Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Кафедра Вычислительных методов
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Соколов Кирилл Владимирович

Математическое моделирование цунами по схеме КАБАРЕ в приближении мелкой воды

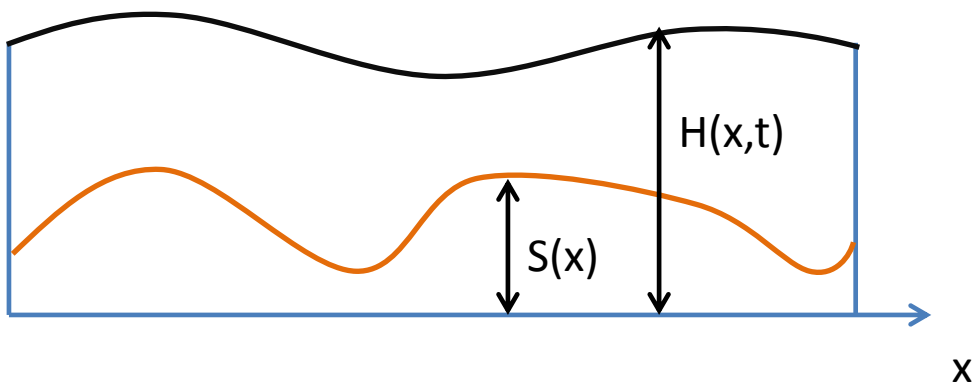
Научный руководитель: д. ф. – м. н., профессор Головизнин В. М.

Москва
2015

Уравнения мелкой воды с учетом рельефа дна

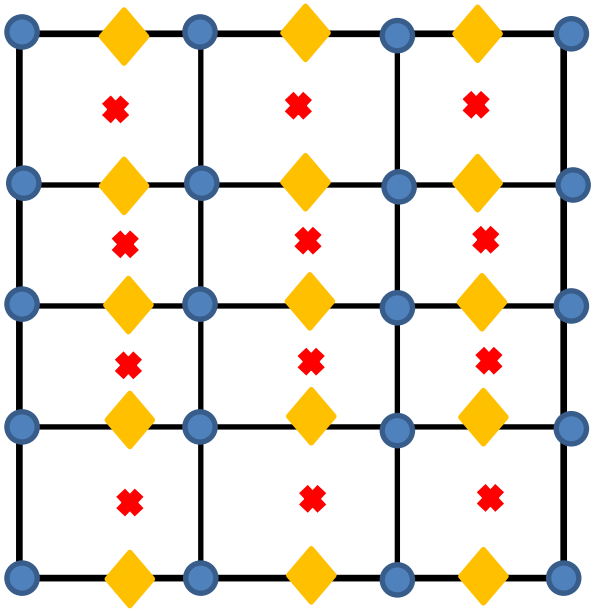
- $$\begin{cases} \frac{\partial(H-S)}{\partial t} + \frac{\partial\big((H-S)U\big)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\big((H-S)U\big)}{\partial t} + \frac{\partial\Big((H-S)U^2\Big)}{\partial x} + \frac{g}{2}\frac{\partial(H-S)^2}{\partial x} + g(H-S)\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

- $H(x,t)$ – высота жидкости, $U(x,t)$ – горизонтальная скорость течения, $S(x)$ – функция, описывающая профиль дна, g – ускорение свободного падения



Расчетная сетка

- Рассмотрим прямоугольную область [0;l]x[0;T]. Введем в этой области равномерную по пространству сетку



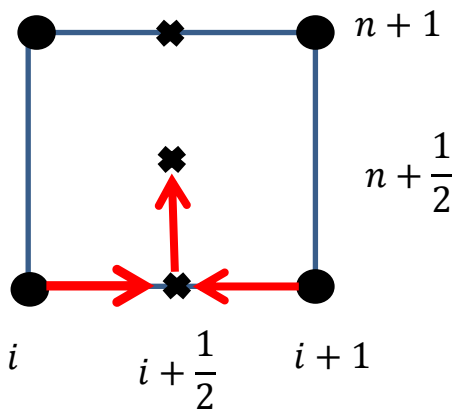
- потоковые переменные

- консервативные переменные

- потоковые переменные в полуцелых узлах

Фаза 1. Определение промежуточных значений консервативных переменных в полуцелых узлах

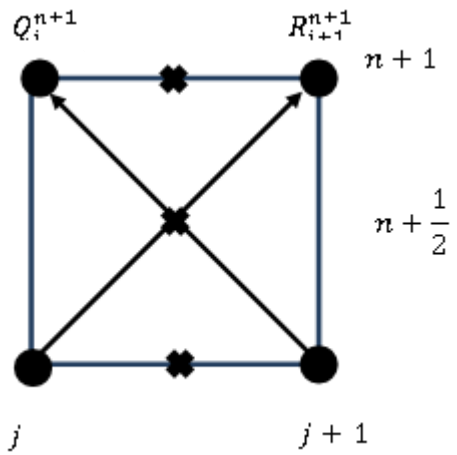
$$\begin{cases} \dfrac{H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{0{,}5\tau} + \dfrac{[(H-S)U]_{j+1}^{n} - [(H-S)U]_{j}^{n}}{h} = 0 \\ \dfrac{[(H-S)U]_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [(H-S)U]_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{0{,}5\tau} + \dfrac{[(H-S)U^2]_{j+1}^{n} - [(H-S)U^2]_{j}^{n}}{h} + \\ + \dfrac{g}{2}\dfrac{((H-S)_{j+1}^{n})^2 - ((H-S)_{j}^{n})^2}{h} + g\left[\dfrac{(H-S)_{j}^{n} + (H-S)_{j+1}^{n}}{2}\right]\dfrac{S_{j+1}^{n} - S_{j}^{n}}{h} = 0 \end{cases}$$



Вычислительный шаблон фазы 1

Фаза 2. Линейная экстраполяция для определения инвариантов Римана на новом временном слое

- $R_j^n = U_j^n + W_{j+\frac{1}{2}} H_j^n; R_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + W_{j+\frac{1}{2}} H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$
- $Q_{j+1}^n = U_{j+1}^n - W_{j+\frac{1}{2}} H_{j+1}^n; Q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - W_{j+\frac{1}{2}} H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$
- $W_{j+\frac{1}{2}} = \frac{g}{\sqrt{g(H-S)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}}$
- Экстраполяция:
- $\tilde{R}_{j+1}^{n+1} = 2R_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - R_j^n; \tilde{Q}_j^{n+1} = 2Q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - Q_{j+1}^n$

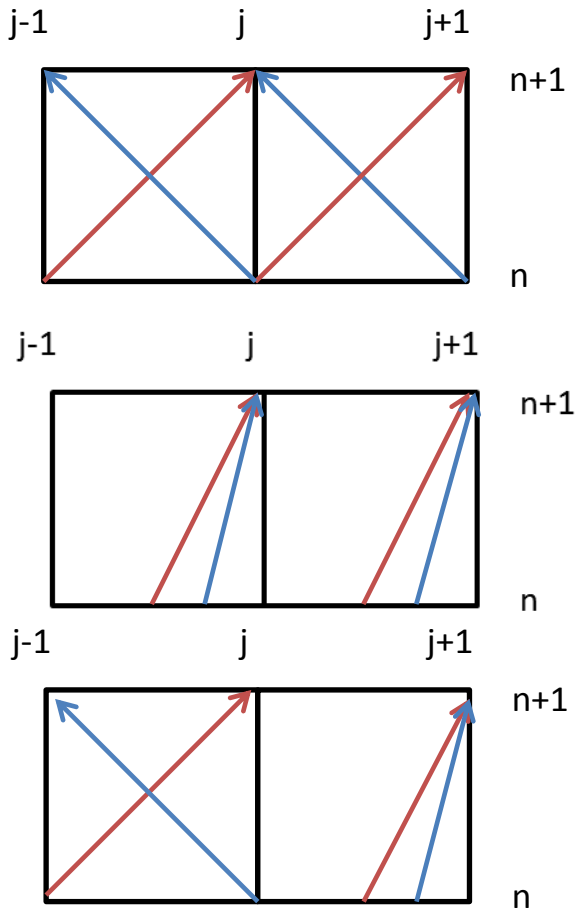


Фаза 2. Нелинейная коррекция

- $\begin{cases} if\ R_{min} \leq \tilde{R}_{j+1}^{n+1} \leq R_{max},\ R_{j+1}^{n+1} = \tilde{R}_{j+1}^{n+1} \\ if\, Q_{min} \leq \tilde{Q}_{j}^{n+1} \leq\ Q_{max}, Q_{j}^{n+1} = \tilde{Q}_{j}^{n+1} \end{cases}$
- $R_{min} = \min\left(R_j^n, R_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, R_{j+1}^n\right) + \tau\Theta;\ R_{max} = \max\left(R_j^n, R_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, R_{j+1}^n\right) + \tau\Theta$
- $Q_{min} = \min\left(Q_j^n, Q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, Q_{j+1}^n\right) - \tau\Theta;\ Q_{max} = \max\left(Q_j^n, Q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, Q_{j+1}^n\right) - \tau\Theta$
- $\Theta = W_j * U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} * \frac{(S_{j+1} - S_j)}{h}$
- $if\, \tilde{R}_{j+1}^{n+1} < R_{min}, R_{j+1}^{n+1} = R_{min}$
- $if\, \tilde{Q}_{j}^{n+1} < Q_{min}, Q_{j}^{n+1} = Q_{min}$
- $if\, \tilde{R}_{j+1}^{n+1} > R_{max}, R_{j+1}^{n+1} = R_{max}$
- $if\, \tilde{Q}_{j}^{n+1} > Q_{max}, Q_{j}^{n+1} = Q_{max}$

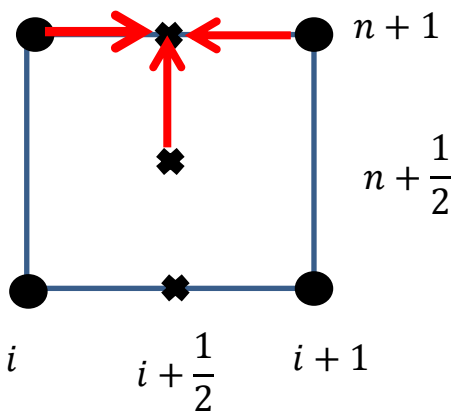
Фаза 2. Определение значений потоковых переменных на новом временном слое

- Дозвуковое течение:
- $H_j^{n+1} = \frac{R_j^{n+1} - Q_j^{n+1}}{W_{j+\frac{1}{2}} + W_{j-\frac{1}{2}}}$
- $U_j^{n+1} = \frac{W_{j-\frac{1}{2}} Q_j^{n+1} + W_{j+\frac{1}{2}} R_j^{n+1}}{W_{j+\frac{1}{2}} + W_{j-\frac{1}{2}}}$
- Сверхзвуковое течение:
- $H_j^{n+1} = \frac{R_j^{n+1} - Q_{j-1}^{n+1}}{2W_{j-\frac{1}{2}}}$
- $U_j^{n+1} = \frac{Q_j^{n+1} + R_j^{n+1}}{2}$
- Трансзвуковое течение:
- $H_j^{n+1} = \frac{R_j^{n+1} - U_j^{n+1}}{W_{j-\frac{1}{2}}}$
- $U_j^{n+1} = \sqrt{g(H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - S_{j+\frac{1}{2}})}$



Фаза 3. Вычисление значений консервативных переменных на новом временном слое

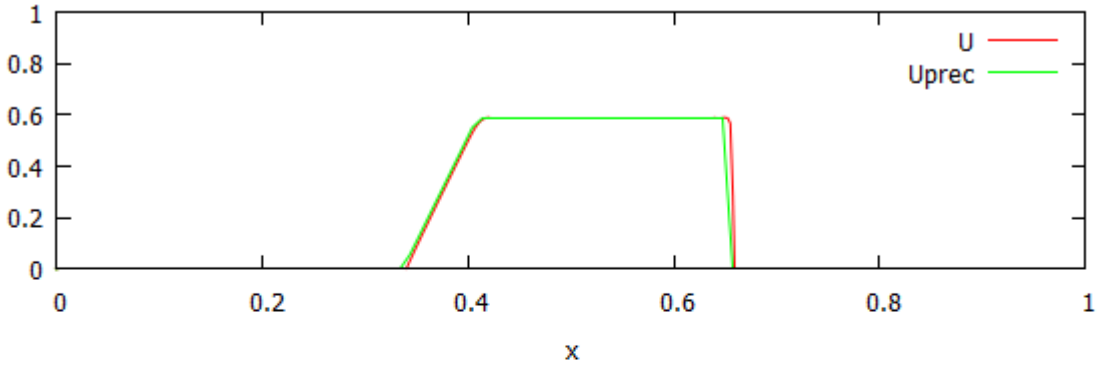
- $$\begin{cases} \dfrac{H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau} + \dfrac{[(H-S)U]_{j+1}^{n+1} - [(H-S)U]_{j}^{n+1}}{h} = 0 \\ \dfrac{[(H-S)U]_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - [(H-S)U]_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau} + \dfrac{[(H-S)U^2]_{j+1}^{n+1} - [(H-S)U^2]_{j}^{n+1}}{h} + \\ + \dfrac{g}{2}\dfrac{((H-S)_{j+1}^{n+1})^2 - ((H-S)_{j}^{n+1})^2}{h} + g\left[\dfrac{(H-S)_{j}^{n+1} + (H-S)_{j+1}^{n+1}}{2}\right]\dfrac{S_{j+1}^{n+1} - S_{j}^{n+1}}{h} = 0 \end{cases}$$

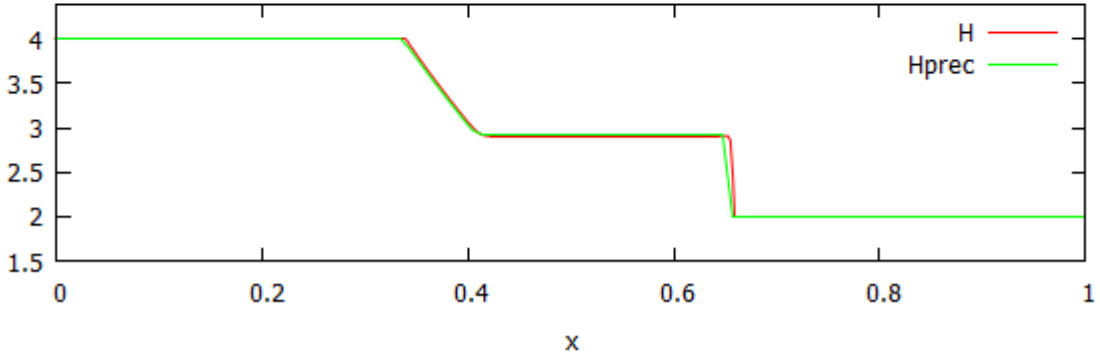


Вычислительный шаблон фазы 3

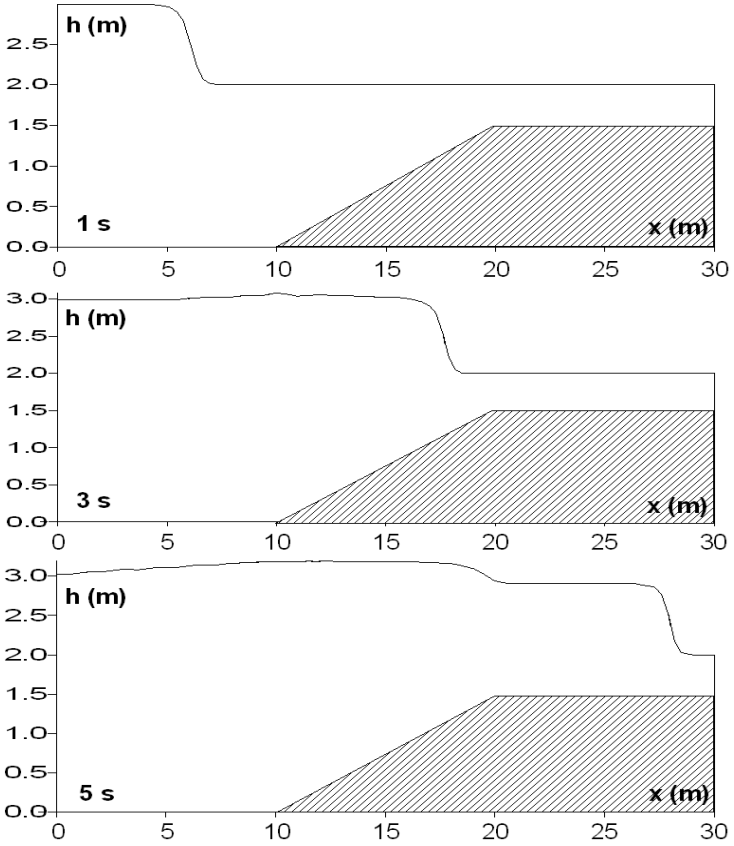
Расчет задачи Римана над ровным дном

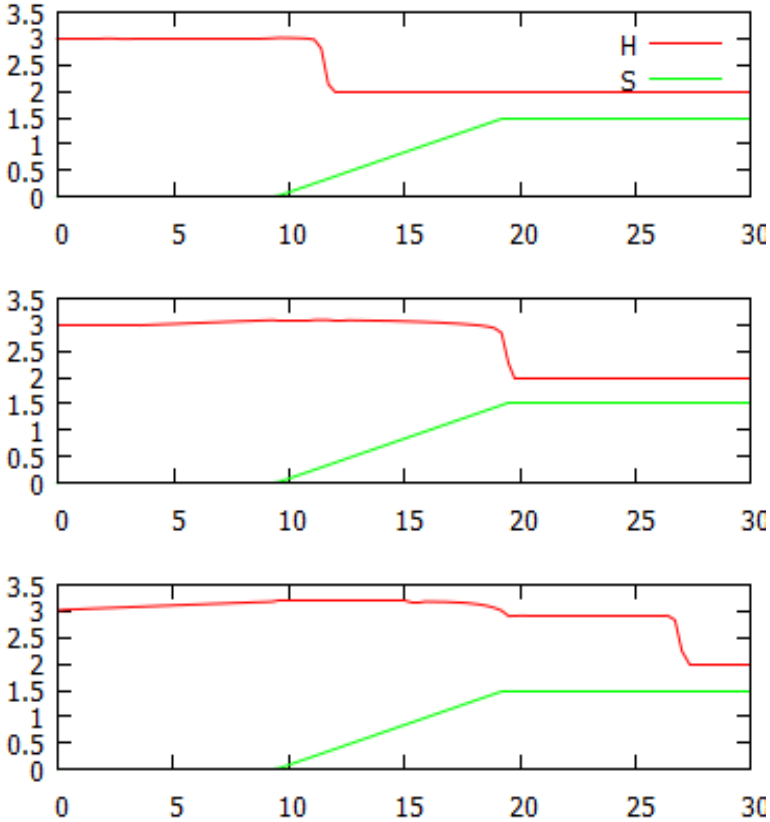
Расчет конфигурации волна ‘разряжения - ударная волна’ (U_l=0, $H_l = 4$, U_r=0, H_r=2)



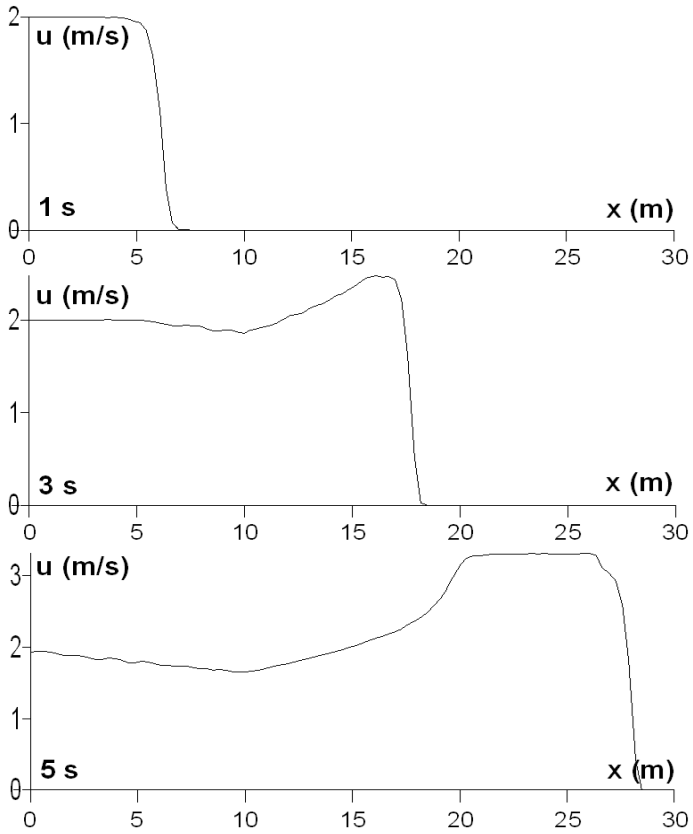


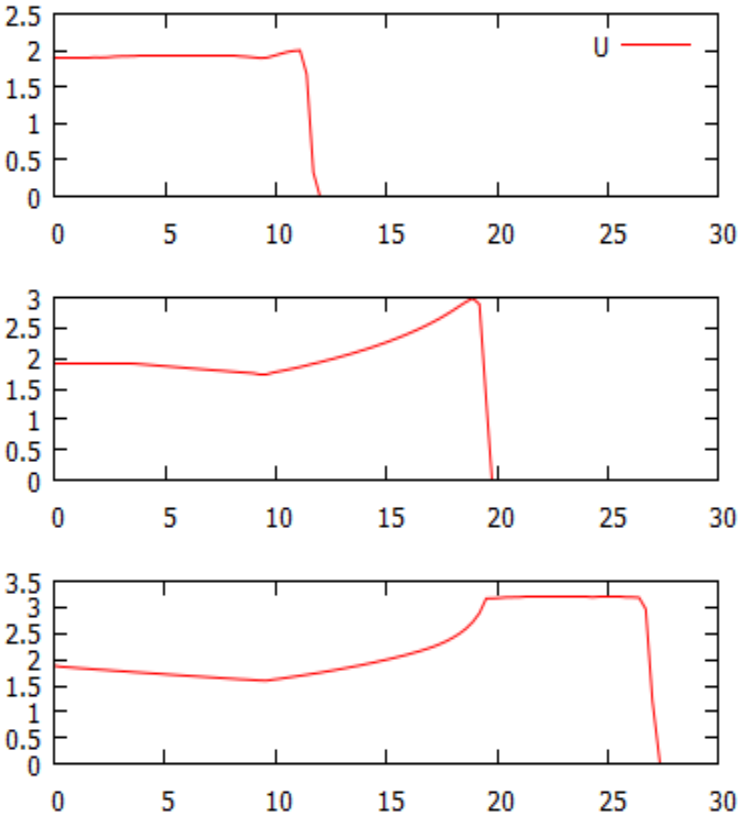
Расчет натекания ударной волны на наклонное дно. Расчет высоты жидкости





Расчет натекания ударной волны на наклонное дно. Расчет скорости





Результаты

- Реализована программа на языке C++ для численных расчетов уравнений мелкой воды с учетом неровностей рельефа дна
- Проведены тесты на задаче распада произвольного разрыва и сравнения с расчетами Петросяна А. С.

Спасибо за внимание!