Трехстадийные симплектические методы решения задачи Коши для гамильтоновых систем

АВТОР:

Серебренников Евгений Константинович

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

Д.ф.-м.н., профессор

Еленин Георгий Георгиевич

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ И АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ
2. ИНТЕРФЕЙС ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «ИОГАНН»
3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА
4. ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА
5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
6. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ СРЕДНЕЙ ТОЧКИ
7. НОВЫЕ АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ
8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АДАПТИВНЫМИ МЕТОДАМИ
9. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ АДАПТИВНЫХ МЕТОДОВ
10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ
11. ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ
12. БЛАГОДАРНОСТИ

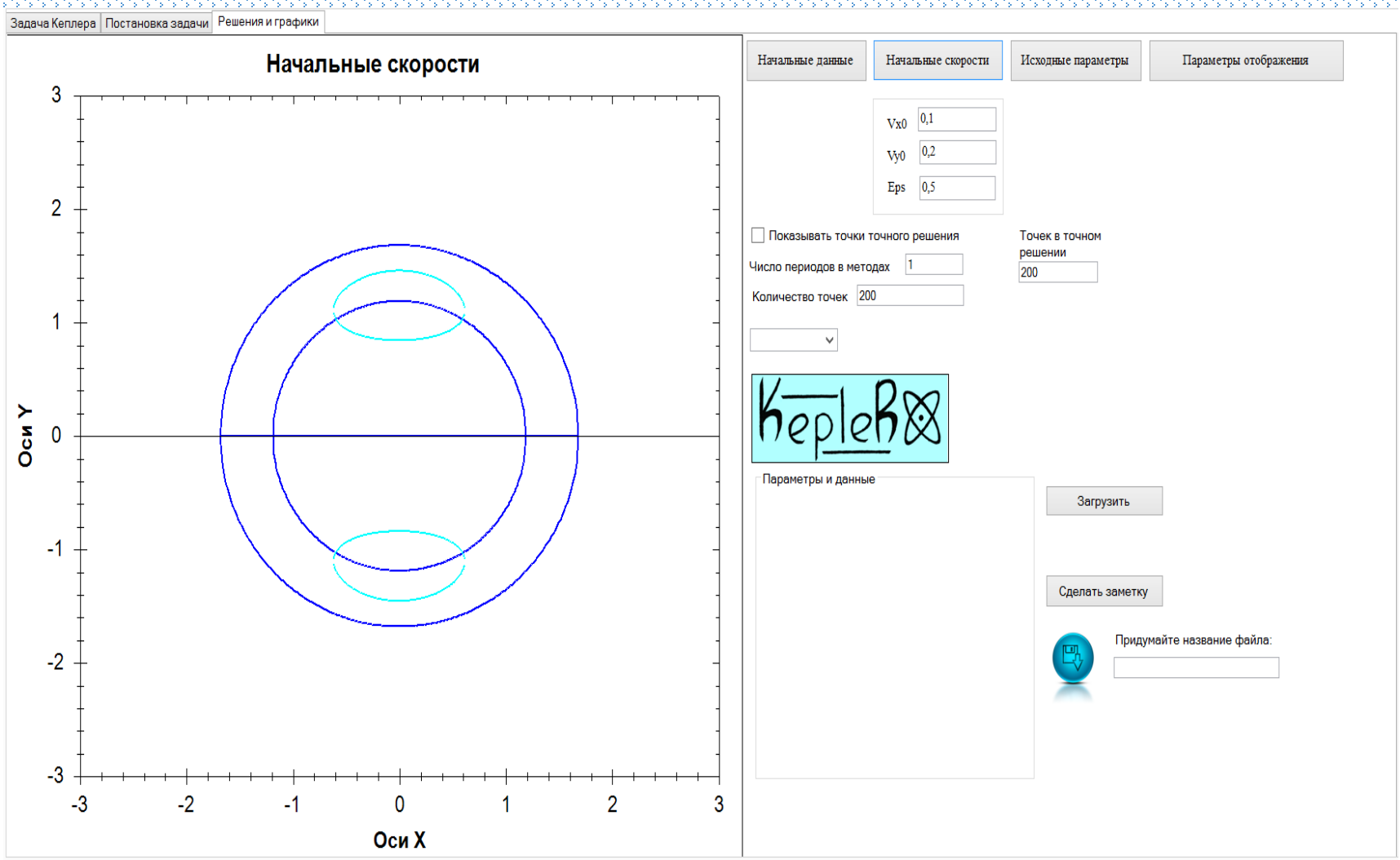
ЦЕЛЬ РАБОТЫ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ НОВОГО КЛАССА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МНОЖЕСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ШИРОКО ИСПОЛЬЗУЕТСЯ В МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ ИССЛЕДОВНИЯХ, НАПРИМЕР, В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ, АСТРОФИЗИКЕ, МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКЕ.

Интерфейс программного комплекса «Иоганн»



Задача о движении в центральном поле ньютоновского потенциала

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial H(v_x,\ v_y,\ x,\ y)}{\partial x} = -\gamma M x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial H(v_x,\ v_y,\ x,\ y)}{\partial y} = -\gamma M y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H(v_x, v_y, x, y)}{\partial v_x} = v_x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial H(v_x, v_y, x, y)}{\partial v_y} = v_y$$

$$v_x(0) = v_{x,0}, \qquad v_y(0) = v_{y,0},\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$$

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 \neq 0,\ x_0 v_{x,0} \neq y_0 v_{y,0}$$

где функция Гамильтона $H = H(v_x, v_y, x, y)$ имеет вид

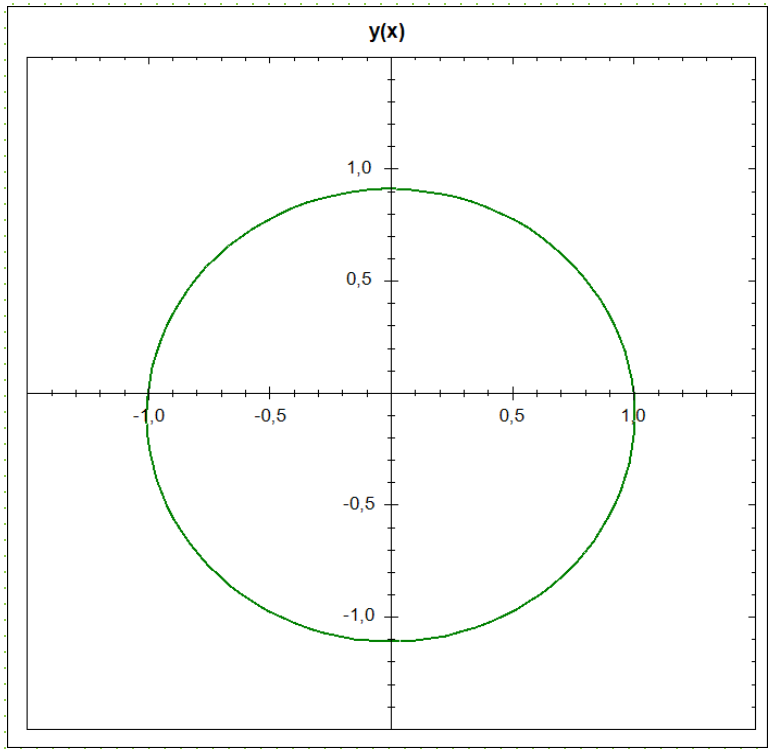
$$H(v_x, v_y, x, y) = 0.5(v_x^2 + v_y^2) - \gamma M r^{-1} + H^*,$$

$$H^* = -0.5(v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2) + \gamma M r_0^{-1}, \qquad r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{0.5}$$

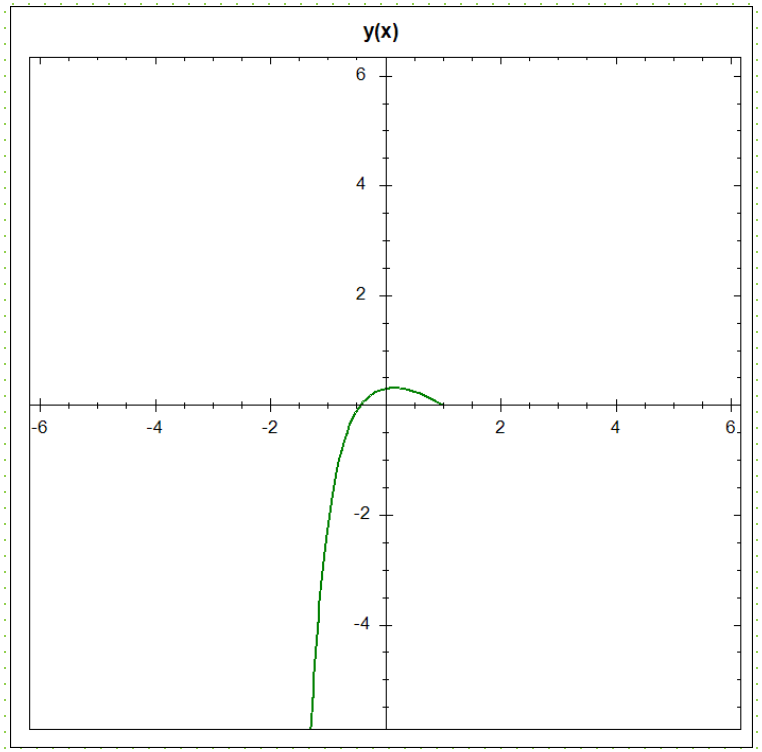
Глобальные свойства задачи

1) симплектичность и обратимость решения
2) сохранение полной энергии H
3) сохранение момента количества движения l
4) сохранение вектора Лапласа – Рунге - Ленца eLRL

Точное решение

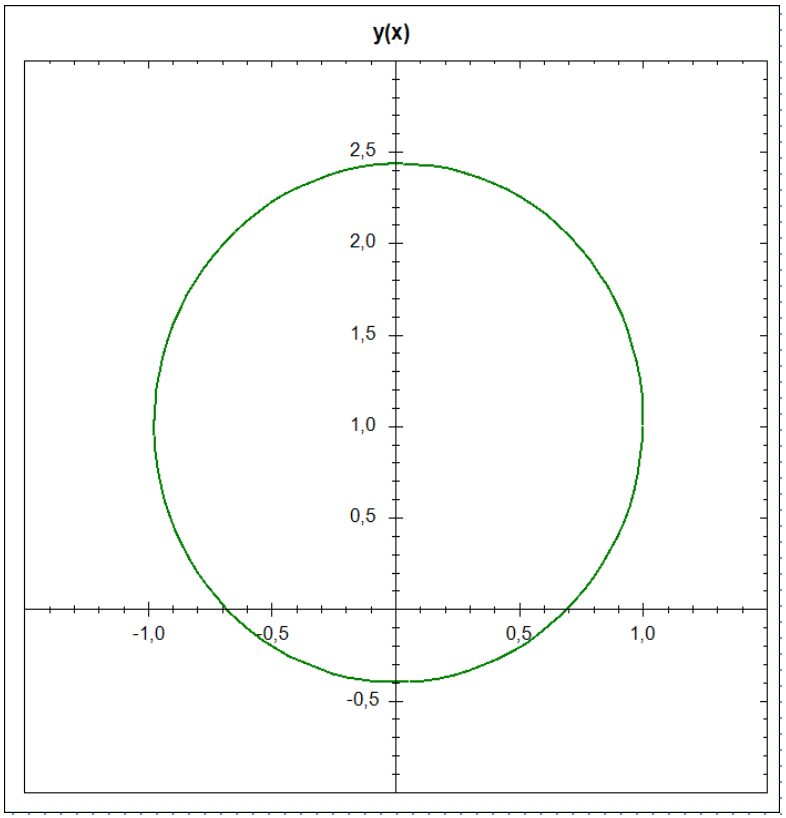


Орбита двумерного
финитного движения (H > 0)

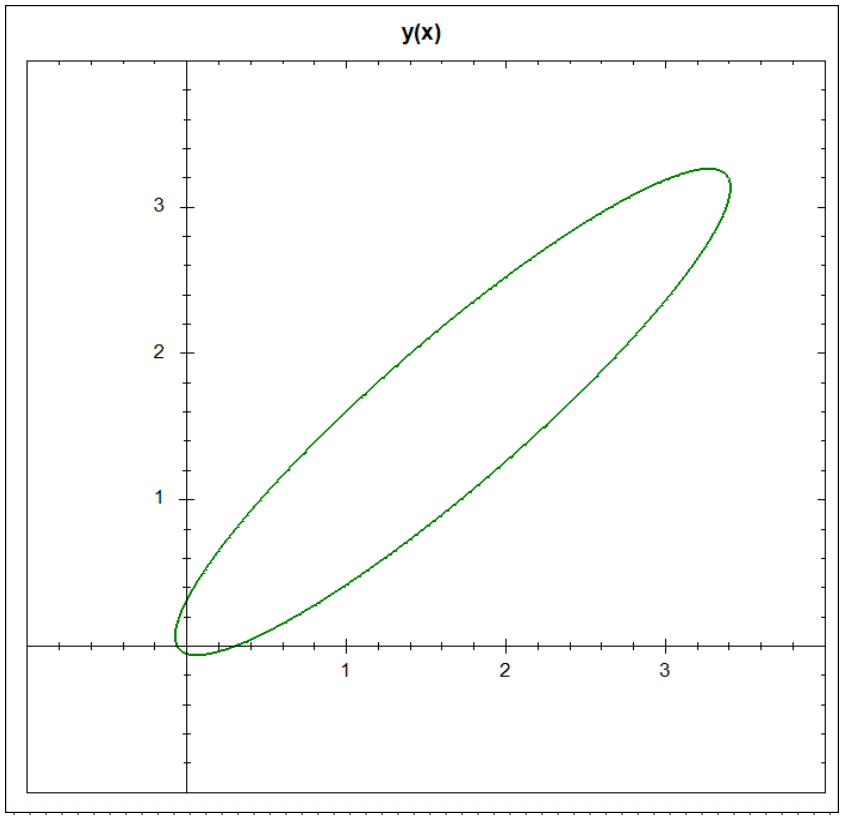


Орбита двумерного
инфинитного движения (H > 0)

Орбиты точного решения при разных эксцентриситетах



$\varepsilon = 0.073$

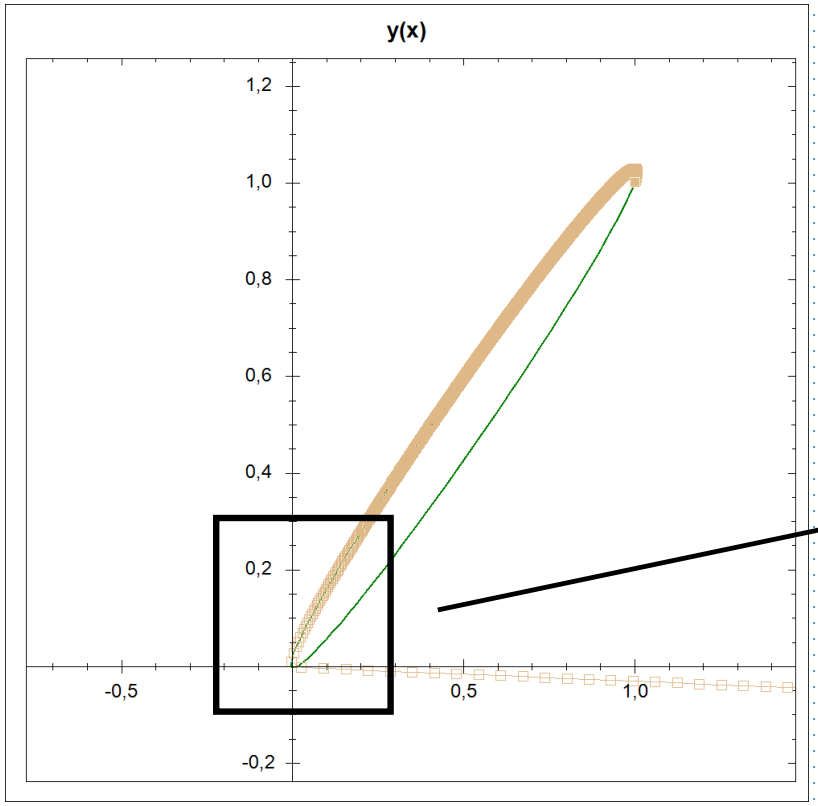


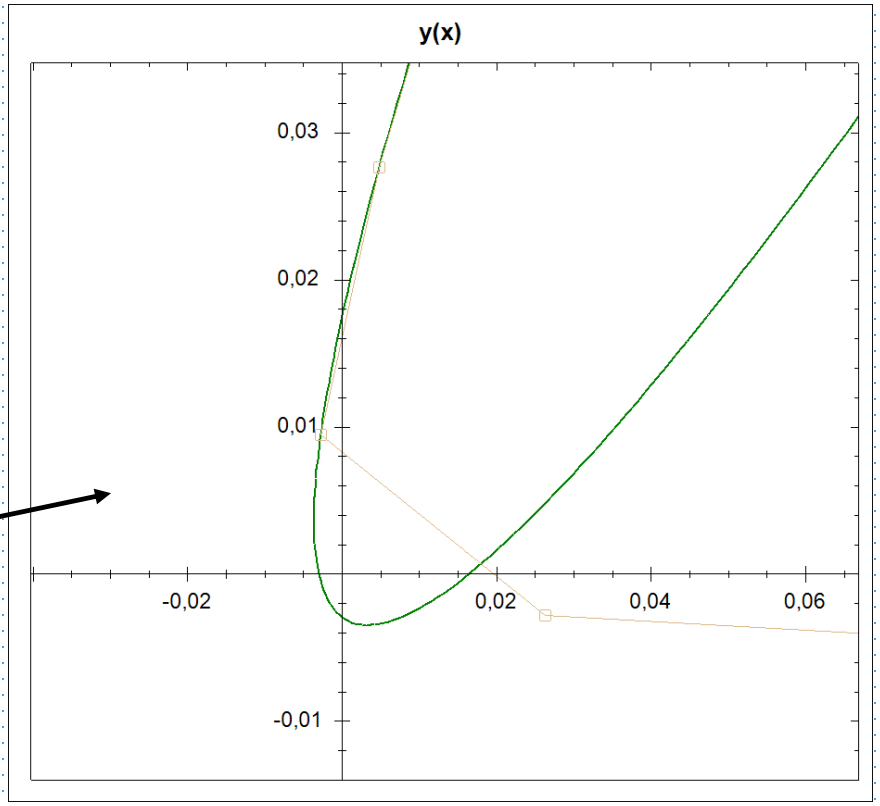
$\varepsilon = 0.96$

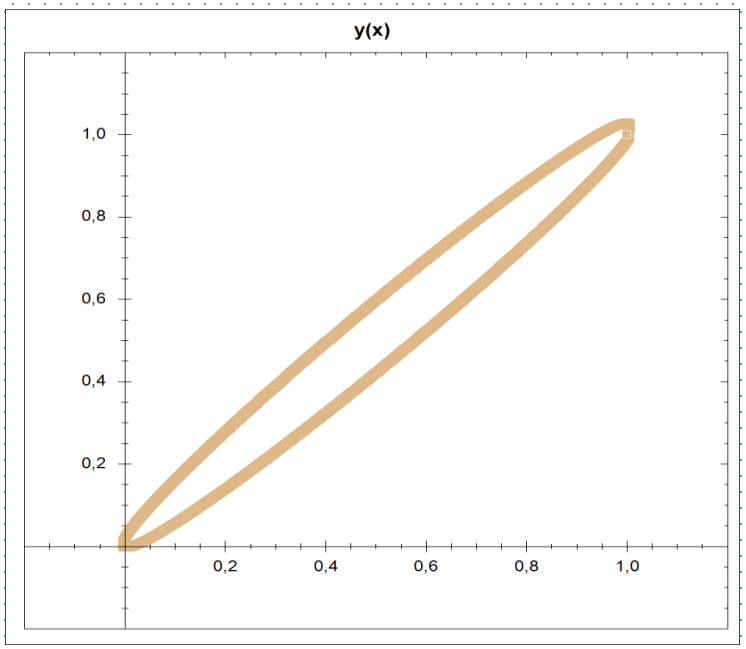
МЕТОД СРЕДНЕЙ ТОЧКИ

- СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ И ОБРАТИМЫЙ
- НЕ СОХРАНЯЕТ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
- ВТОРОЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ
- НЕЯВНЫЙ

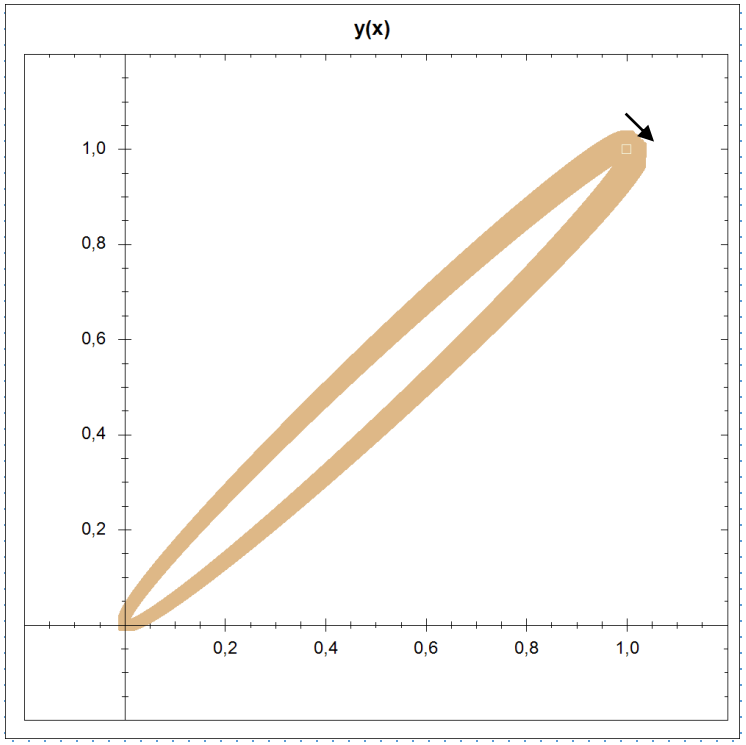
Орбита решения методом средней точки, 1 период, 2000 точек

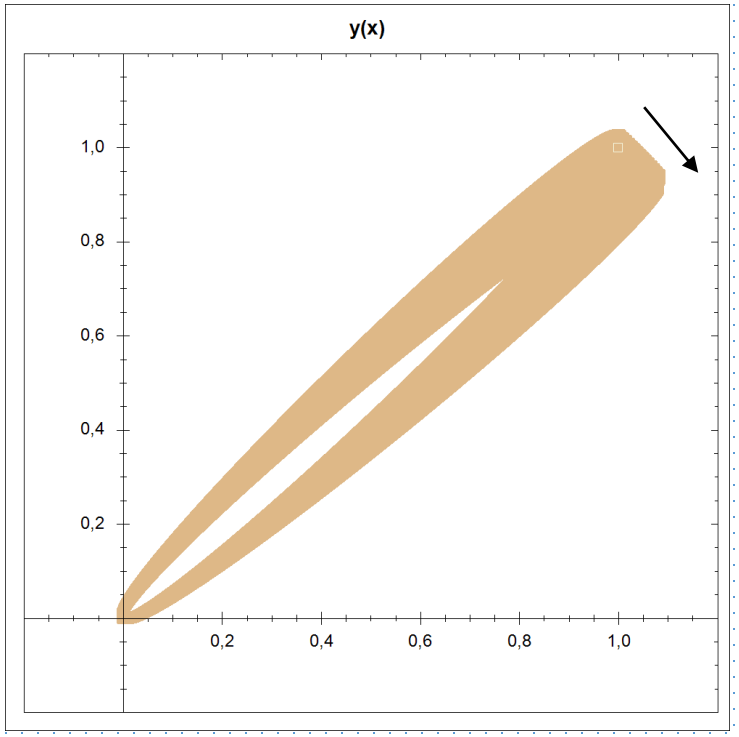




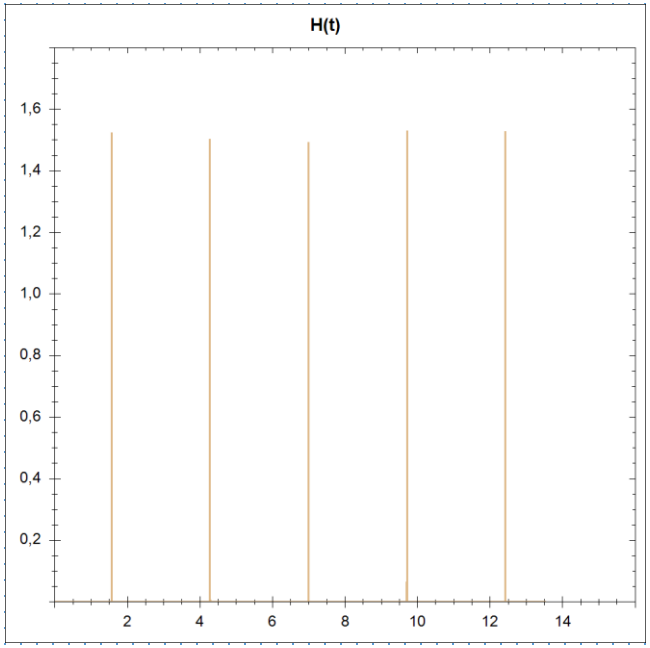


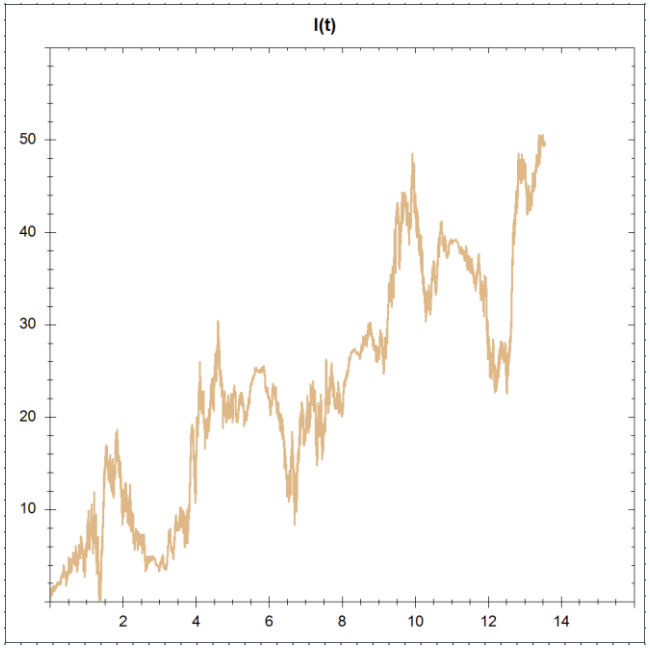
Орбиты решения методом средней точки, 1, 5 и 15 периодов по 100000 точек

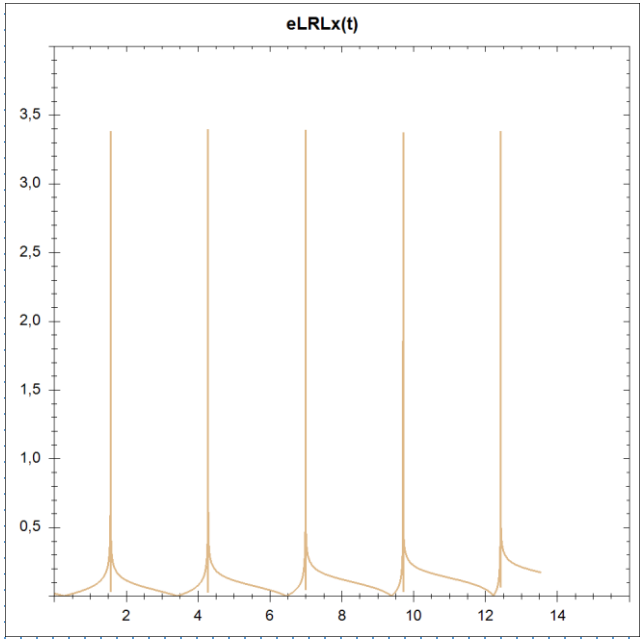


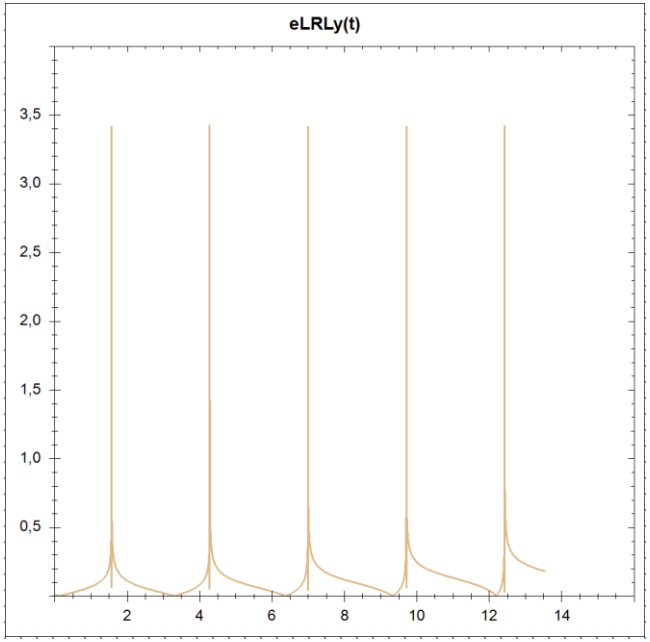


Зависимость первых интегралов от времени, 5 периодов по 100 000 точек









АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ

РАССЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$x_{i+1} = x_i + 2r_i v_{x,i} q_1 \Delta\theta - 2(2H^* x_i + e_{iLRL,x,i}) q_2 (\Delta\theta)^2,$$

$$y_{i+1} = y_i + 2r_i v_{y,i} q_1 \Delta\theta - 2(2H^* y_i + e_{iLRL,y,i}) q_2 (\Delta\theta)^2,$$

$$t_{i+1} = t_i + 2r_i q_1 \Delta\theta + 2(x_i v_{x,i} + y_i v_{y,i}) q_2 (\Delta\theta)^2 + \gamma M q_3 (\Delta\theta)^3,$$

$$r_{i+1} = (\gamma M)^{-1} (l_{z,i}^2 - e_{LRL,x,i} x_{i+1} - e_{LRL,y,i} y_{i+1}),$$

$$v_{x,i+1} = -(l_{z,i}^2 e_{LRL,y,i} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} x_{i+1} + (\gamma^2 M^2 - e_{LRL,y,i}^2) y_{i+1})(\gamma M l_{z,i})^{-1} r_{i+1}^{-1},$$

$$v_{y,i+1} = (l_{z,i}^2 e_{LRL,x,i} + (\gamma^2 M^2 - e_{LRL,x,i}^2) x_{i+1} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} y_{i+1})(\gamma M l_{z,i})^{-1} r_{i+1}^{-1}.$$

SSRK1

$$q_1 = (1 + 2H^*(\Delta\theta)^2)^{-1}$$

SSRK3

$$q_1 = (1 + 8(\Delta\theta)^2(2H^*)(-(1-b)c^2 + (1-2b)(2c - s_1)s_1) +$$

$$16(\Delta\theta)^4(2H^*)^2(1-2b)(c-s_1)^2(c^2 - (1-2b)(2c-s_1)s_1))\Delta_3^{-1}$$

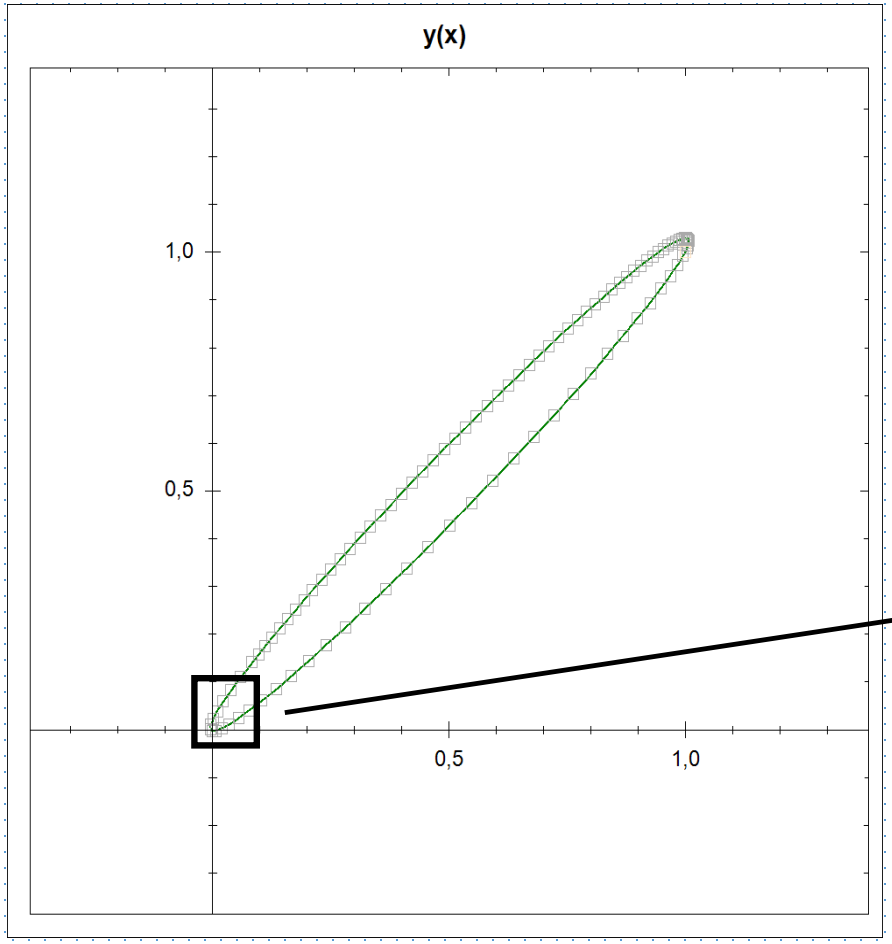
b и s_1 – свободные параметры, $1/6 < b < 1/2$, $-1 < s_1 < 0$

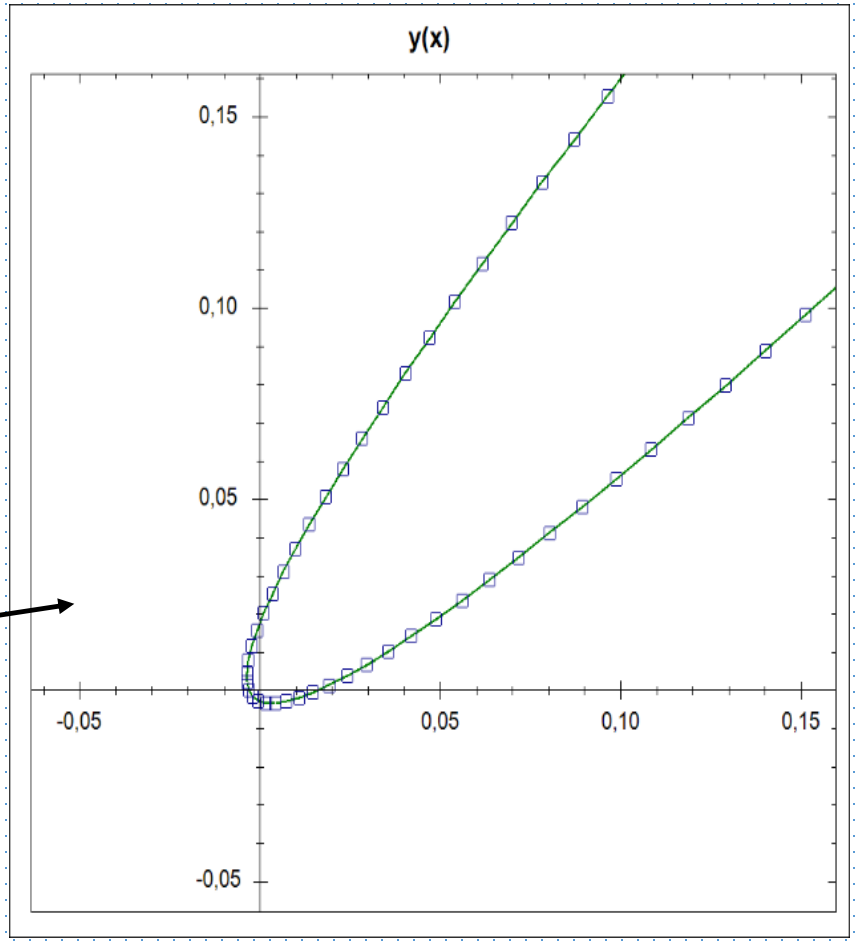
ДЛЯ ОБОИХ МЕТОДОВ

$$q_2 = 2q_1^2(1 + (1 - 8H^*(\Delta\theta)^2 q_1^2)^{0.5})^{-1}$$

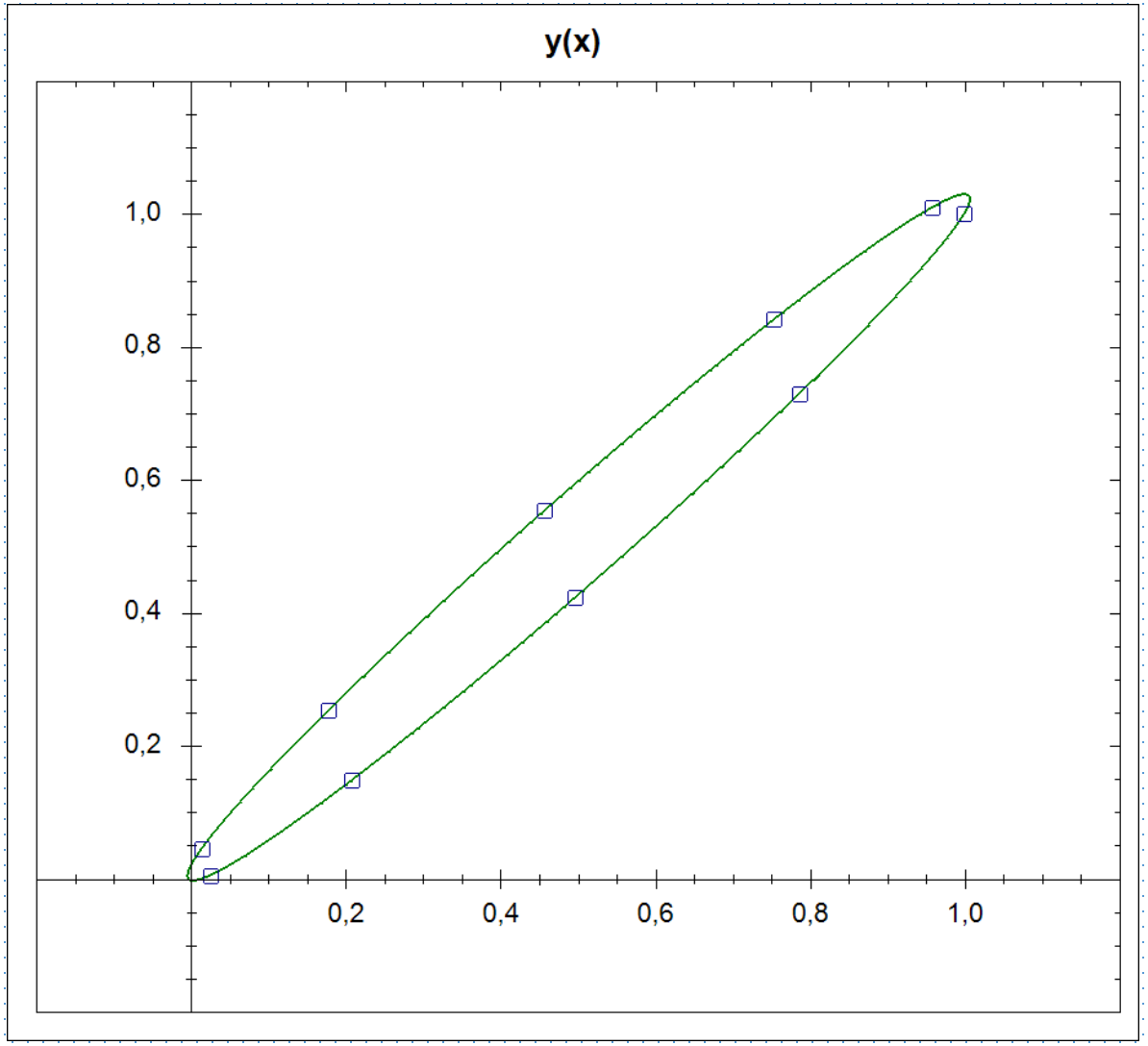
$$q_3 = (H^*)^{-1}(\Delta\theta)^{-2}(1 - q_1)$$

Орбита решения задачи методом SSRK1 (1 период, 100 точек)





Орбита решения задачи методом SSRK1 (1 период, 10 точек)



Орбита решения задачи методом SSRK1 (100 периодов по 10 точек)

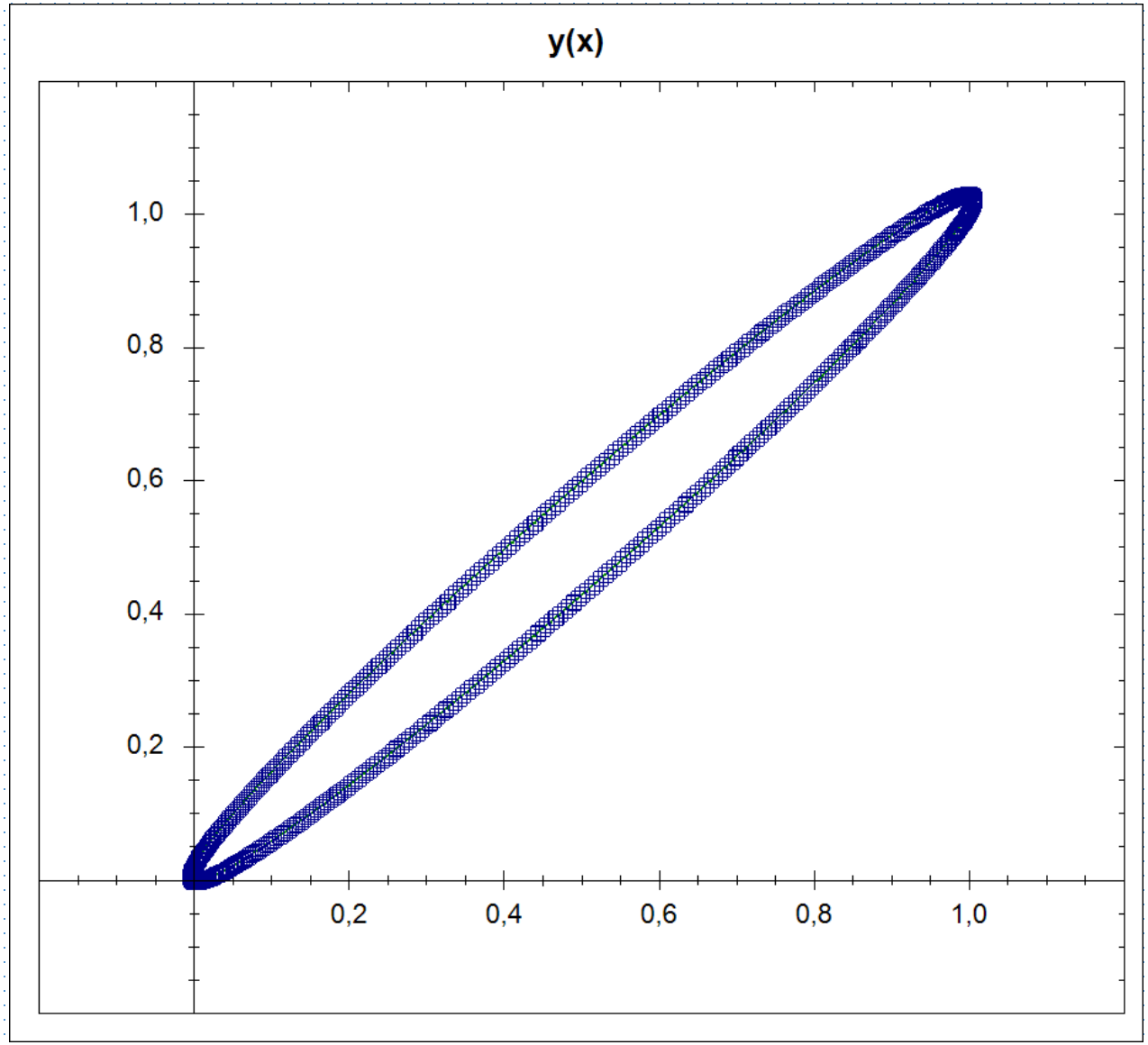
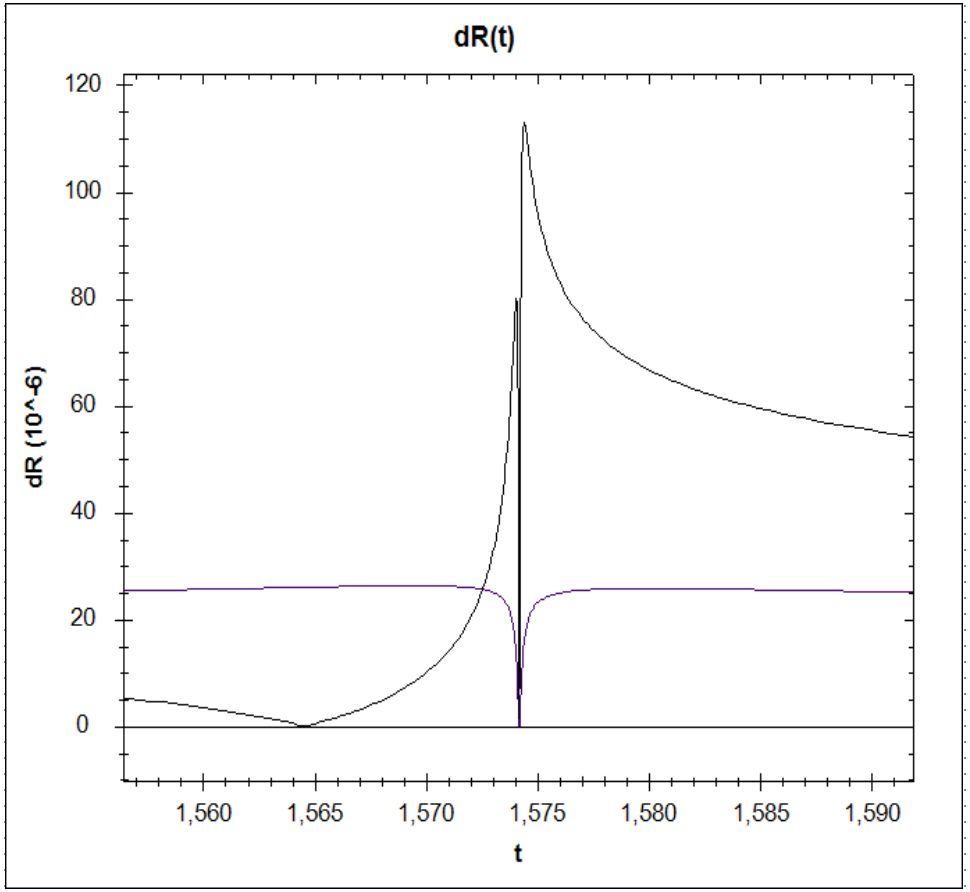


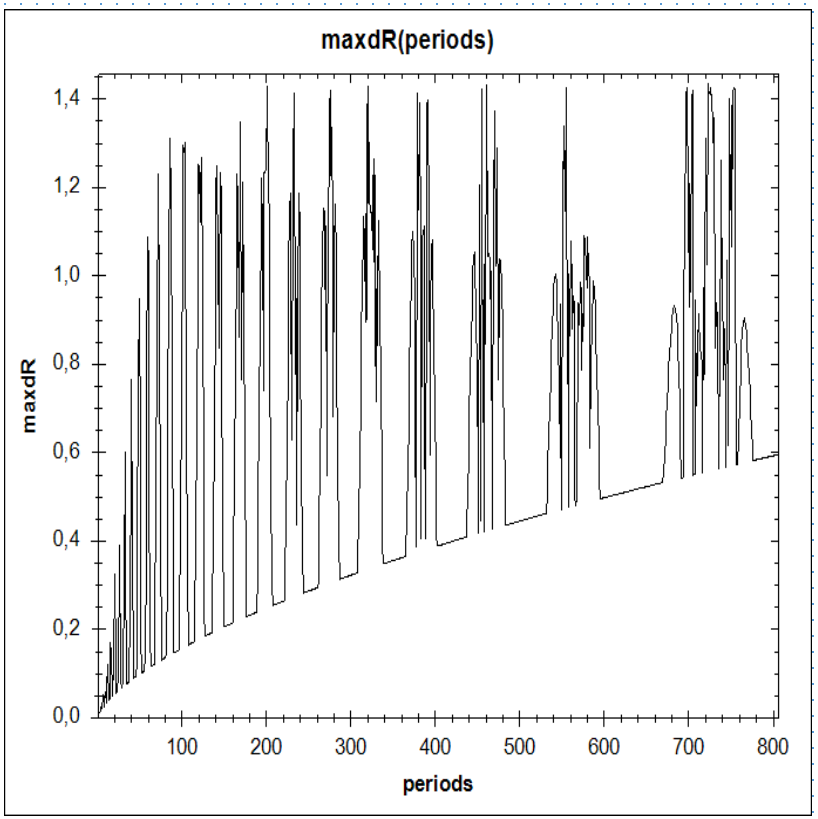
График погрешностей dR(t) метода SSRK3 и SSRK1 (за один период, 1000 точек)

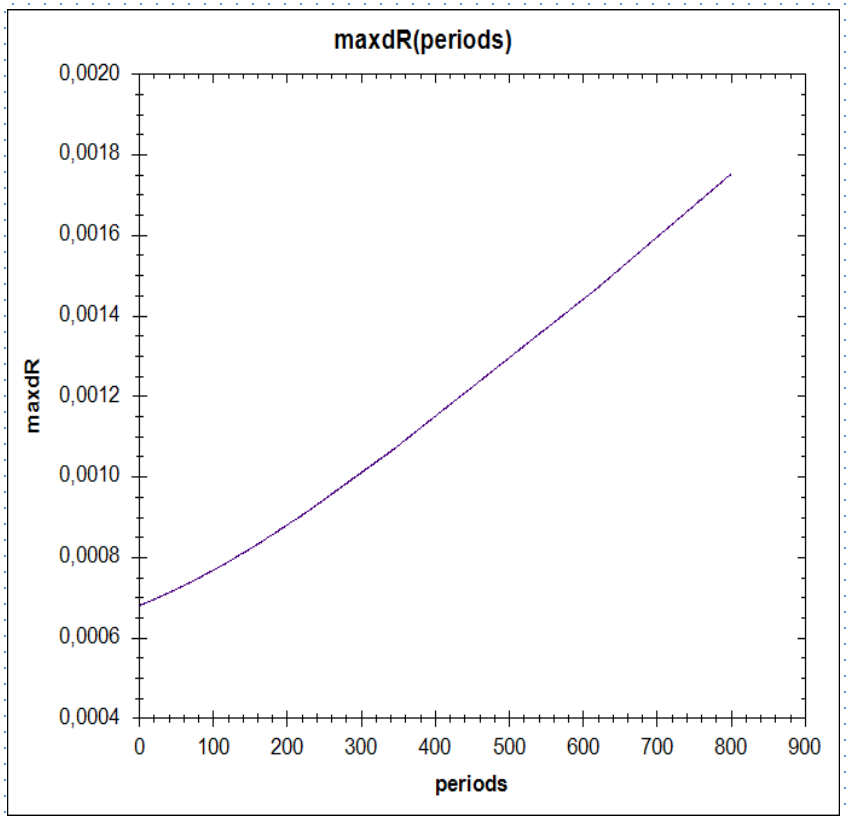


SSRK1: max dR = $1{,}1 * 10^{-4}$

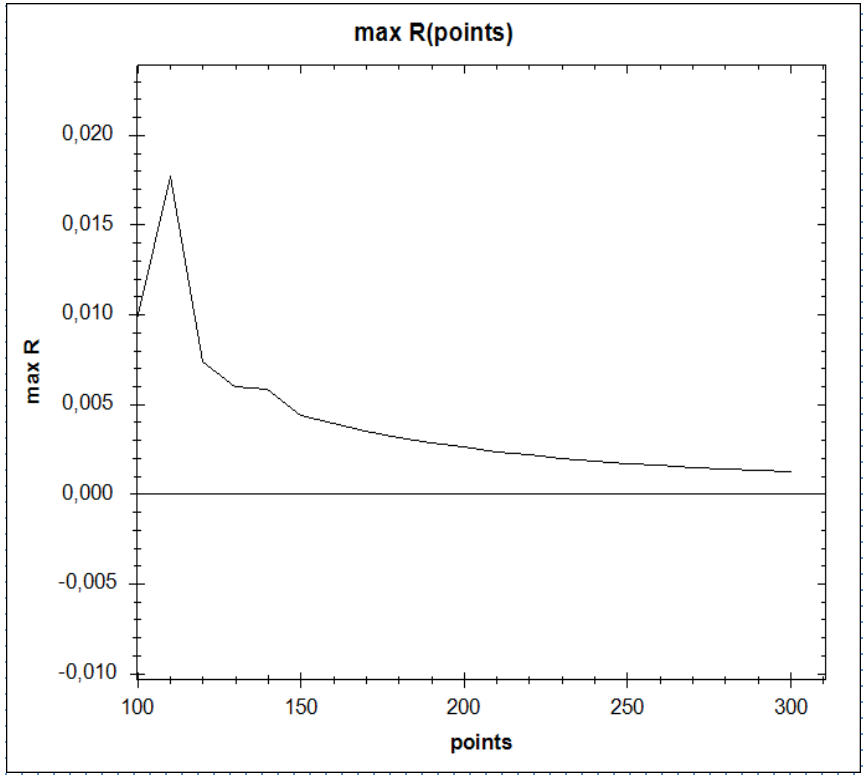
SSRK3: max dR = $2{,}6 * 10^{-5}$

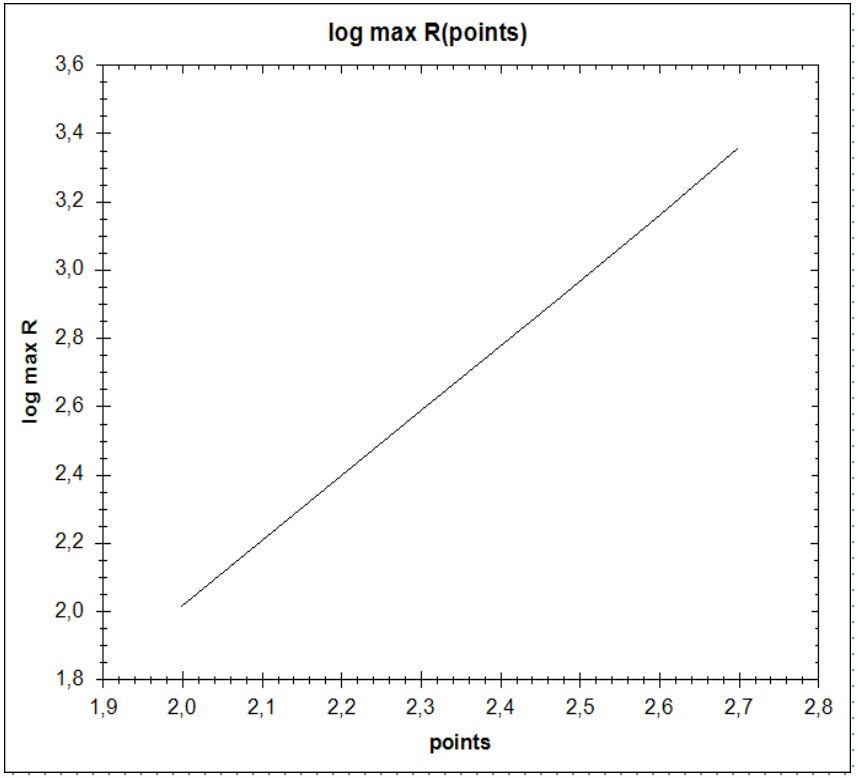
Зависимость максимума погрешности dR метода SSRK1 и SSRK3 (800 периодов по 200 точек) от номера периода





ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ





Зависимость максимальной погрешности метода SSRK1 на первом периоде от количества точек

Зависимость логарифма максимальной погрешности метода SSRK1 на первом периоде от логарифма количества точек

Выводы по результатам эксперимента

1. По результатам экспериментов можно утверждать о непригодности численного одностадийного симплектического метода Рунге-Кутты для решения задачи Кеплера с большим эксцентриситетом.

2. Экспериментально подтверждено, что новые адаптивные методы сохраняют все глобальные свойства. Они сохраняют орбиту на больших интервалах времени, но при этом не сохраняют период точного решения, что приводит к возникновению немонотонной зависимости погрешности на периоде от числа периодов.

3. Сравнение SSRK1 и SSRK3 при одинаковых начальных данных выявило преимущество метода SSRK3 при расчетах на больших промежутках времени.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Создан программный комплекс “Иоганн” с широкими возможностями анализа результатов вычислительных экспериментов по изучению свойств как точных решений задачи Кеплера, так и численных методов ее решения.

2. С помощью программного комплекса было подробно проанализировано поведение точного решения и сделаны выводы о необходимости адаптивного выбора шага численных методов для эффективных расчетов орбит с большим эксцентриситетом.

3. Исследовано поведение метода средней точки и новых адаптивных методов, проведен их сравнительный анализ. Наглядно показано преимущество новых методов.

ВЫРАЖАЮ БЛАГОДАРНОСТЬ

НАУЧНОМУ РУКОВОДИТЕЛЮ

ГЕОРГИЮ ГЕОРГИЕВИЧУ ЕЛЕНИНУ

И ВСЕМУ ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ КОЛЛЕКТИВУ
КАФЕДРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ
ЗА ПРЕДОСТАВЛЕННЫЕ ЗНАНИЯ,

А ТАКЖЕ СВОИМ СОРАТНИКАМ СТУДЕНТАМ
ЗА ПОМОЩЬ И ПОДДЕРЖКУ