Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Хачатрян Карен Саркисович

Стохастический и детерминированный метод частиц для уравнения Бюргерса.

Научный руководитель

Д.ф-м.н профессор

Богомолов С.В

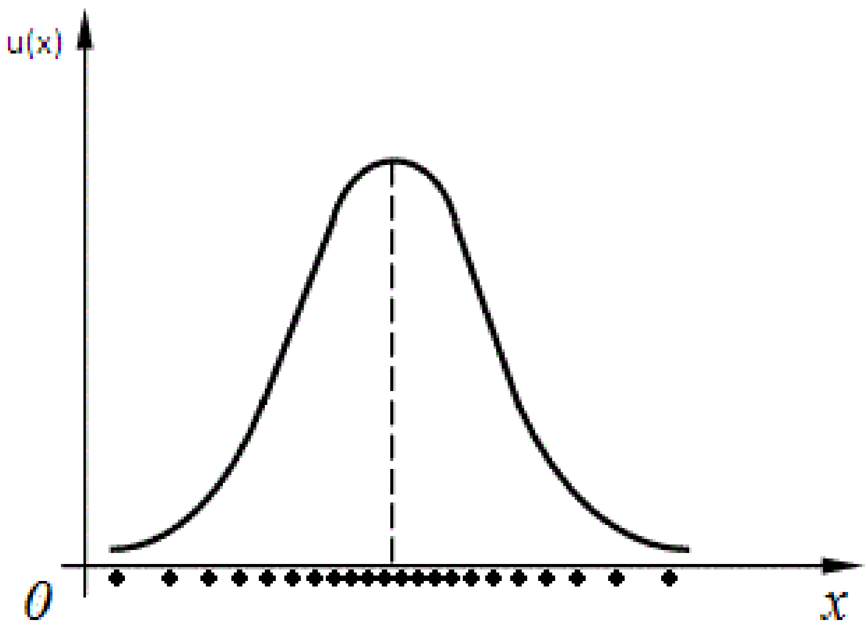
Москва,2016

Цель работы:

- Совместить положительные стороны стохастического метода “Монте-Карло” и детерминированного метода частиц-частица для задачи Коши уравнения Бюргерса. Так как это уравнение в себе содержит и член отвечающий за перенос и за диффузию.

- Проверить применимость к уравнению диффузии популярных сейчас многоуровневых методов “Монте-Карло”.

Стохастический метод частиц:



$$u(x) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x - x_i)$$

$$\int \mathrm{u(x)\varphi(x)dx} \approx \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}\varphi(\mathrm{x_i})$$

Дельта-функцию аппроксимируем как материальные точки с массой 1/N.

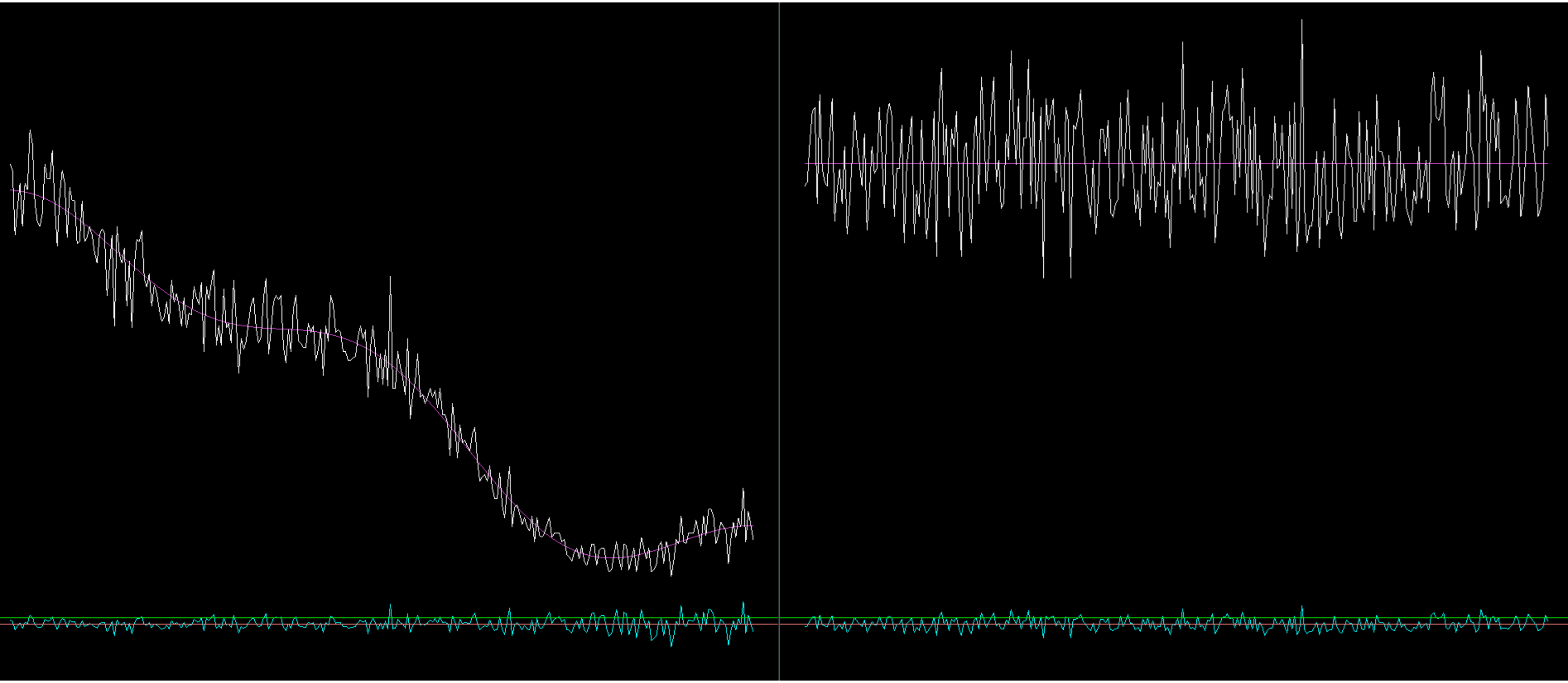
Многоуровневый метод Монте Карло.

Существуют разные интерпретации этого метода для уравнения диффузии ,а именно :

- Представление функции как сумма из детерминированной функции с небольшими градиентом и стохастической части.
- На каждом шаге проводить коррелированные испытания. После восстановления плотности, создавать заново набор частиц.

Результат.

- Оба метода оказались не применимы так как точность повышается не больше чем на 5%.



Результаты первого алгоритма.

Уравнение Бюргерса.

Макро представление:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

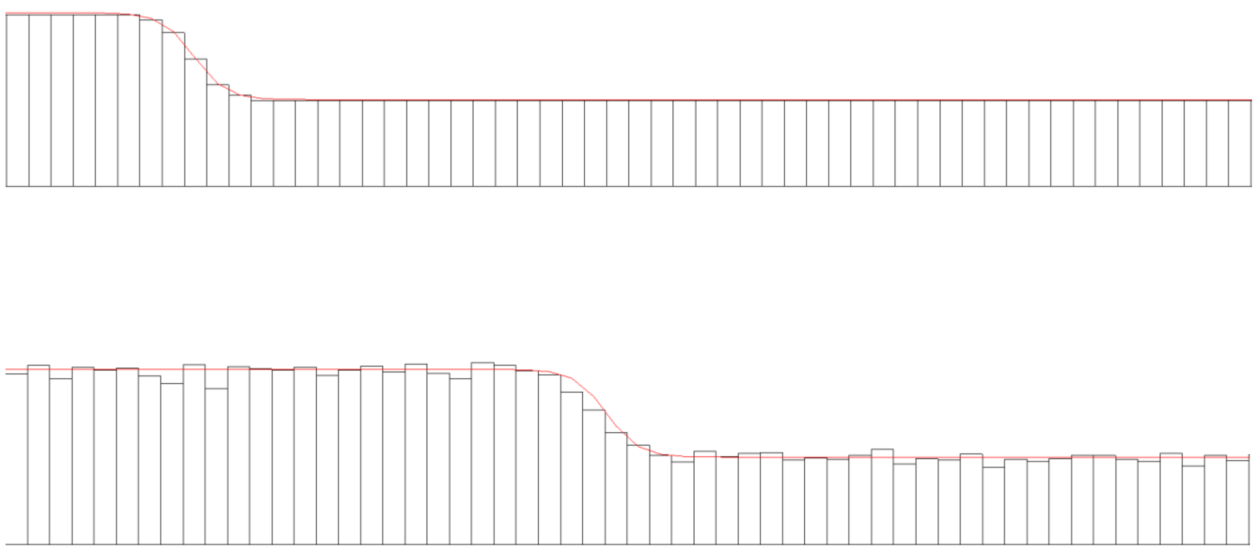
Микро представление :

$$\begin{cases} dx_i(t) = u(x_i)dt + \sigma dW_i, i = 1..N \\ x_i(0) = x_i^0 \end{cases}$$

Решение без использования детерминированного метода.

- Аппроксимируем начальное условие вводя набор стохастических частиц.
- Изменяем положение этих частиц по микро представлению уравнения.
- Восстанавливаем плотность по фиксированным окнам.

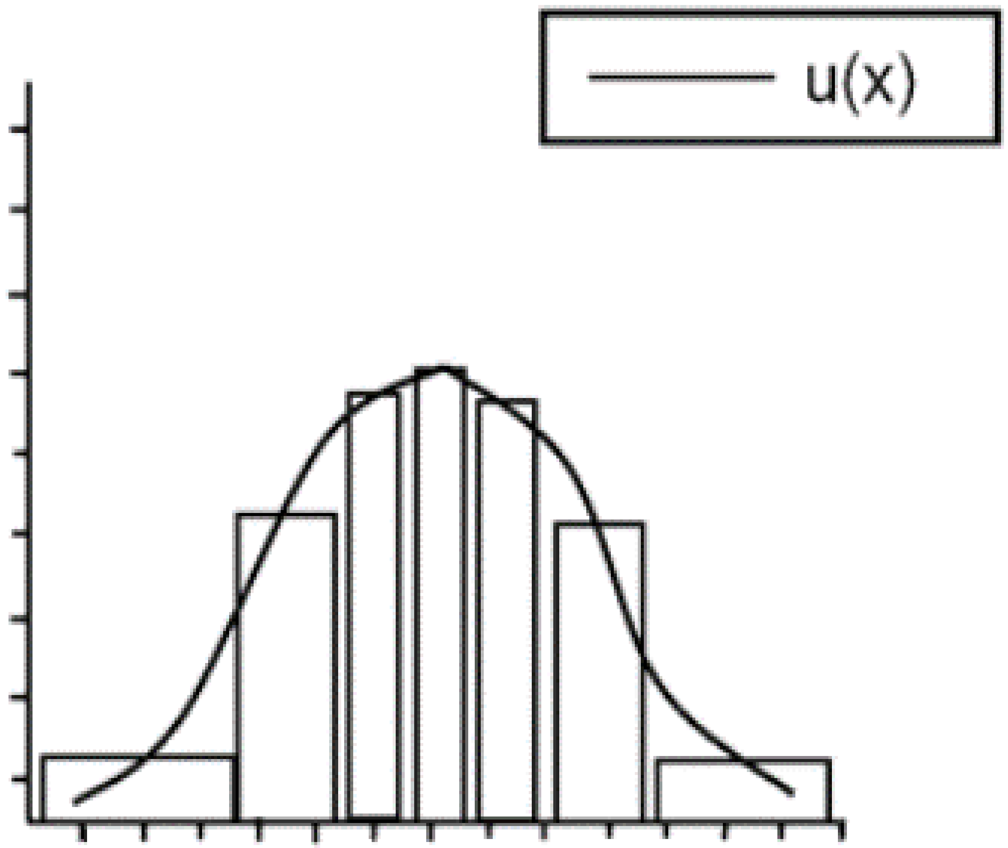
Пример решения.



На первом рисунке в момент t = 0, на втором t = 0.87.
В среднем в ячейке 50 частиц, $\Delta t = 0.01, \alpha = 0.025, h = 0.07$.

Как видно метод хорошо решает задачу с маленькой погрешностью. Среднеквадратичное отклонение относительной погрешности 3% ,и фронт ступеньки не размывается сильнее точного решения.

Детерминированный метод частиц.

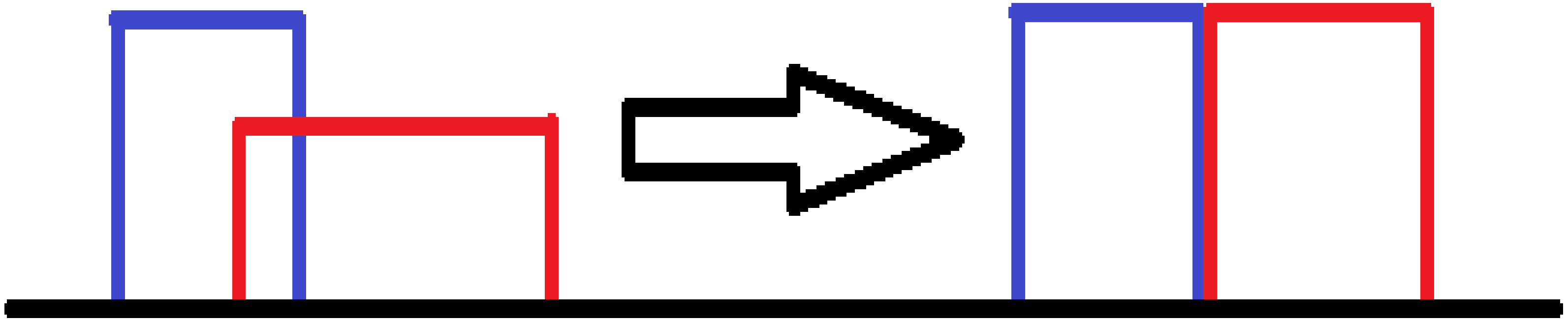


$$u(x) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x - x_i)$$

$$\delta(x - x_i) \approx \prod_i (x - x_i)$$

$$\int u(x)\varphi(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i)$$

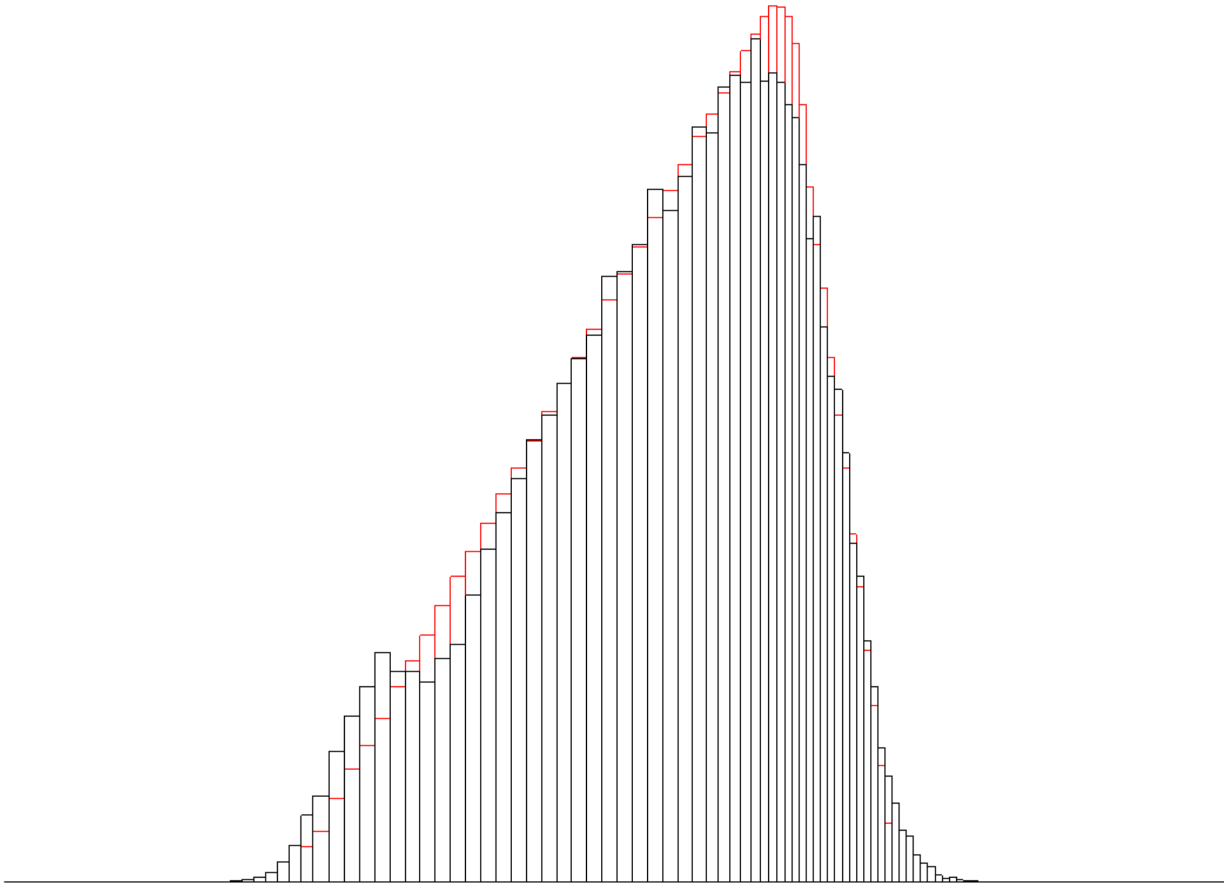
Перестройка.



Решение с использованием детерминированного метода.

- Аппроксимируем начальное условие вводя набор стохастических частиц.
- Изменяем положение этих частиц по микро представлению уравнения.
- Для выбора окон, используемых при восстановлении плотности ,параллельно моделируем уравнение Хопфа методом частиц ,и ширину частиц берем как окна для стохастического метода. Меняем высоты детерминированных частиц.

Пример решения.



Красные частицы это моделирование уравнения Хопфа для того же начального условия , $\Delta t = 0.0008,$ N=65000,h= 0,02.

Вывод.

- Был разработан метод совместивший положительный стороны двух методов, благодаря этому сетка стала сама подстраиваться под критические места решения, тем самым повышается точность вычисления при сохрани явности схемы.

Спасибо за внимание!