Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Вычислительных Методов

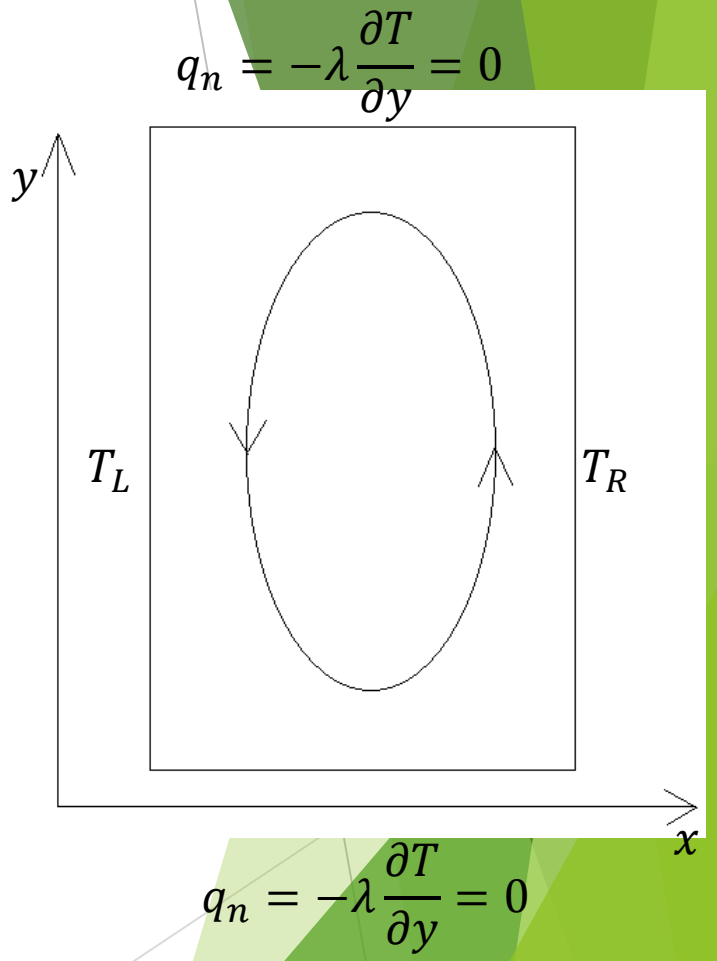
Численное моделирование термоконвекции в замкнутом объеме

Тлепсук Байзет Асхадович, гр.405

Науч. рук.: профессор, д.ф.-м.н. Головизнин Василий Михайлович

Цель дипломной работы

Расчет термоконвекции в квадратной каверне с боковым подогревом (задача Девиса) при числах Релея $\leq 10^6$.

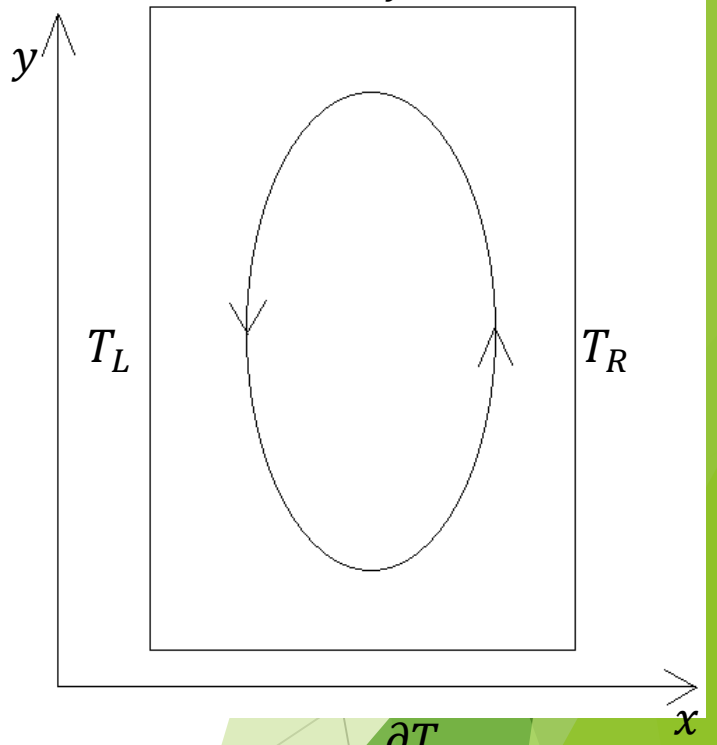


Температуры левой и правой вертикальных стенок постоянны и равны, соответственно, T_L и T_R .Верхняя и нижняя стенки, — теплоизолированы. Сила тяжести направлена вертикально вниз вдоль оси y. На левой, правой, верхней и нижней стенках все компоненты скорости жидкости (газа) обращаются в ноль (условие прилипания с условием проскальзывания).

Уравнения термоконвекции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho u v}{\partial y} = \mu \Delta u \\ \dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u v}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v + \rho g \beta (T - T_0) \\ C_p \left(\dfrac{\partial \rho T}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u T}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v T}{\partial y} \right) = \chi \Delta T \end{cases}$$

$$q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



$$q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Приближение слабой сжимаемости: $p = c^2(\rho - \rho_0)$

Вычисление инвариантов Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta v + g\beta(T - T_0) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\chi}{C_p\rho}\Delta T \end{cases}$$

Введем вектор $\vec{\varphi} = (\rho, u, v, T)^T$ и запишем для него характеристическое уравнение:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A_x\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} + A_y\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} = \vec{f}$$

Получим следующие инварианты Римана:

$$J_x = \left(u + c\,ln(\rho), u, u, u - c\,ln(\rho)\right)^T \quad J_y = \left(v + c\,ln(\rho), v, v, v - c\,ln(\rho)\right)^T$$

Разностная схема Кабаре

Первая фаза:

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{W}_C^{n+1/2} - W_C^n}{\tau/2} + \dfrac{(F^x)_R^n - (F^x)_L^n}{h_x} + \dfrac{(F^y)_T^n - (F^y)_B^n}{h_y} = 0 \\ \dfrac{W_C^{n+1/2} - \widetilde{W}_C^{n+1/2}}{\tau} = \tilde{Q}_C^{n+1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho T)^T \\ (F^x) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uT)^T \\ (F^y) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho vT)^T \\ Q = (0, \mu\Delta u, \mu\Delta v + \rho g\beta(T - T_0), \alpha\Delta T)^T \end{cases}$$

Третья фаза:

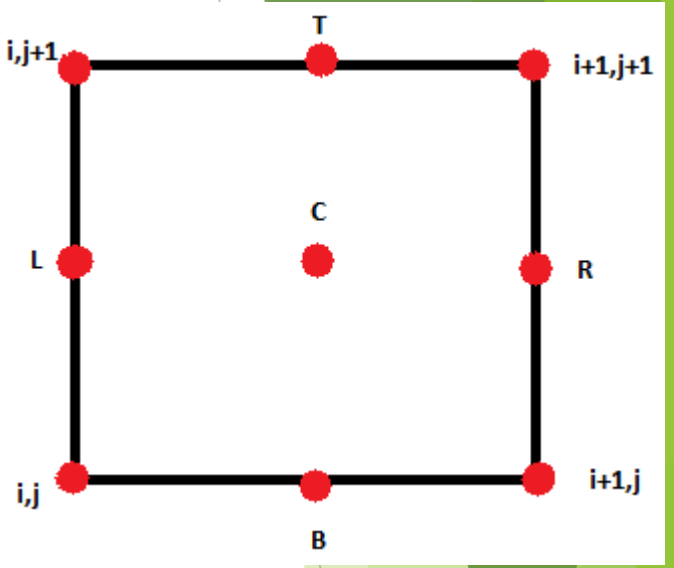
$$\frac{W_C^{n+1} - W_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(F^x)_R^{n+1} - (F^x)_L^{n+1}}{h_x} + \frac{(F^y)_T^{n+1} - (F^y)_B^{n+1}}{h_y} = 0$$

Первая и третья фазы аппроксимируют свои системы уравнения, обладающими первым порядком аппроксимации

Сумма первой и третьей фазы дают разностную схему, аппроксимирующую основную заданную систему уравнений данной задачи вторым порядком на гладких решениях:

$$\frac{W_C^{n+1} - W_C^n}{\tau} + \frac{\overline{(F^x)_R} - \overline{(F^x)_L}}{h_x} + \frac{\overline{(F^y)_T} - \overline{(F^y)_B}}{h_y} = \tilde{Q}_C^{n+1/2}$$

Вычислительный шаблон пространственной ячейки:



Здесь консервативная переменная **C**enter относится к центру ячейки, потоковые переменные **T**op, **B**ottom, **R**ight, **L**eft – к центрам граней ячейки.

Вычисление инвариантов Римана на новом временном слое

$$\begin{cases} R = u + c\ln(\rho) \\ Q = u - c\ln(\rho) \\ S = v \\ K = T \end{cases} \quad \begin{cases} R = v + c\ln(\rho) \\ Q = v - c\ln(\rho) \\ S = u \\ K = T \end{cases}$$

Вторая фаза:

$$\begin{cases} \tilde{R}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2R^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - R^{n}_{i-1,j+1/2} \\ \tilde{Q}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2Q^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} - Q^{n}_{i+1,j+1/2} \\ \tilde{S}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2S^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - S^{n}_{i-1,j+1/2} \text{ и } \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2K^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - K^{n}_{i-1,j+1/2}, \text{если } u^{n+1}_{i,j+1/2} > 0 \\ \tilde{S}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2S^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} - S^{n}_{i+1,j+1/2} \text{ и } \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2} = 2K^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} - K^{n}_{i+1,j+1/2}, \text{если } u^{n+1}_{i,j+1/2} < 0 \end{cases}$$

$$K^{n+1}_{i,j+1/2} = \begin{cases} \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2}, \text{если } min < \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2} < max \\ max, \text{ если } \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2} > max \\ min, \text{ если } \tilde{K}^{n+1}_{i,j+1/2} < min \end{cases}$$

Для инвариантов, которые пришли слева

где $\begin{cases} max = max\left(\varphi^{n}_{i-1,j+1/2}, \varphi^{n}_{i-1/2,j+1/2}, \varphi^{n}_{i,j+1/2}\right) + \tau(g_x)^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} \\ min = min\left(\varphi^{n}_{i-1,j+1/2}, \varphi^{n}_{i-1/2,j+1/2}, \varphi^{n}_{i,j+1/2}\right) + \tau(g_x)^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} \end{cases}$

Для инвариантов, которые пришли справа

где $\begin{cases} max = max\left(\varphi^{n}_{i,j+1/2}, \varphi^{n}_{i+1/2,j+1/2}, \varphi^{n}_{i+1,j+1/2}\right) + \tau(g_x)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} \\ min = min\left(\varphi^{n}_{i,j+1/2}, \varphi^{n}_{i+1/2,j+1/2}, \varphi^{n}_{i+1,j+1/2}\right) + \tau(g_x)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} \end{cases}$

Условие устойчивости: $\tau = \dfrac{CFL}{max_{i,j}\left(\frac{c+\left|u^{n}_{i+1/2,j+1/2}\right|}{h_x}, \frac{c+\left|v^{n}_{i+1/2,j+1/2}\right|}{h_y}\right)}$

Верификационные расчеты. Возмущение в виде Гауссиана в профиле давления

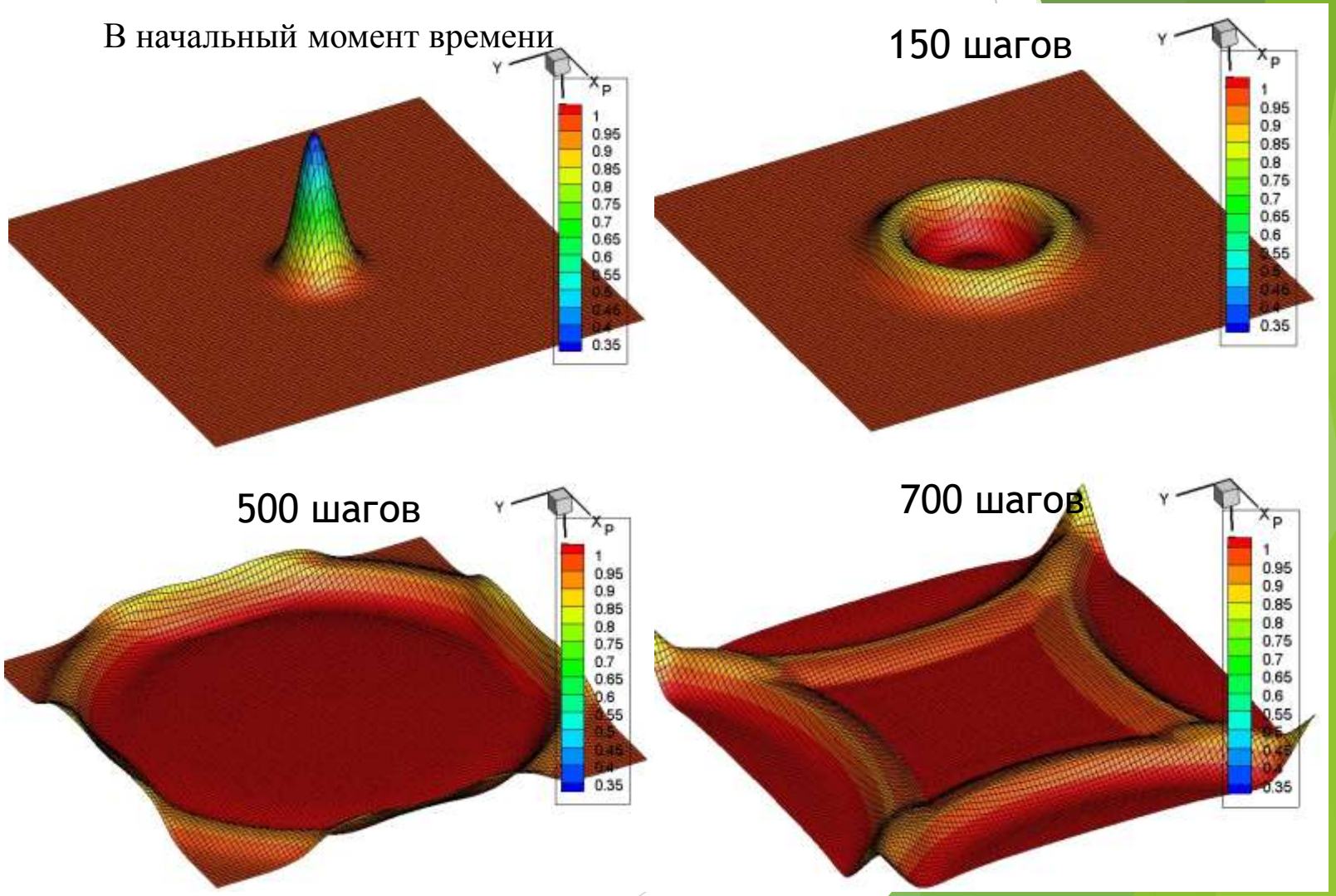
Начальные данные:

$$\begin{cases} r(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{r_c} \\ p(x,y) = 1 - \dfrac{\varepsilon \exp\left(2\alpha(1 - r^2(x,y))\right)}{4\alpha} \\ u(x,y) = 0 \\ u(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon = 0.7;\ \alpha = 0.408;\ r_c = 0.1$

На границах задано условие жесткой стенки $(\vec{u}, \vec{n}) = 0$

Размер сетки (50, 50)



Верификационные расчеты. Изолированный вихрь

Начальные данные:

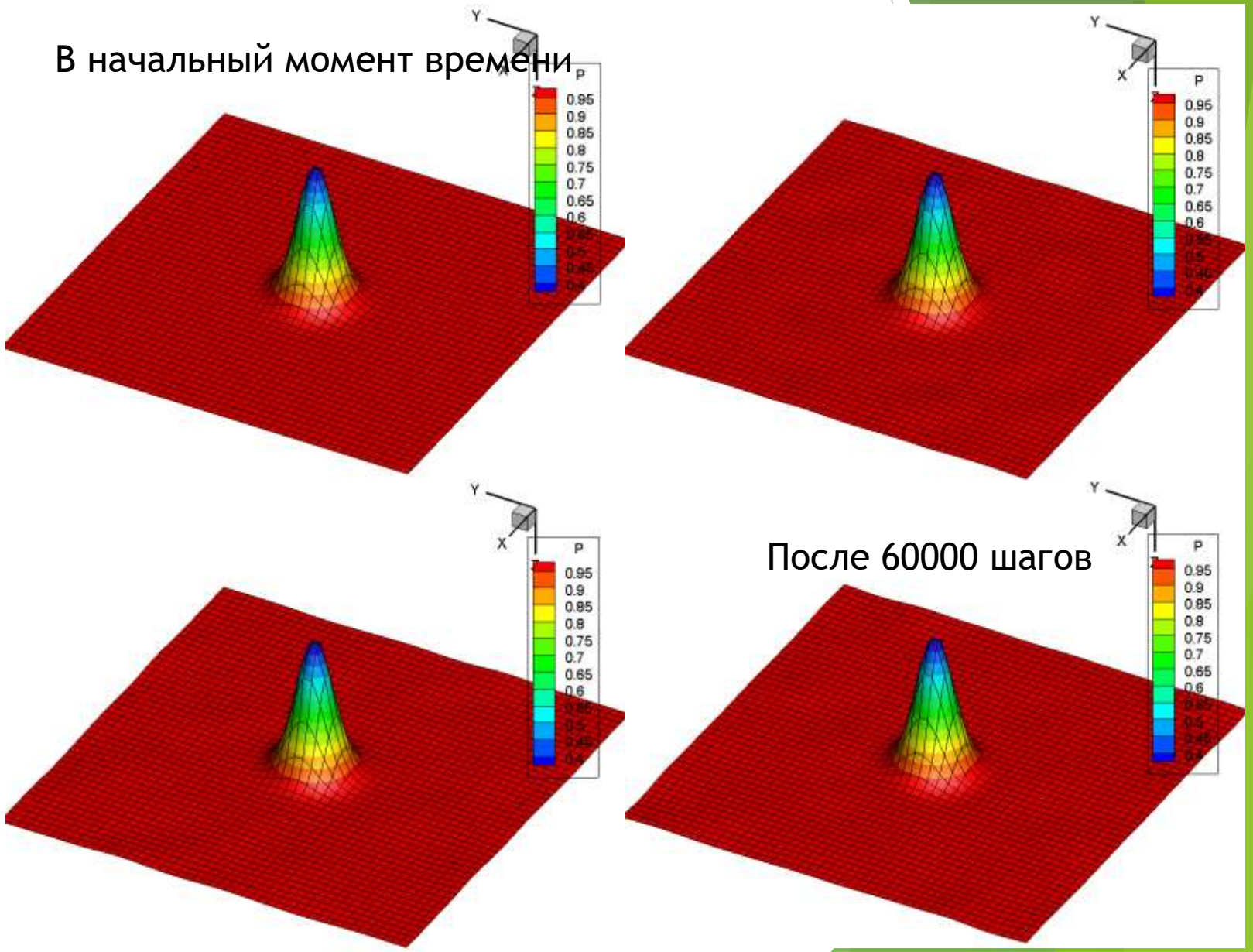
$$\begin{cases} r(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{r_c} \\ p(x,y) = 1 - \dfrac{\varepsilon \exp\left(2\alpha(1-r^2(x,y))\right)}{4\alpha} \\ u(x,y) = \dfrac{\varepsilon \exp(2\alpha(1-r^2(x,y)))(y-y_0)}{r_c} \\ u(x,y) = \dfrac{\varepsilon \exp(2\alpha(1-r^2(x,y)))(x-x_0)}{r_c} \end{cases}$$

$\varepsilon = 0.7;\ \alpha = 0.408;\ r_c = 0.1$

Вязкость отсутствует.

Размер сетки (50, 50)

В начальный момент времени



После 60000 шагов

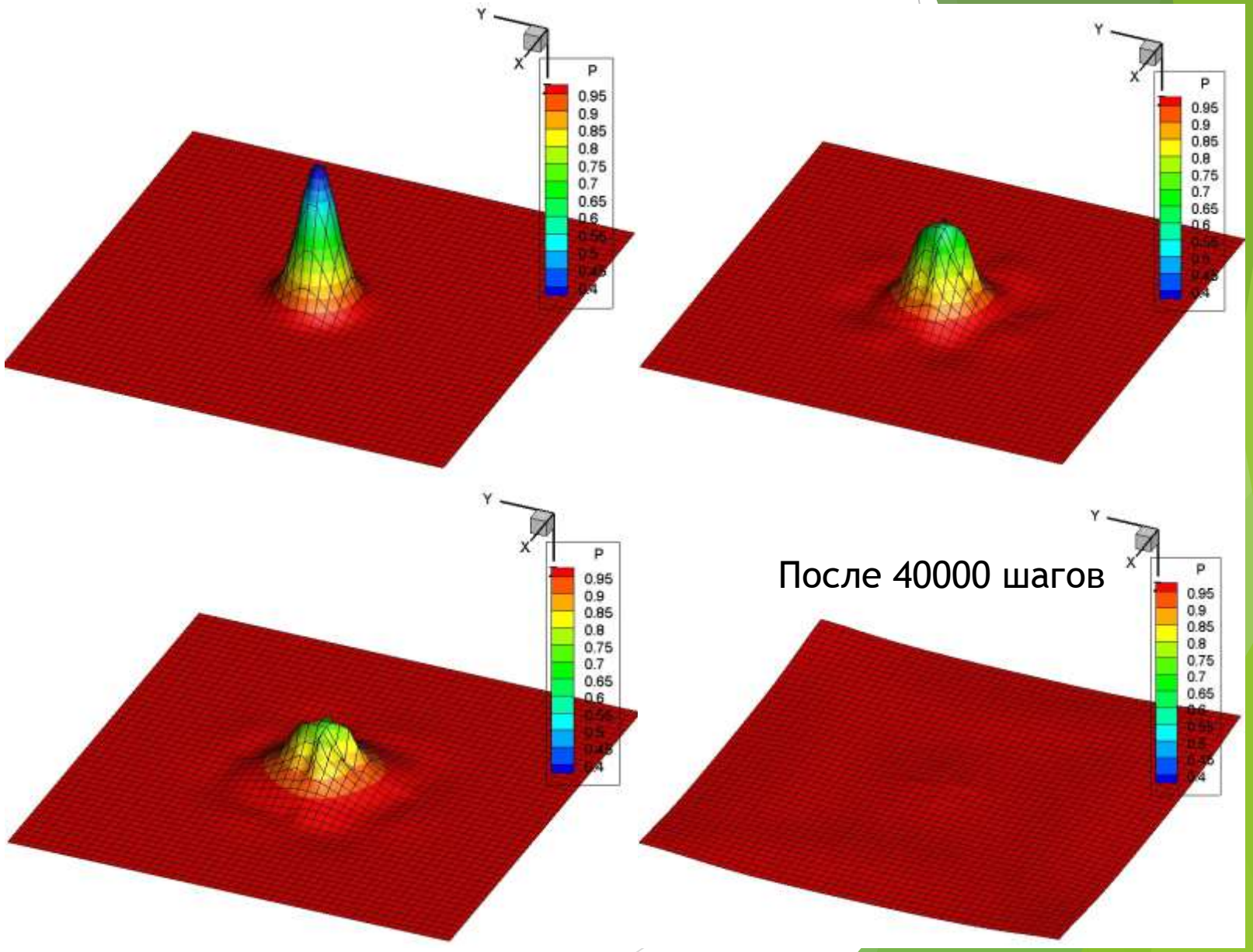
Верификационные расчеты. Изолированный вихрь с вязкостью

Начальные данные:

$$\begin{cases} r(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{r_c} \\ p(x,y) = 1 - \dfrac{\varepsilon \exp\big(2\alpha(1 - r^2(x,y))\big)}{4\alpha} \\ u(x,y) = \dfrac{\varepsilon \exp(2\alpha(1 - r^2(x,y)))(y - y_0)}{r_c} \\ u(x,y) = \dfrac{\varepsilon \exp(2\alpha(1 - r^2(x,y)))(x - x_0)}{r_c} \end{cases}$$

$\varepsilon = 0.7;\ \alpha = 0.408;\ r_c = 0.1$

Размер сетки (50, 50)

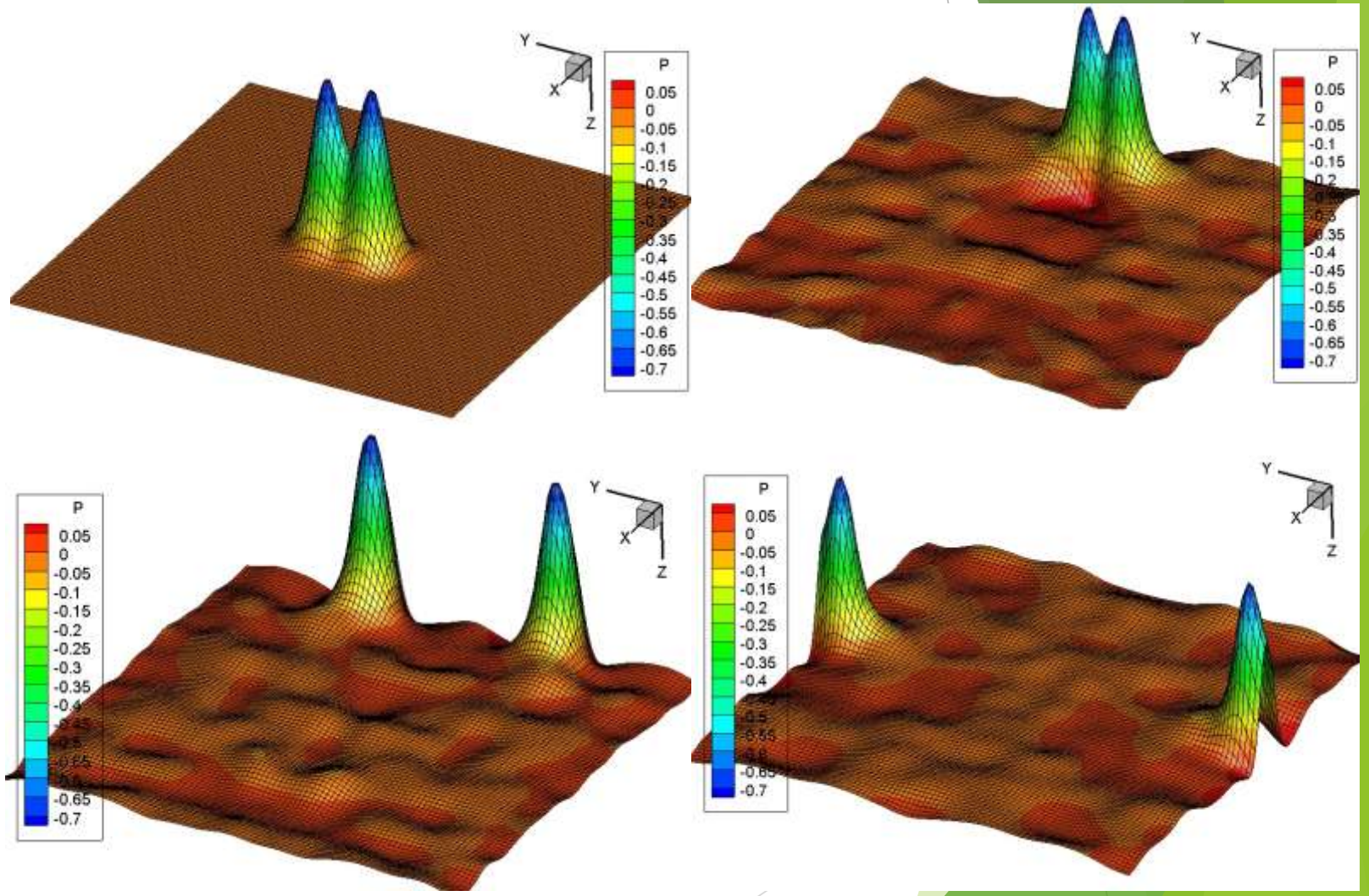


После 40000 шагов

Верификационные расчеты. Два вихря

Начальные данные:

$$
\begin{cases}
r_l(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0-q)^2}}{r_c} \\
r_r(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0+q)^2}}{r_c} \\
p(x,y) = -\alpha^2 \dfrac{exp\left(2\beta\left(1-r_l^2(x,y)\right)\right)}{4\beta} - \\
\alpha^2 \dfrac{exp\left(2\beta\left(1-r_r^2(x,y)\right)\right)}{4\beta} + p_0 \\
u(x,y) = \dfrac{\alpha}{r_c} exp\left(\beta\left(1-r_l^2(x,y)\right)\right)(y-y_0-q) \\
-\dfrac{\alpha}{r_c} exp\left(\beta\left(1-r_r^2(x,y)\right)\right)(y-y_0+q) \\
u(x,y) = -\dfrac{\alpha}{r_c} exp\left(\beta\left(1-r_l^2(x,y)\right)\right)(x-x_0) \\
+\dfrac{\alpha}{r_c} exp\left(\beta\left(1-r_l^2(x,y)\right)\right)(x-x_0)
\end{cases}
$$

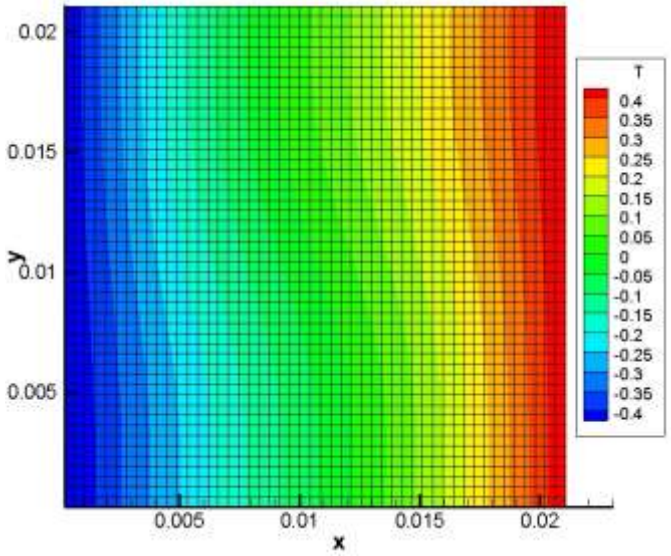


$q = 0.1;\ \alpha = 0.7;\ r_c = 0.07;\ \beta = 0.3; p_0 = 0$

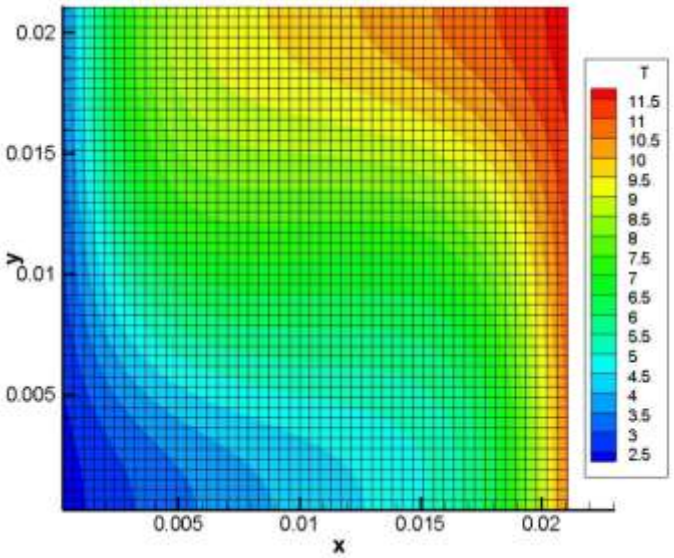
На границах задано условие жесткой стенки $(\vec{u}, \vec{n}) = 0$

Размер сетки (100, 100)

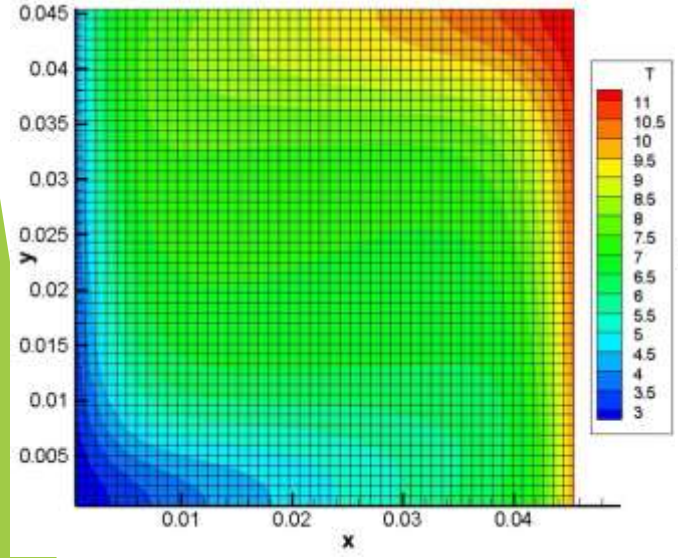
Задача Дэвиса



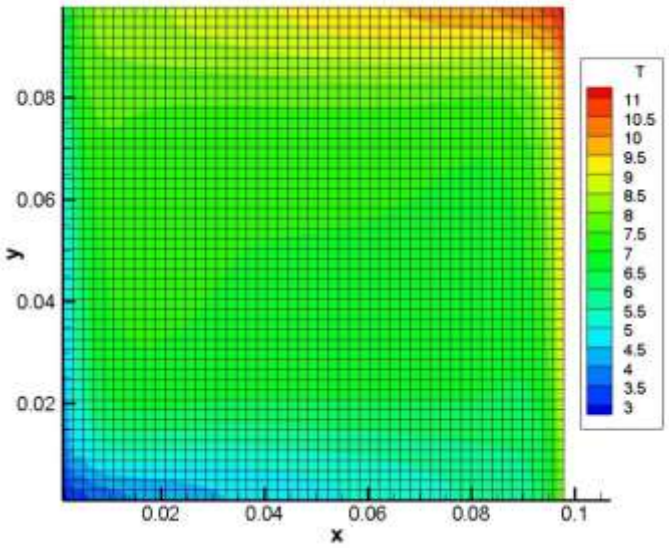
$Ra = 10^3$



$Ra = 10^4$



$Ra = 10^5$



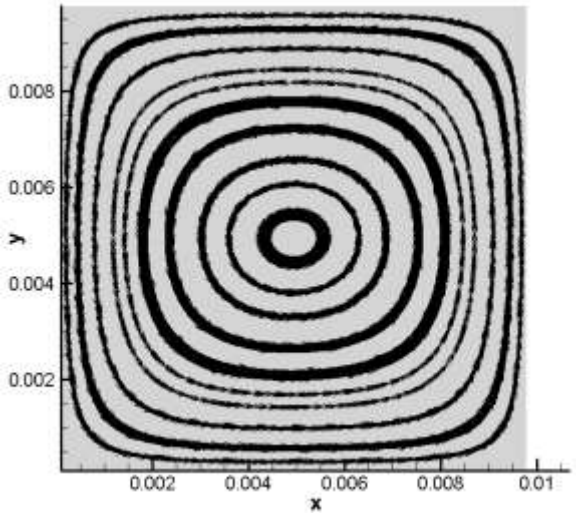
$Ra = 10^6$

На рисунках изображены профили температур

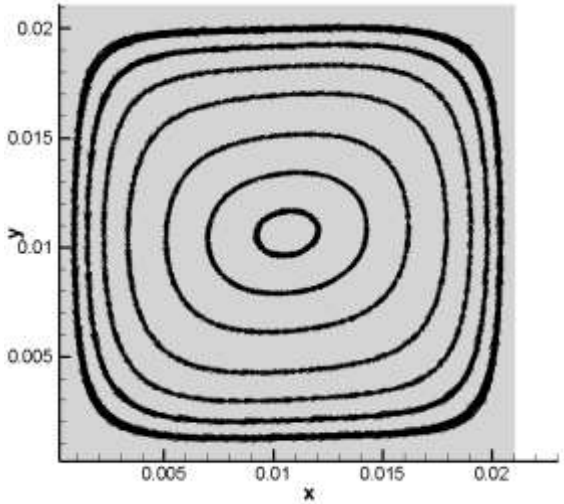
Размер сетки (50, 50)

Поля линий тока

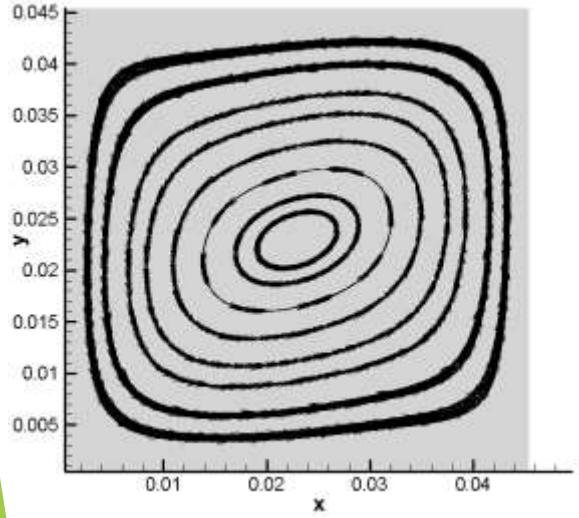
На рисунках изображены профили линий тока



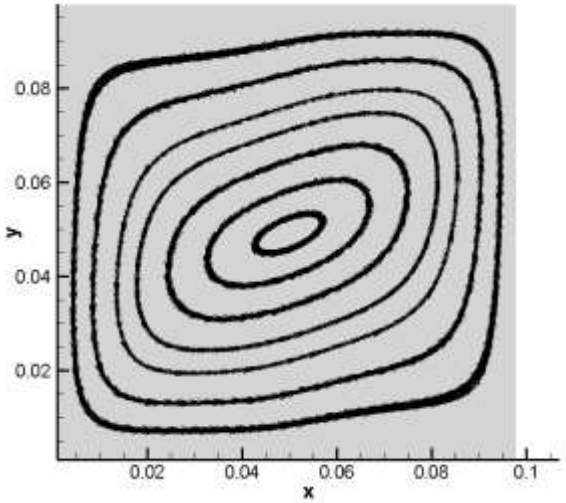
$Ra = 10^3$



$Ra = 10^4$

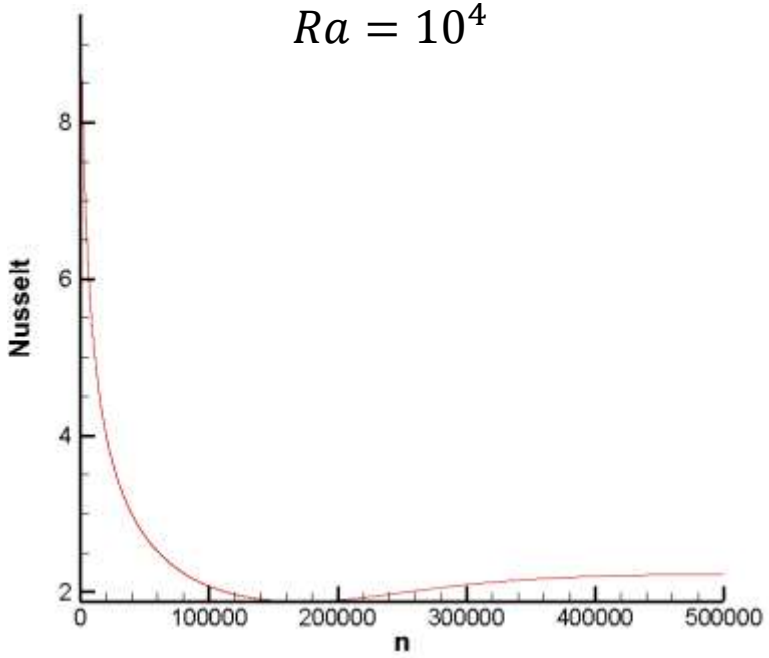


$Ra = 10^5$

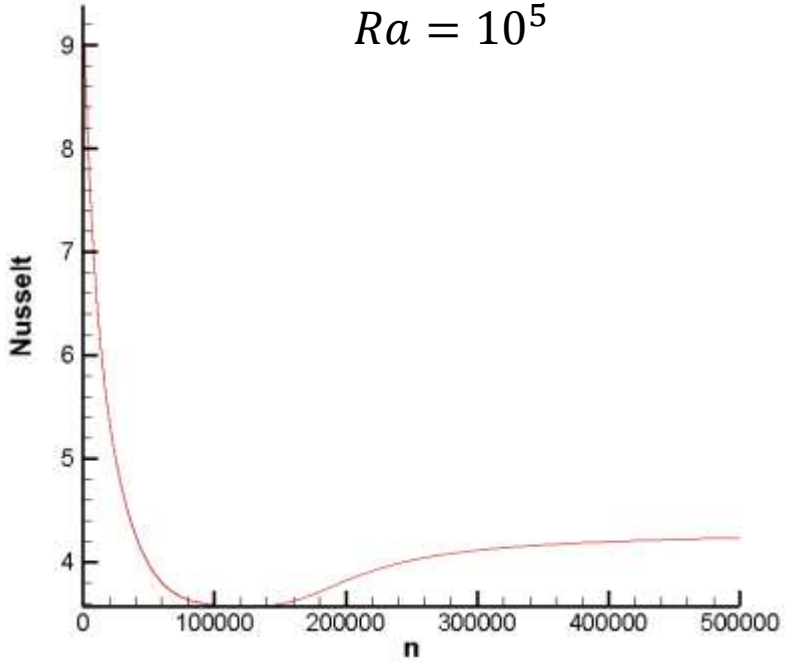


$Ra = 10^6$

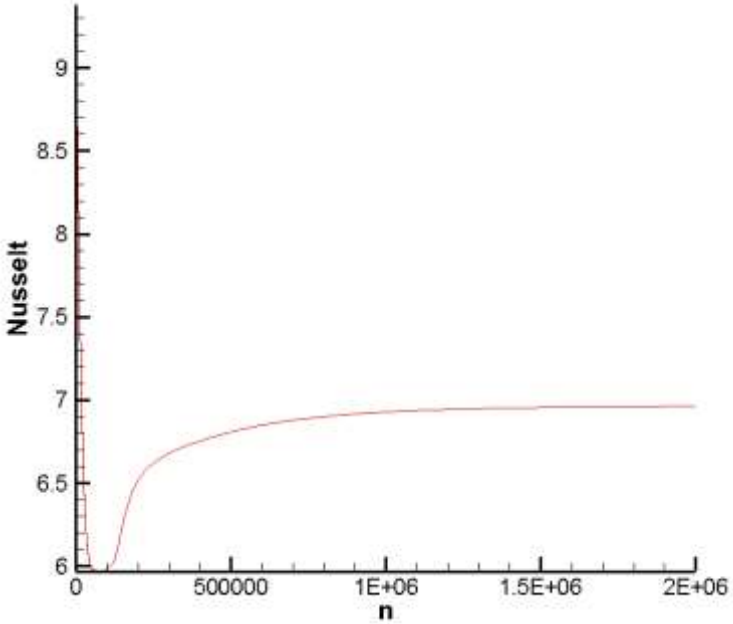
$Ra = 10^4$



$Ra = 10^5$



$Ra = 10^6$



Сетка	Ra	Nu	Nu (Davis)
50x50	$Ra = 10^3$	1.08	1.116
50x50	$Ra = 10^4$	2.23	2.238
50x50	$Ra = 10^5$	4.23	4.509
50x50	$Ra = 10^6$	6.95	8.817

Заключение

Разработана программа для численного решения задач термоконвекции в двумерных замкнутых прямоугольных областях. За основу взята схема КАБАРЕ для слабосжимаемой жидкости. Теплопроводность и вязкость учитывались методом расщепления по физическим процессам.

Проведена верификация программы:

- На модельной задаче о динамике начального гауссового возмущения давления;
- На задаче о вращении изолированного вихря;
- На задаче о динамике вихревого диполя.

Проведены расчеты задачи Дэвиса при четырех различных числах Релея ($10^3, 10^4, 10^5, 10^6$). Показано, что течение в этих пределах остается ламинарным.

Спасибо за внимание!