



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных методов

# Построение аналитического решения задачи генерации третьей гармоники оптического импульса в кубической среде в случае ненулевой ее входной амплитуды

Сидоров Павел Сергеевич

**Научный руководитель:**  
д.ф-м.н., профессор  
В.А. Трофимов

Москва, 2016

# Основные уравнения

Процесс генерации третьей гармоники ГТГ ( $\omega_3 = 3\omega$ ) в среде с кубической нелинейностью описывается следующей безразмерной системой уравнений Шрёдингера для комплексных амплитуд  $A_1, A_3$  :

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} + iD_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 t} + i\gamma A_1(|A_1|^2 + 2|A_3|^2) + i\gamma A_3 A_1^{*2} e^{-i\Delta kz} = 0,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} + iD_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial^2 t} + i3\gamma A_3(2|A_1|^2 + |A_3|^2) + i\gamma A_1^3 e^{i\Delta kz} = 0.$$

Со следующими начальными и краевыми условиями:

$$A_1(0, t) = A_{01}(t), \quad A_3(0, t) = A_{03}, \quad A_1(z, 0) = A_3(z, 0) = A_1(z, L_t) = A_3(z, L_t) = 0.$$

Данная система обладает следующими инвариантами:

$$I_1 = \int_0^{L_t} (|A_1|^2 + |A_3|^2) dt,$$
$$I_3 = \int_0^{L_t} \left( -3iD_1 \left| \frac{\partial \bar{A}_1}{dt} \right|^2 - iD_3 \left| \frac{\partial \bar{A}_3}{dt} \right|^2 + 3v_1 \left( \bar{A}_1 \frac{\partial \bar{A}_1}{dt} \right) + v_3 \left( \bar{A}_3 \frac{\partial \bar{A}_3}{dt} \right) + i\gamma(\bar{A}_1^3 \bar{A}_3 + \bar{A}_1^3 \bar{A}_3^*) - \frac{i\Delta k}{2}(3|\bar{A}_1|^2 + |\bar{A}_3|^2) + \frac{3}{2}i\gamma(|\bar{A}_1|^4 + 4|\bar{A}_1|^2|\bar{A}_3|^2 + |\bar{A}_3|^4) \right) dt.$$

$$A_j = \bar{A}_j e^{-\frac{i\Delta kz}{2}}, j = 1, 3$$

# Консервативная разностная схема (для случая $D_1 = D_3 = 0, \nu_1 = \nu_3 = 0$ )

Используем замену  $A_j = \overline{A_j} e^{-\frac{i\Delta kz}{2}}$  и введем сетку по  $\omega_z = \{z_m = mh, m = 0, 1, \dots, N_z, h = \frac{L_z}{N_z}\}$ .

Введем сеточные функции:

$$A_j = A_j(z_m), \quad \hat{A}_j = A_j(z_m + h), \quad A_j^{0.5} = 0.5(\hat{A}_j + A_j), \quad |A_j^{0.5}| = \frac{|\hat{A}_j|^2 + |A_j|^2}{2}, \quad j = 1, 3$$

Далее, построим итерационный процесс:

$$\frac{\hat{A}_1 - A_1}{h} - \frac{i\Delta k}{2} A_1^{0.5} + i\gamma A_1^{0.5} \left( |A_1^{0.5}|^2 + 2 |A_3^{0.5}|^2 \right) = -i\gamma A_3^{0.5} \frac{\hat{A}_1^{*2} + \hat{A}_1^* A_1^* + A_1^{*2}}{3},$$

$$\frac{\hat{A}_3 - A_3}{h} - \frac{i\Delta k}{2} A_3^{0.5} + 3i\gamma A_3^{0.5} \left( 2 |A_1^{0.5}|^2 + |A_3^{0.5}|^2 \right) = -i\gamma \frac{(\hat{A}_1^3 + A_1^3)}{2}.$$

Так как уравнения нелинейные, будем решать их итерационным методом.

# Консервативность разностной схемы

Инвариант энергии:

$$I_1 = |\hat{A}_1|^2 + |\hat{A}_3|^2 = |A_1|^2 + |A_3|^2$$

Гамильтониан (третий инвариант):

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{i\Delta k}{2h} \left( 3|\hat{A}_1|^2 + |\hat{A}_3|^2 \right) - \frac{2i\gamma}{h} \left( \hat{A}_3 \hat{A}_1^{*3} + \hat{A}_3^* \hat{A}_1^3 \right) + \frac{i\gamma}{2h} \left( |\hat{A}_1|^4 + 4|\hat{A}_1|^2 |\hat{A}_3|^2 + |\hat{A}_3|^4 \right) = \\ &= -\frac{i\Delta k}{2h} \left( 3|A_1|^2 + |A_3|^2 \right) - \frac{2i\gamma}{h} \left( A_3 A_1^{*3} - A_3^* A_1^3 \right) + \frac{i\gamma}{2h} \left( |A_1|^4 + 4|A_1|^2 |A_3|^2 + |A_3|^4 \right) \end{aligned}$$

# Порядок аппроксимации схемы

Исследован порядок аппроксимации.

Разложим функции в ряд Тейлора относительно точки  $z = z_m + \frac{h}{2}$ .

Разложение справедливо для достаточного гладкого решения разностной задачи.

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{i\Delta k}{2} A_1 + i\gamma A_1(|A_1|^2 + 2|A_3|^2) + i\gamma A_3 A_1^{*2} + o(h^2) = 0$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} - \frac{i\Delta k}{2} A_3 + 3i\gamma A_3(2|A_1|^2 + |A_3|^2) + i\gamma A_1^3 + o(h^2) = 0$$

Схема имеет второй порядок аппроксимации.

# Аналитическое решение

# Построение аналитического решения

Представим решение в виде:  $A_j = a_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 3$ .

Из исходных уравнений следует интеграл

Исследуем уравнение (обозначив  $x = a_{30}^2$ )

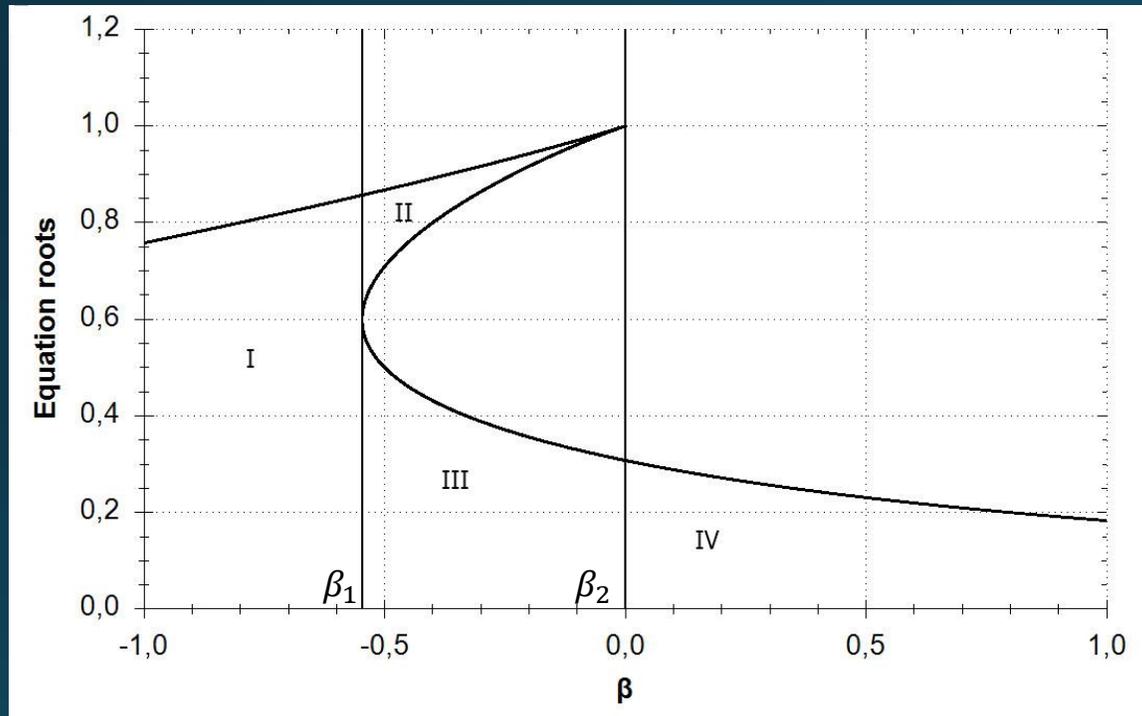
$$z = \pm \int_{p_{30}}^{p_3} \frac{dx}{\gamma \left[ -13x^4 + x^3(30 + 6\beta) - x^2(21 + 6\beta + \beta^2 - 3\alpha) + x(4 + \alpha\beta + 3\alpha) - \frac{\alpha^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Интенсивность третьей гармоники зависит от числа действительных корней уравнения:

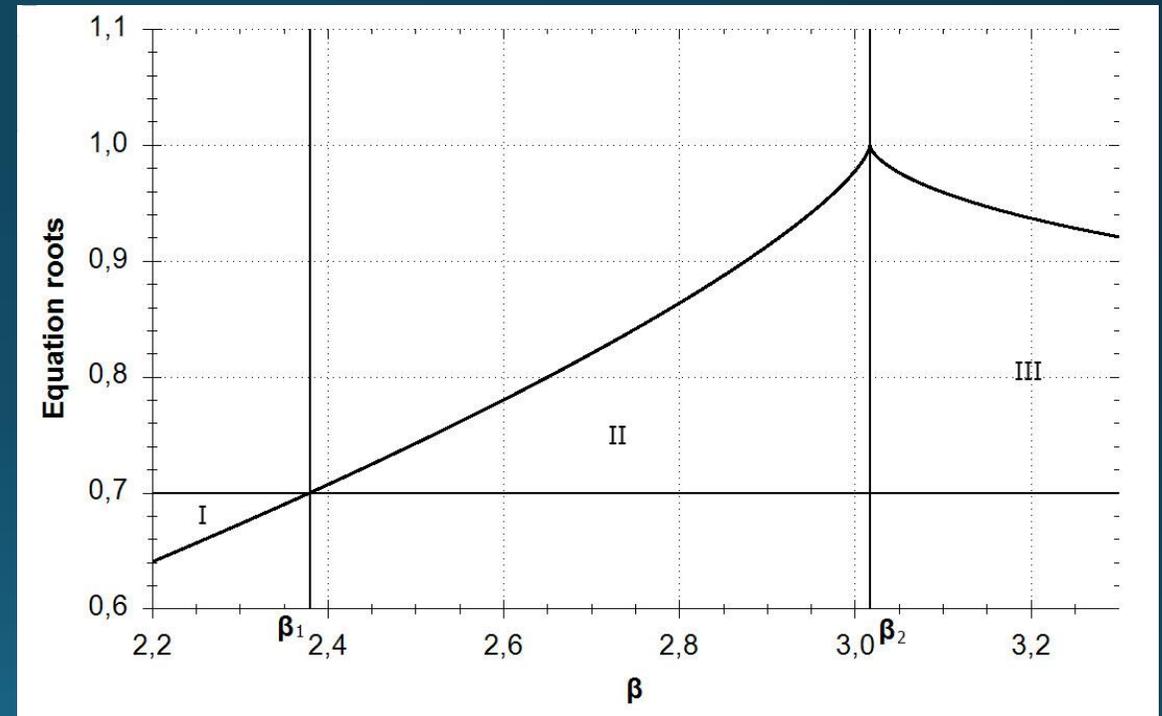
$$-13x^4 + x^3(30 + 6\beta) - x^2(21 + 6\beta + \beta^2 - 3\alpha) + x(4 + \alpha\beta + 3\alpha) - \frac{\alpha^2}{4} = 0.$$

# Зависимость числа решений от параметров задачи

Зависимость числа решений от параметра  $\beta$ , где  $a_{30}^2 = 0$



Зависимость числа решений от параметра  $\beta$ , где  $a_{30}^2 = 0.7$



# Решение уравнения с интегралом

Случай двух мнимых и двух действительных корней.

Интеграл примет вид:

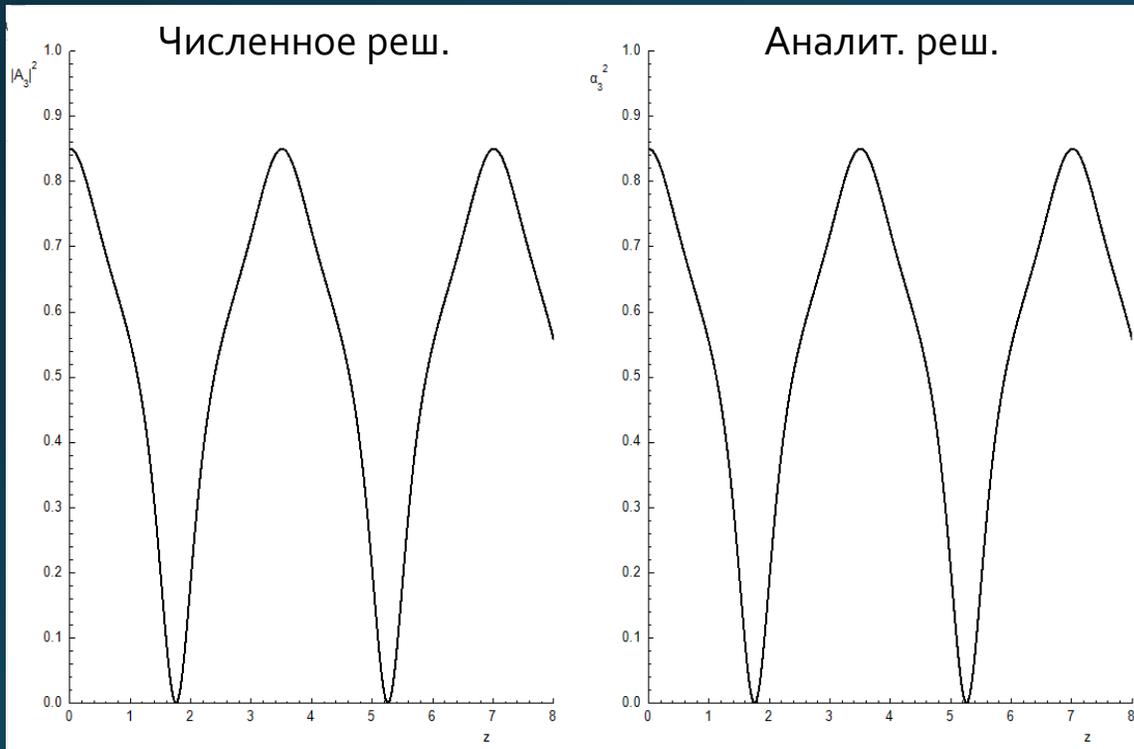
$$\sqrt{13}\gamma z = \int_0^{p_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)((x-x_3)^2+x_4)}} = \frac{-1}{\sqrt[4]{(x_4^2+(x_1-x_3)^2)(x_4^2+(x_2-x_3)^2)}} F(\varphi, m)$$

Его решение:

$$p_3(z) = |A_3(z)|^2 = \frac{cx_1 + dx_2 + \operatorname{cn}(-\sqrt{13cd}\gamma z, m) (cx_1 + dx_2)}{\operatorname{cn}(-\sqrt{13cd}\gamma z, m) (c-d) + c + d}$$

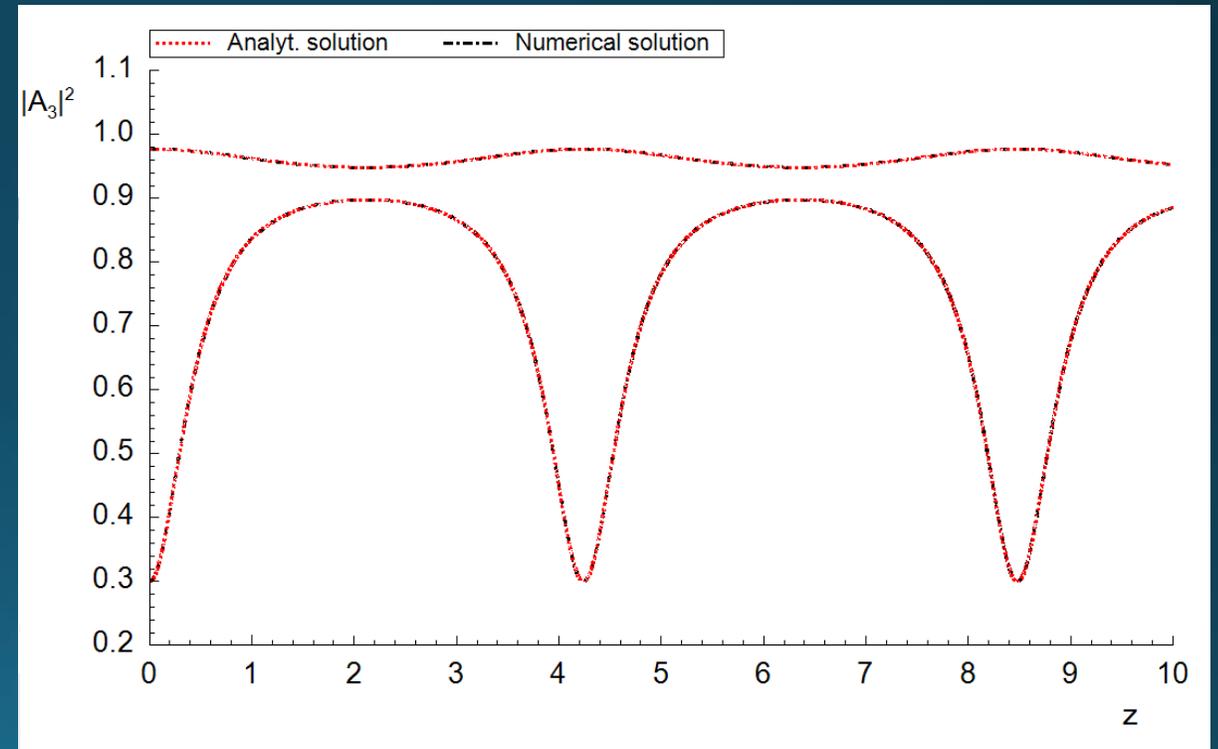
# Сравнение аналитического решения с численным решением

Зависимость интенсивности третьей гармоники от координаты  $z$  при параметре  $\beta = -0.5$ , где  $a_{30}^2 = 0.85$



(соответствует областям 1,4)

Зависимость интенсивности третьей гармоники от координаты  $z$  при параметре  $\beta = 1.77$ , где  $a_{30}^2 = 0.3$



(соответствует областям 2,3)

# Решения на границах областей

Наиболее интересный случай:  $x_1 < x_2 = x_3 < x_4$   
(4 действительных корня)

Решения имеют вид:

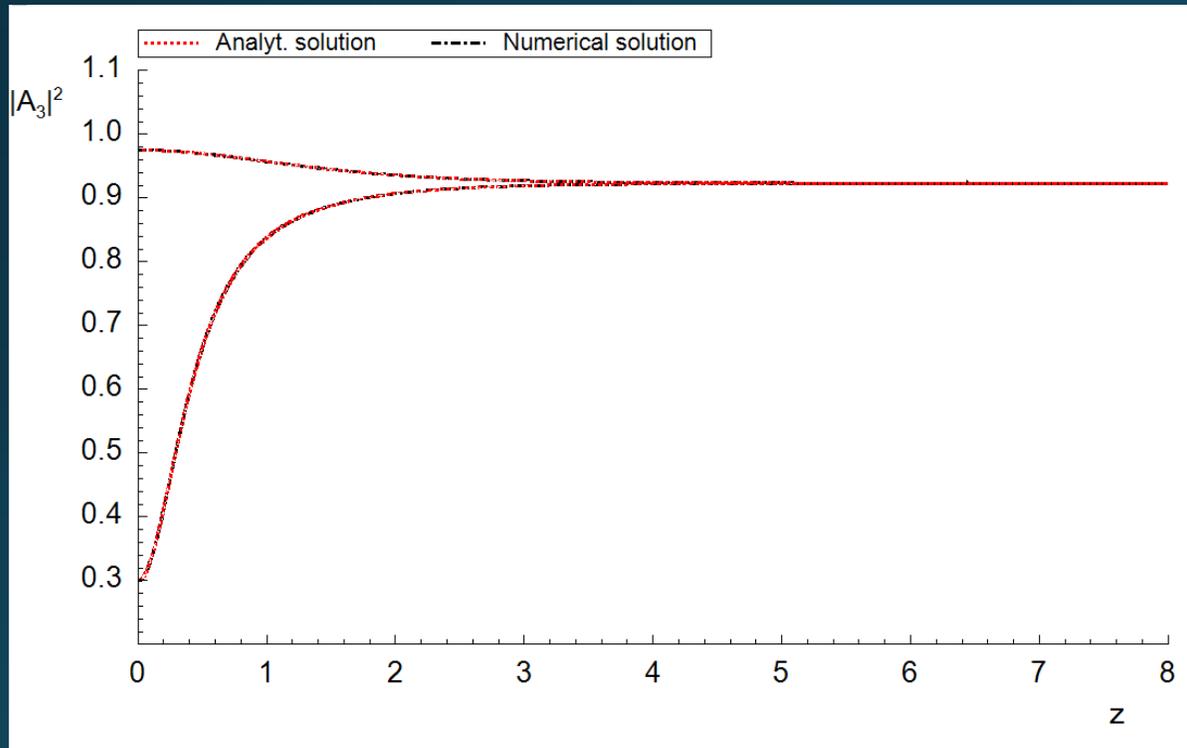
$$p_3(z) = |A_3(z)|^2 = \frac{(h - x_4)^2(x_3 - x_1)}{(h - x_4)^2 + 4h(x_4 - x_3)}$$

$$p_3(z) = |A_3(z)|^2 = \frac{(h + x_4)^2(x_3 - x_1)}{(h + x_4)^2 - 4h(x_4 - x_3)}$$

Где  $h = x_4 e^{\sqrt{(x_3 - x_1)(x_4 - x_3)}\gamma z}$

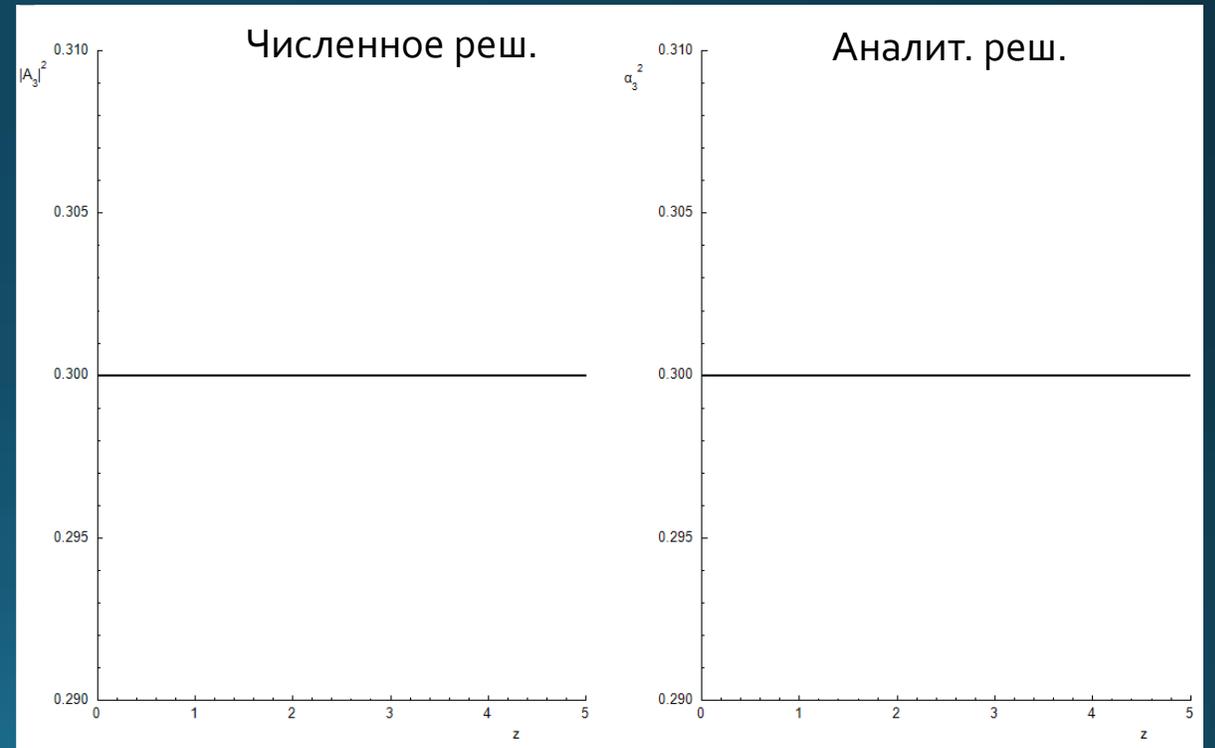
# Соответствие решений на границах областей

Зависимость интенсивности третьей гармоники от координаты  $z$  при параметре  $\beta = 1.7647$ , где  $a_{30}^2 = 0.3$



(соответствует границе  $\beta_1$  на левом рисунке)

Зависимость интенсивности третьей гармоники от координаты  $z$  при параметре  $\beta = -0.8945$ , где  $a_{30}^2 = 0.3$



(соответствует границе  $\beta_1$  на правом рисунке)

# Выводы

Построена консервативная схема (сохраняющая оба инварианта)

Построено решение в приближении плоских волнах и длинных импульсов на основе использования инвариантов задач

Проведено сравнение аналитического решения с решением разностной задачи и показано их совпадение

Показана возможность наличия динамических солитонов

Спасибо за внимание