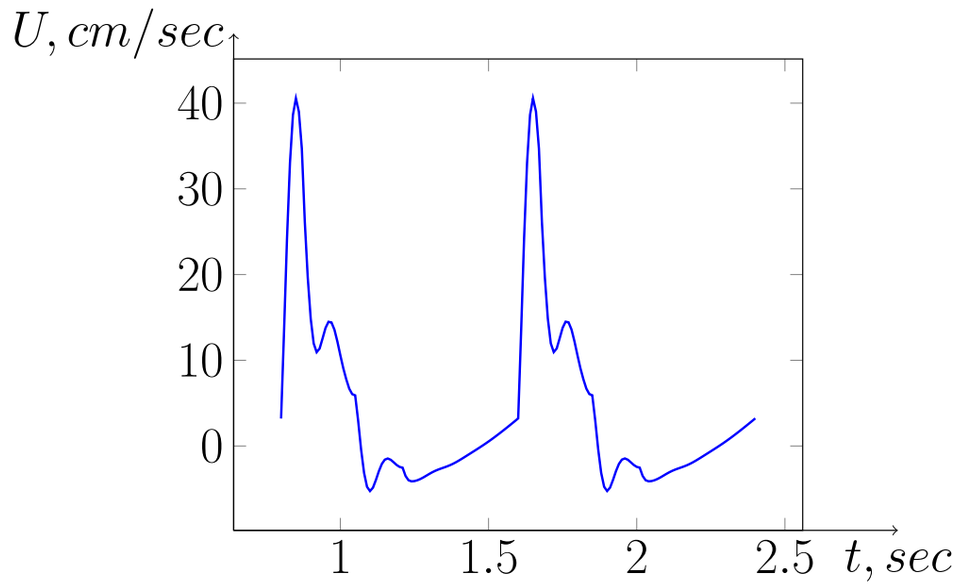

с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n,t)*

$Q_{цикл}$=1,15 мл

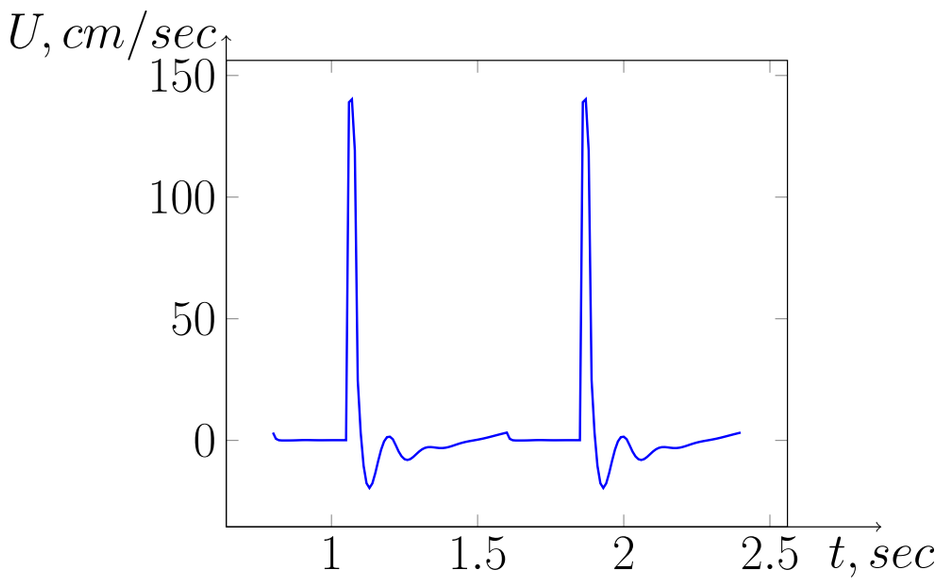
# Скорость



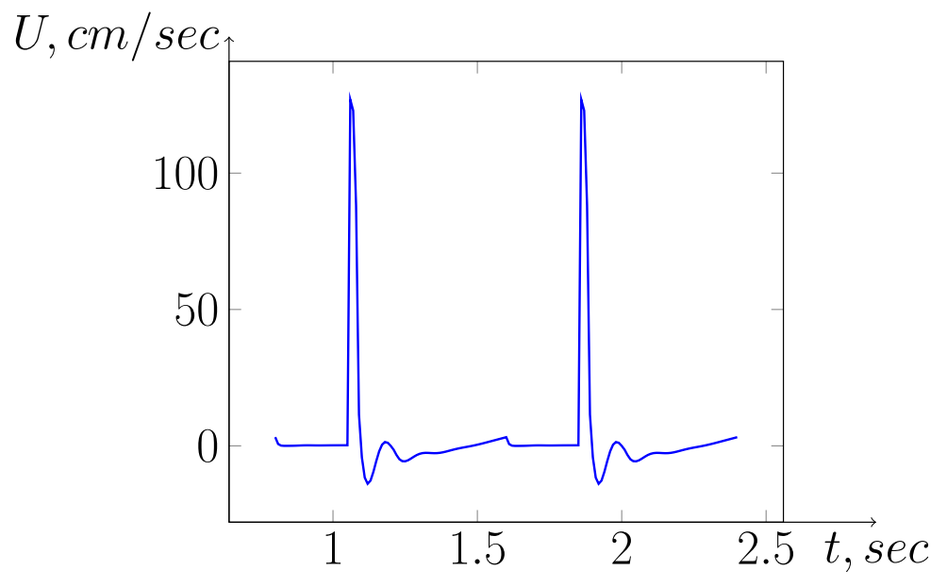

без аортального клапана, *Smax=Smax(n)*




без аортального клапана, *Smax=Smax(n,t)*




с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n)*




с аортальным клапаном, *Smax=Smax(n,t)*

# Заключение

Написанная и интегрированная в единый вычислительный комплекс программа корректирует результаты вычисления для потока, сечения и скорости в коронарной системе сосудов.

Полученные значения соответствуют физиологическим параметрам человека.

Построенные модели позволяют оценить влияние рассматриваемых факторов на коронарный кровоток.

Спасибо за внимание!