ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ МНОЖЕСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОР

ЕЛЕНИН ГЕОРГИЙ ГЕОРГИЕВИЧ

АВТОР:

ОВСЕПЯН ЭРИК ВАРДАНОВИЧ

Математическое моделирование движения множества взаимодействующих материальных точек

- Постановка задачи
- Программа «Кеплер»
- Точное решение
- Решение задачи популярными методами
- Решение задачи новыми адаптивными методами
- Исследование точности адаптивных методов
- Экспериментальное определение порядка аппроксимации
- Результаты работы

Задача о движении в центральном поле ньютоновского потенциала

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial H(v_x,\ v_y,\ x,\ y)}{\partial x} = -\gamma M x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial H(v_x,\ v_y,\ x,\ y)}{\partial y} = -\gamma M y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H(v_x, v_y, x, y)}{\partial v_x} = v_x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial H(v_x, v_y, x, y)}{\partial v_y} = v_y$$

$$v_x(0) = v_{x,0}, \qquad v_y(0) = v_{y,0},\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$$

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 \neq 0,\ x_0 v_{x,0} \neq y_0 v_{y,0}$$

где функция Гамильтона $H = H(v_x, v_y, x, y)$ имеет вид

$$H(v_x, v_y, x, y) = 0.5(v_x^2 + v_y^2) - \gamma M r^{-1} + H^*,$$

$$H^* = -0.5(v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2) + \gamma M r_0^{-1}, \qquad r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{0.5}$$

Глобальные свойства задачи

- симплектичность решения

Преобразование $(V_0, X_0)^T \Longrightarrow (V(t), X(t))^T$ симплектично, если

$$\Phi(t)^T \Lambda \Phi(t) = \Lambda$$

$$\Phi(t) = \frac{\partial(V(t), X(t))}{\partial(V_0, X_0)}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- сохранение полной энергии

$$H(t) = \frac{v_x^2(t) + v_y^2(t)}{2} - \frac{gM}{r(t)}$$

- сохранение момента количества движения

$$l_z(t) = x(t)v_y(t) - y(t)v_x(t)$$

- сохранение вектора Лапласа – Рунге - Ленца

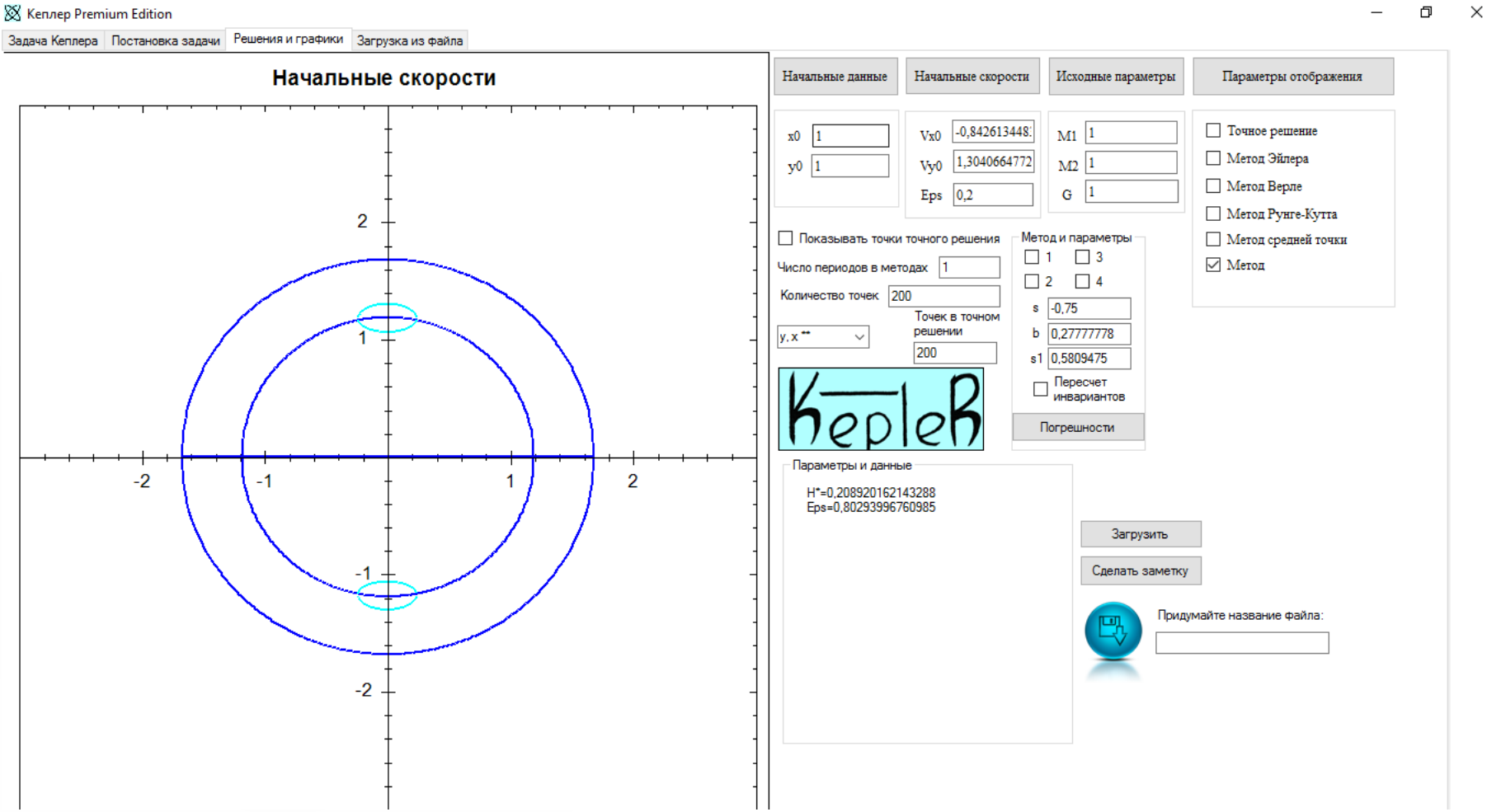
$$e_{LRLx}(t) = v_y(t)l_z - \frac{gM}{r(t)}x(t)$$

$$e_{LRLy}(t) = v_x(t)l_z - \frac{gM}{r(t)}y(t)$$

Цель исследования

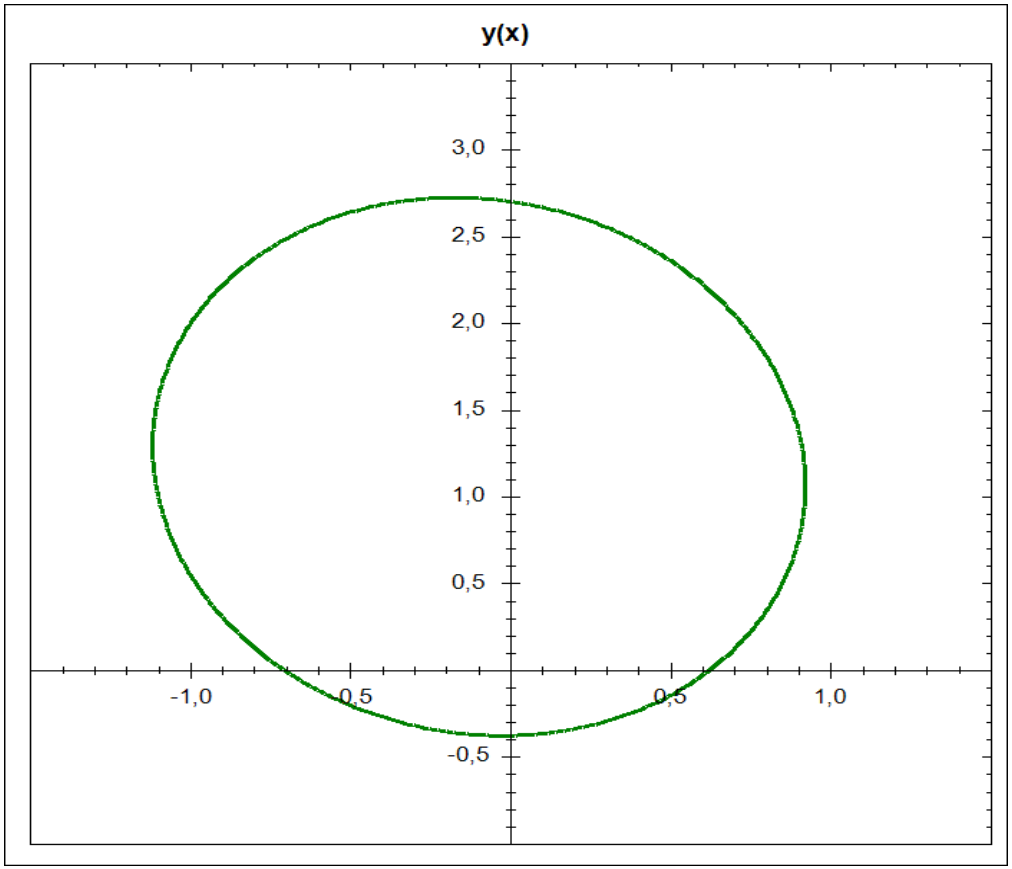
- Разработка и анализ нового класса численных методов, сохраняющих максимальное количество глобальных свойств в рамках идеальной арифметики.

Программа «Кеплер».



Расчеты точного решения и графическое представление результатов.

Случай малого эксцентриситета

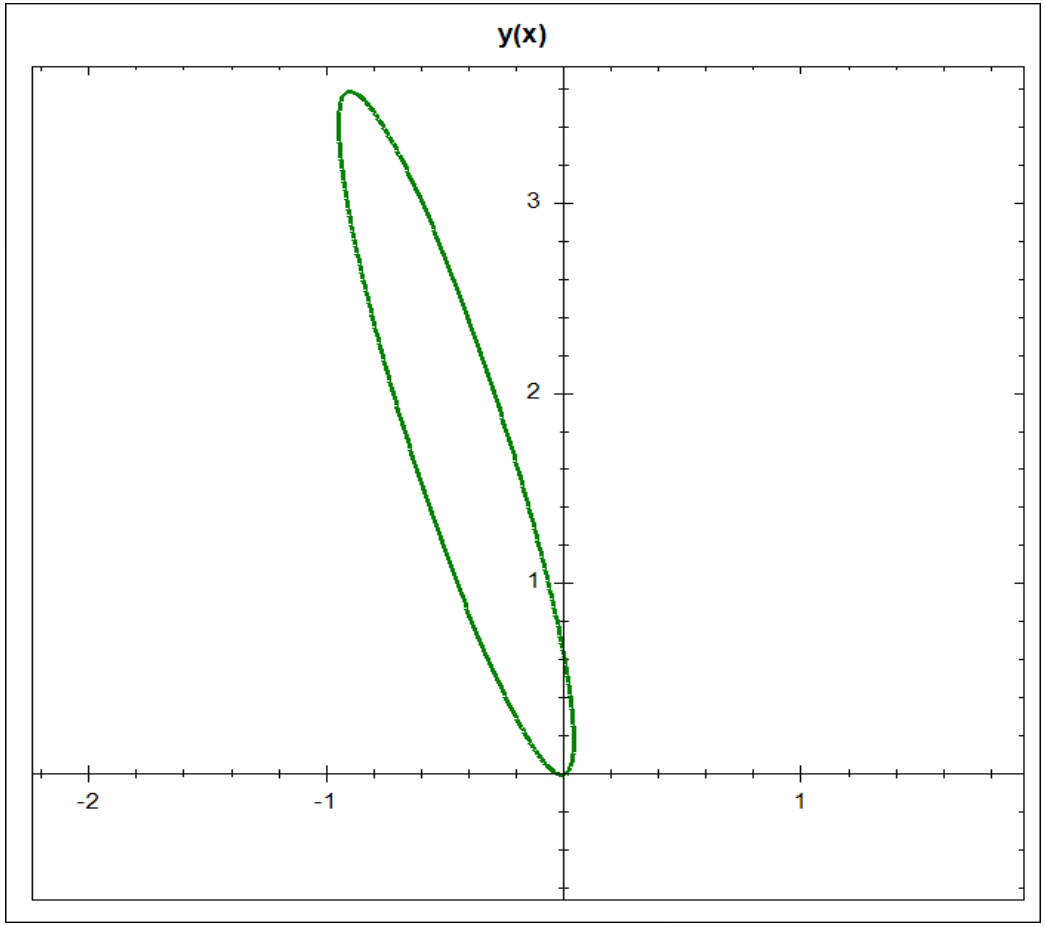


$$G = 1,$$
$$M_1 = 1,$$
$$M_2 = 1,$$
$$x_0 = 0{,}921,$$
$$y_0 = 1{,}116,$$
$$v_{x,0} = -0{,}029,$$
$$v_{y,0} = 1{,}215,$$
$$\varepsilon = 0.073$$

Орбита финитного движения H*>0

Расчеты точного решения и графическое представление результатов.

Случай эксцентриситета близкого к



$$G = 1,$$
$$M_1 = 1,$$
$$M_2 = 1,$$
$$x_0 = -0{,}038,$$
$$y_0 = 0{,}327,$$
$$v_{x,0} = -0{,}275,$$
$$v_{y,0} = 3{,}316,$$
$$\varepsilon = 0.82$$

Орбита финитного движения H*>0

Известные численные методы с постоянным шагом

- Метод Верле

  - симплектический

  - не сохраняет полную энергию и вектор Лапласа-Рунге-Ленца

  - имеет второй порядок аппроксимации

- Явный метод Рунге-Кутты

  - не сохраняет глобальные свойства

  - не является симплектическим

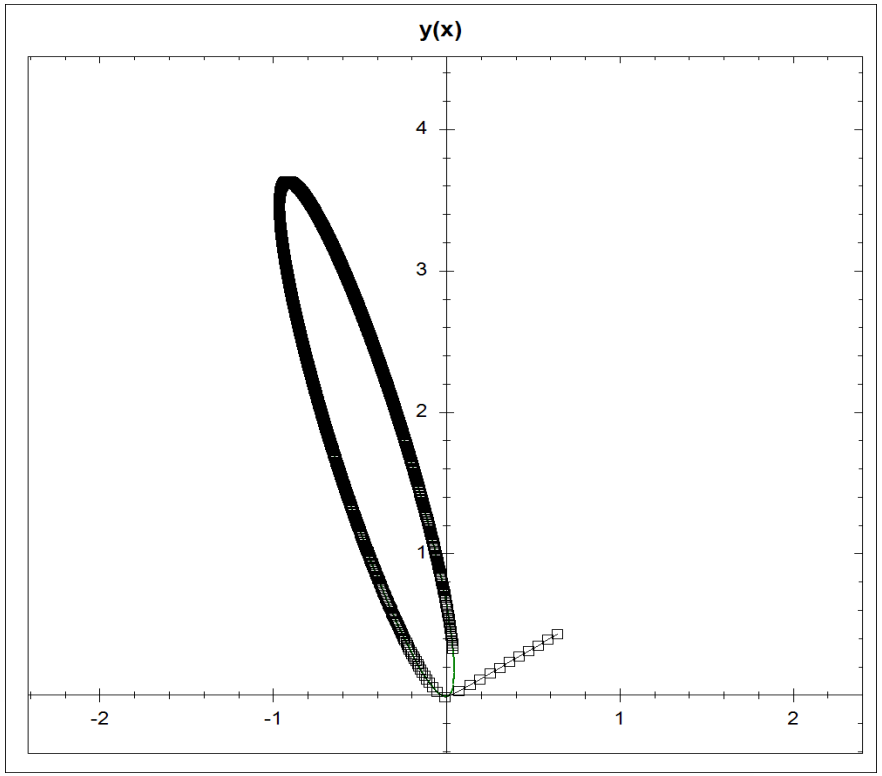
  - не сохраняет полную энергию, момент импульсов, вектор Л-Р-Л

  - имеет четвертый порядок аппроксимации

Метод Рунге-Кутты 4го порядка

Случай эксцентриситета близкого к единице.

1 период, 4000 точек на период



Орбита, вычисленная методом Р-К4 и точная орбита (зеленая линия)

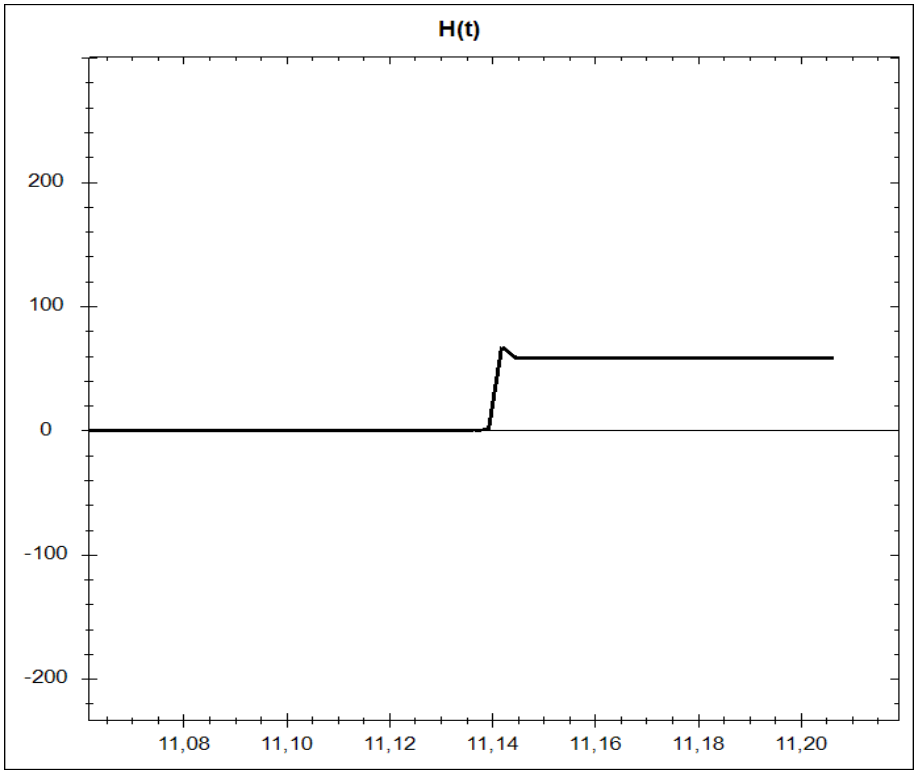
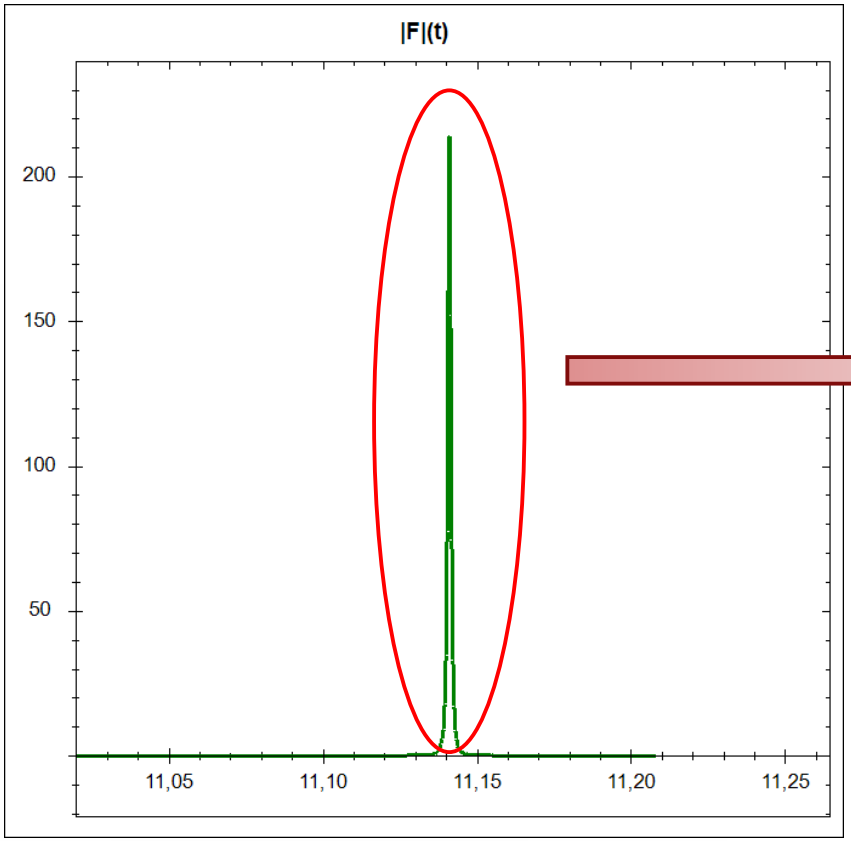
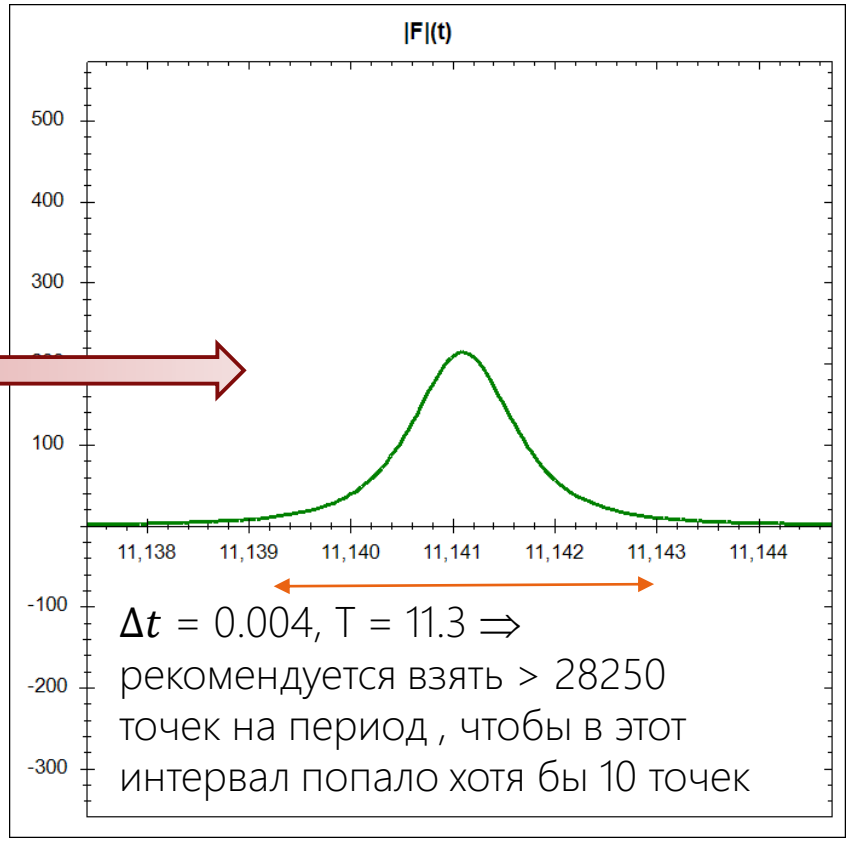


График зависимости $H(t) - H(0)$ от t

Подбор шага



Зависимость модуля силы от времени

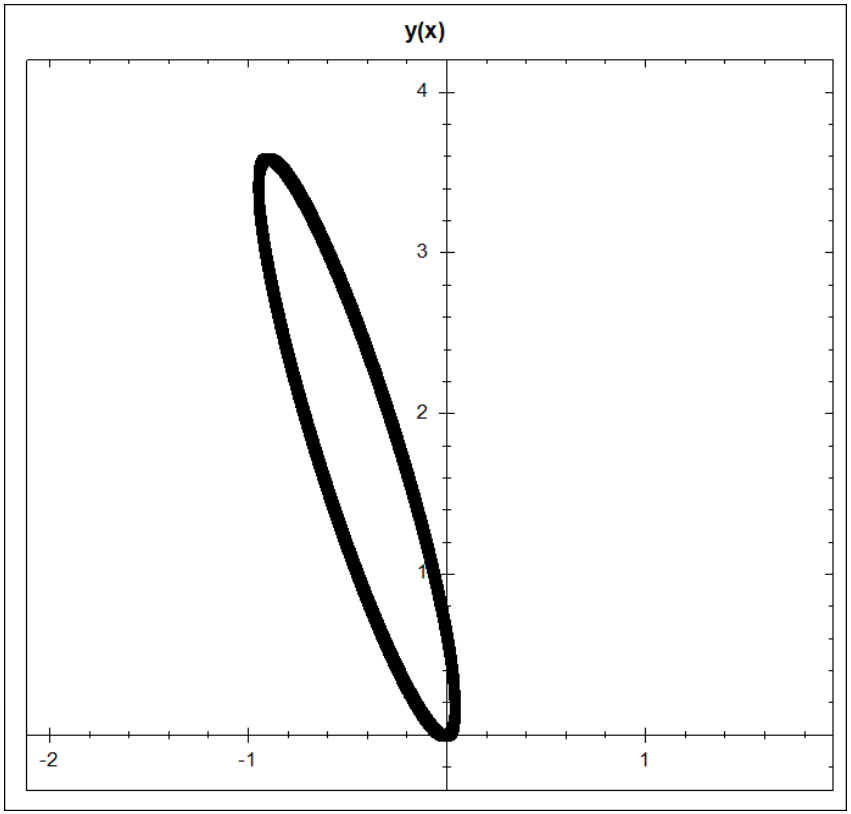


Зависимость модуля силы от времени (увеличение)

Метод Рунге-Кутты 4го порядка

Случай эксцентриситета близкого к единице.

1 период, 30000 точек на период



Орбита, вычисленная методом Р-К4

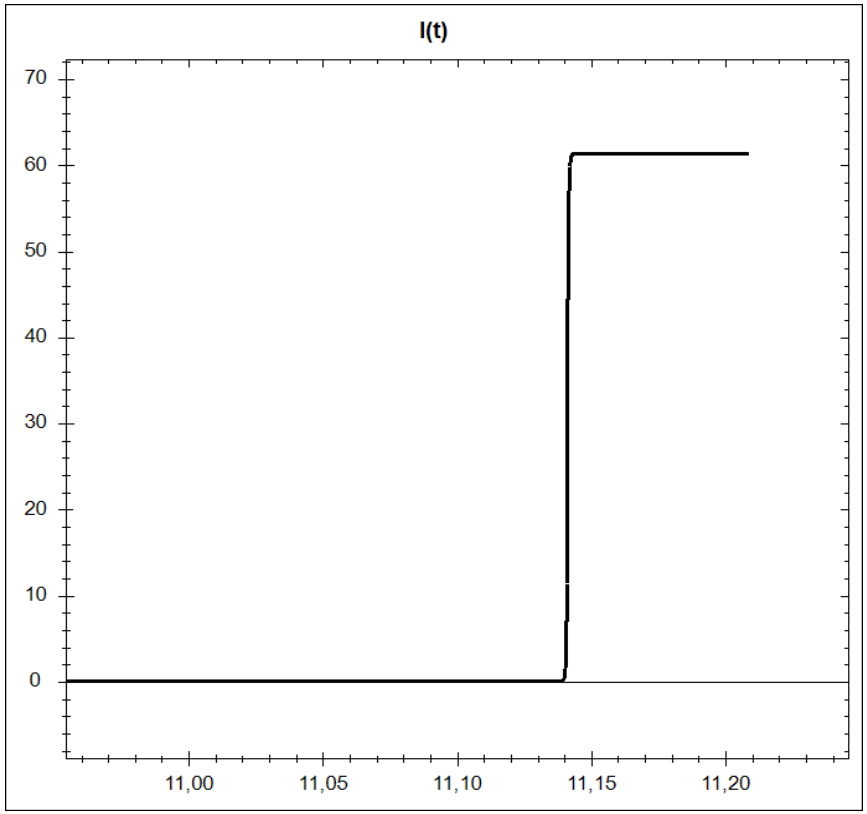
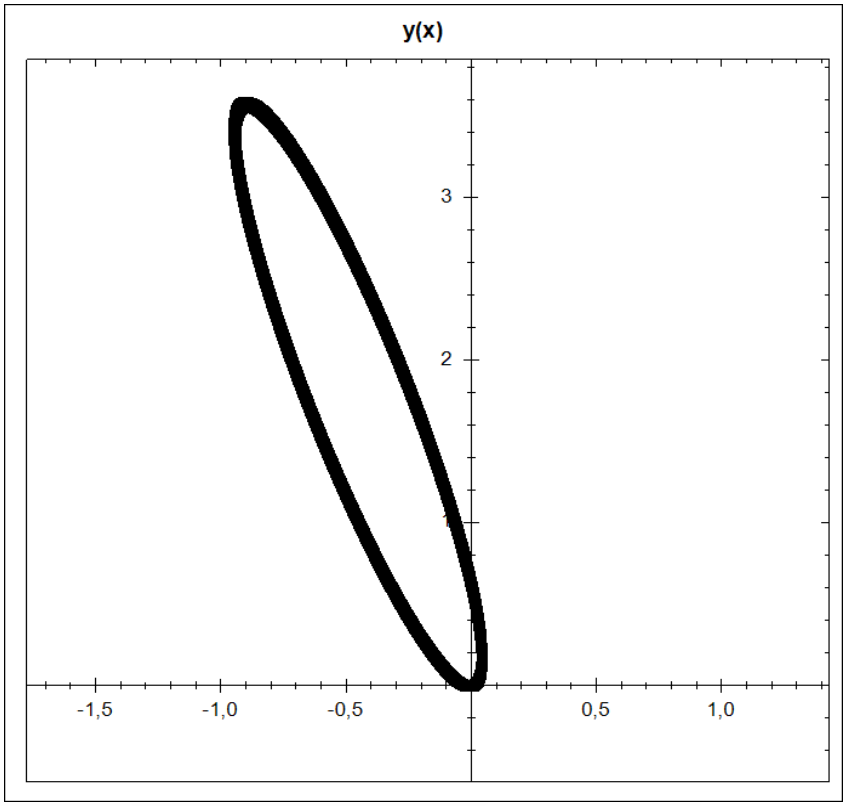


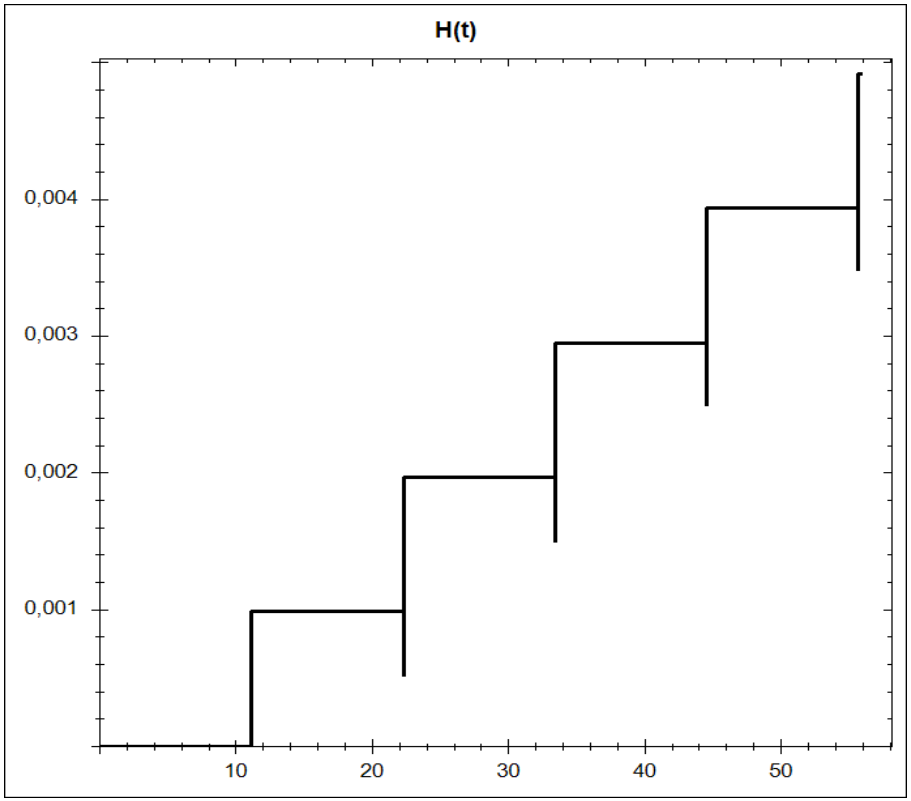
График зависимости $l(t) - l(0)$ от t

Метод Рунге-Кутты 4го порядка

Случай эксцентриситета близкого к единице.

6 периодов, 80000 точек на период





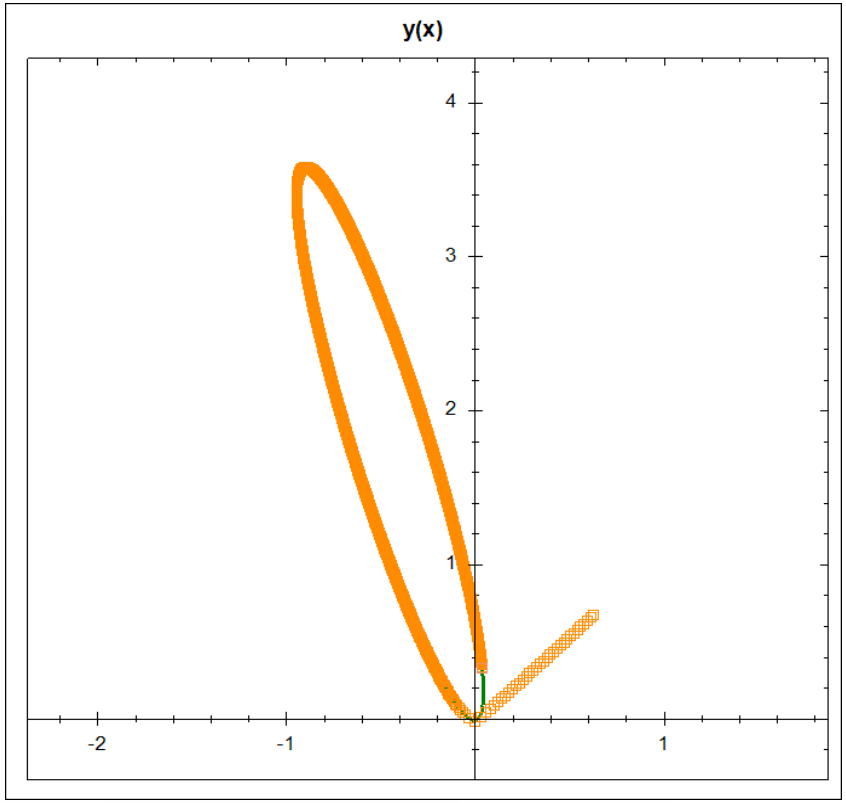
Орбита, вычисленная методом Р-К4

График зависимости $\mathrm{H(t)} - \mathrm{H(0)}$ от t

Метод Верле

Случай эксцентриситета близкого к единице.

1 период, 4000 точек на период



Орбита, вычисленная методом Верле

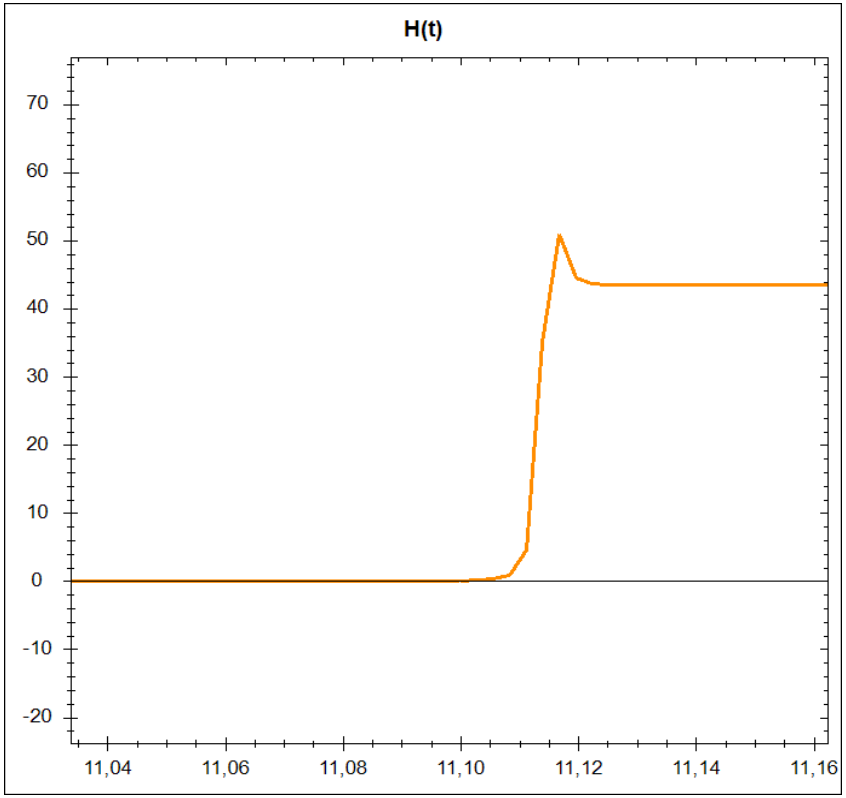
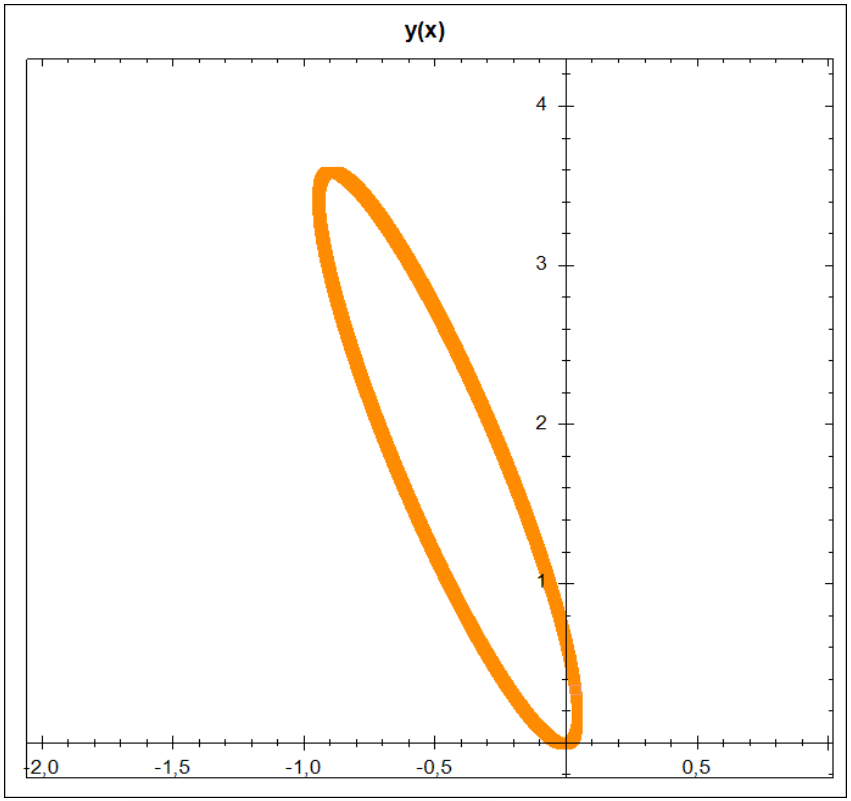


График зависимости $H(t) - H(0)$ от t

Метод Верле

Случай эксцентриситета близкого к единице.

6 периодов, 80000 точек на период



Орбита, вычисленная методом Верле

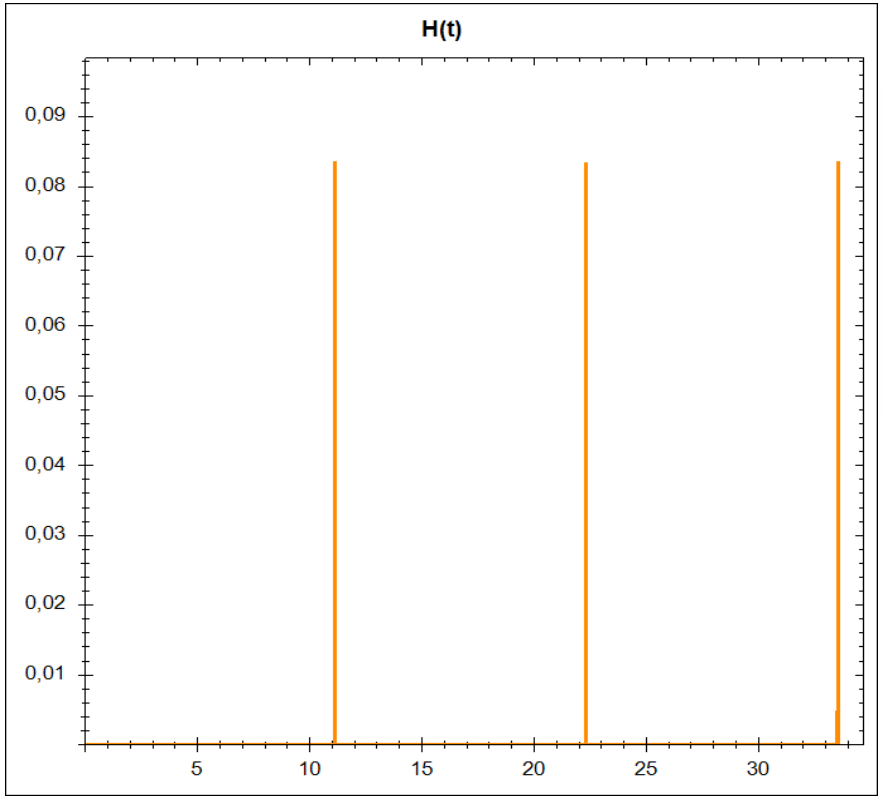
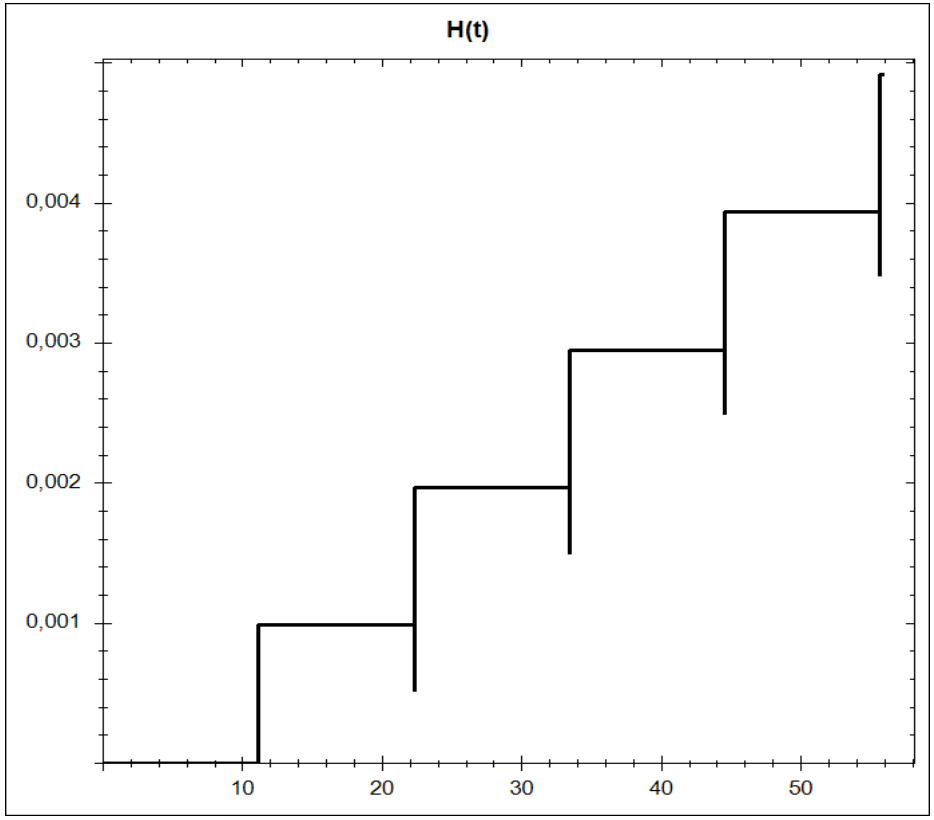
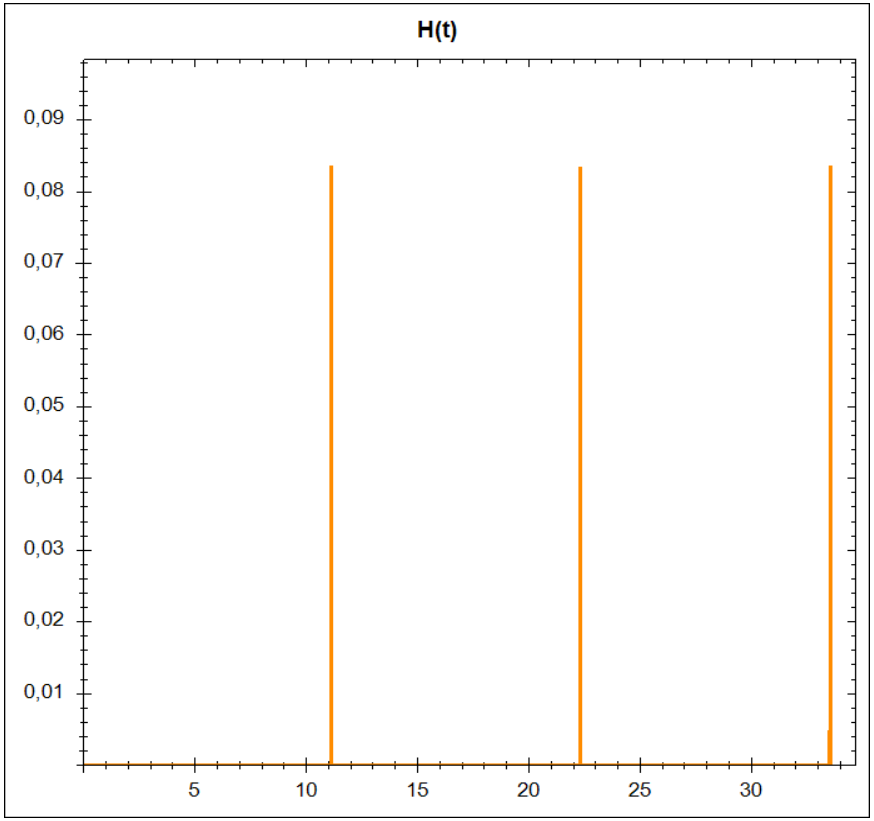


График зависимости $H(t) - H(0)$ от t

Сравнение зависимостей $H(t) - H(0)$ от t, полученных методами Р-К и Верле

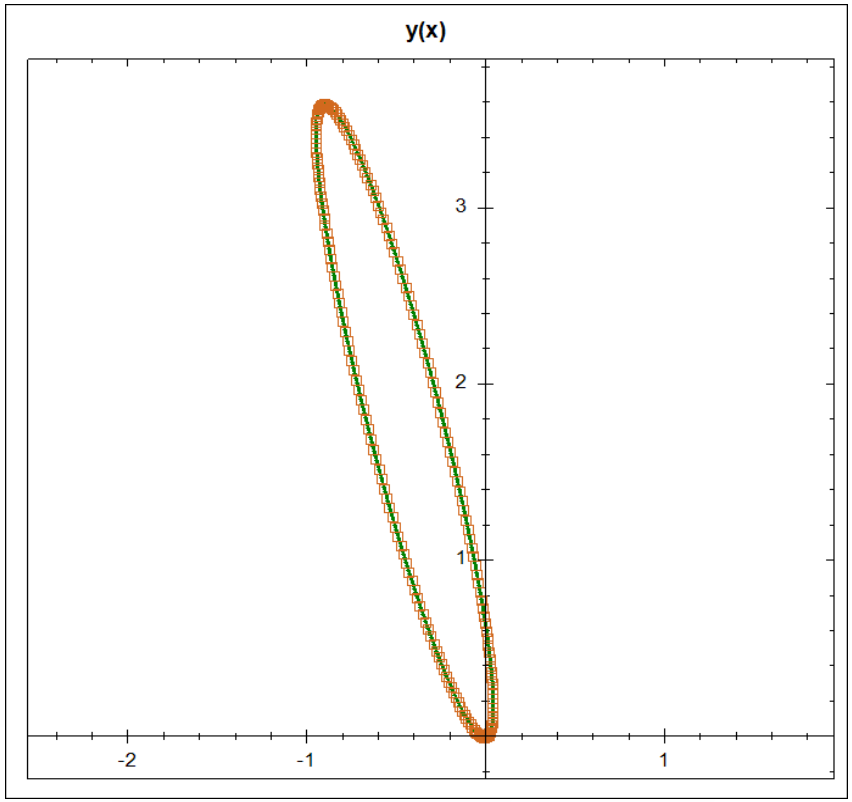


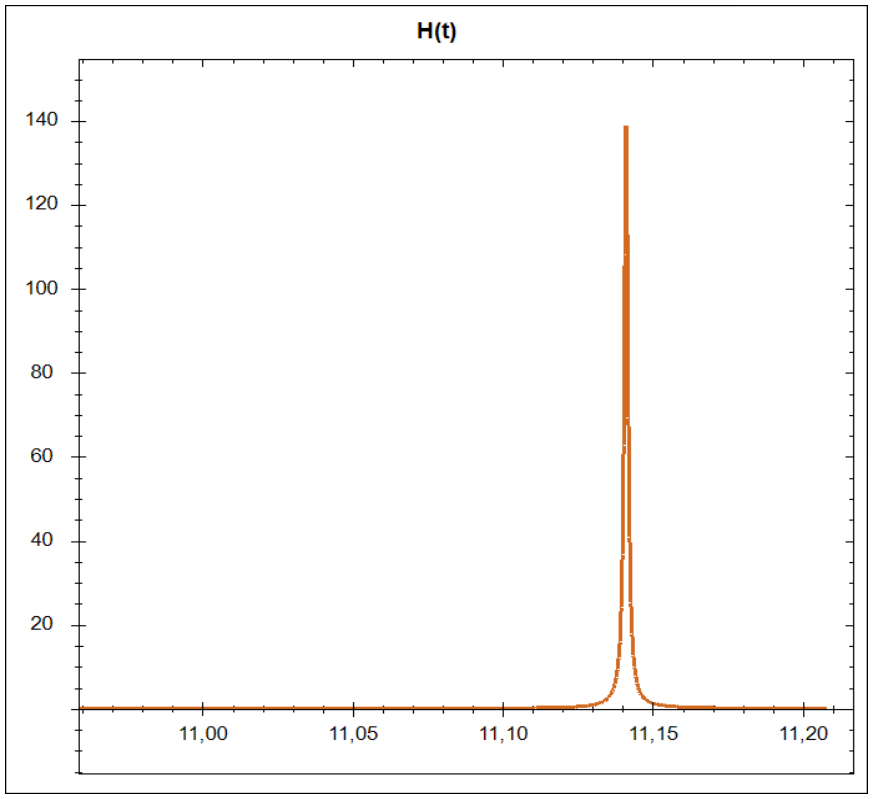


Метод с адаптивным шагом SSRK2

Случай эксцентриситета близкого к единице.

1 период, 200 точек на период





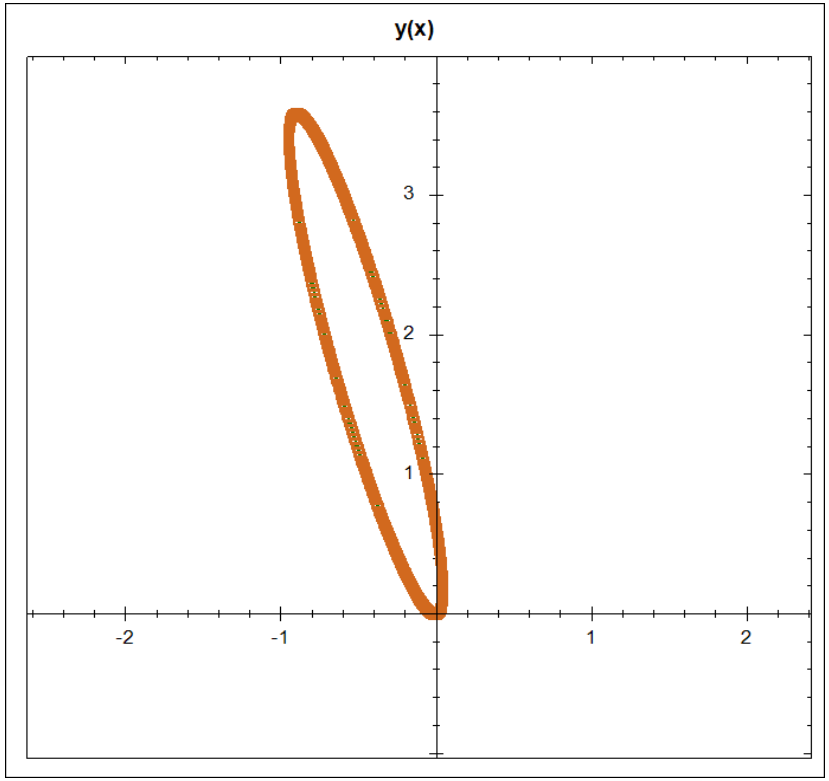
Орбита, вычисленная методом SSRK2

График зависимости $H(t) - H(0)$ от t

Метод с адаптивным шагом SSRK2

Случай эксцентриситета близкого к единице.

10 период, 2000 точек на период



Орбита, вычисленная методом SSRK2

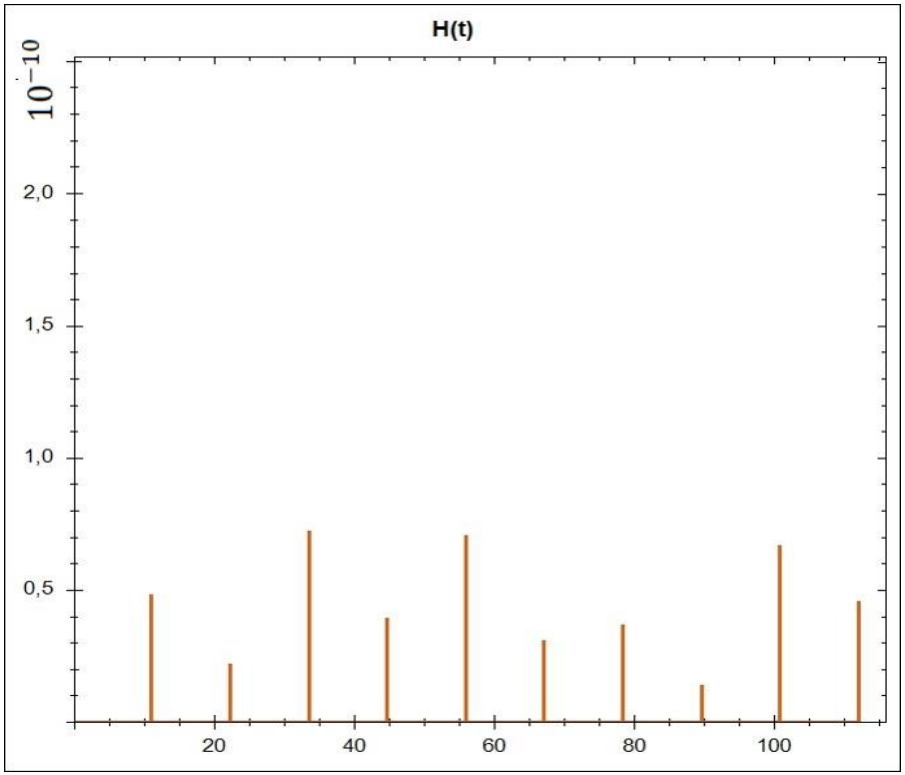
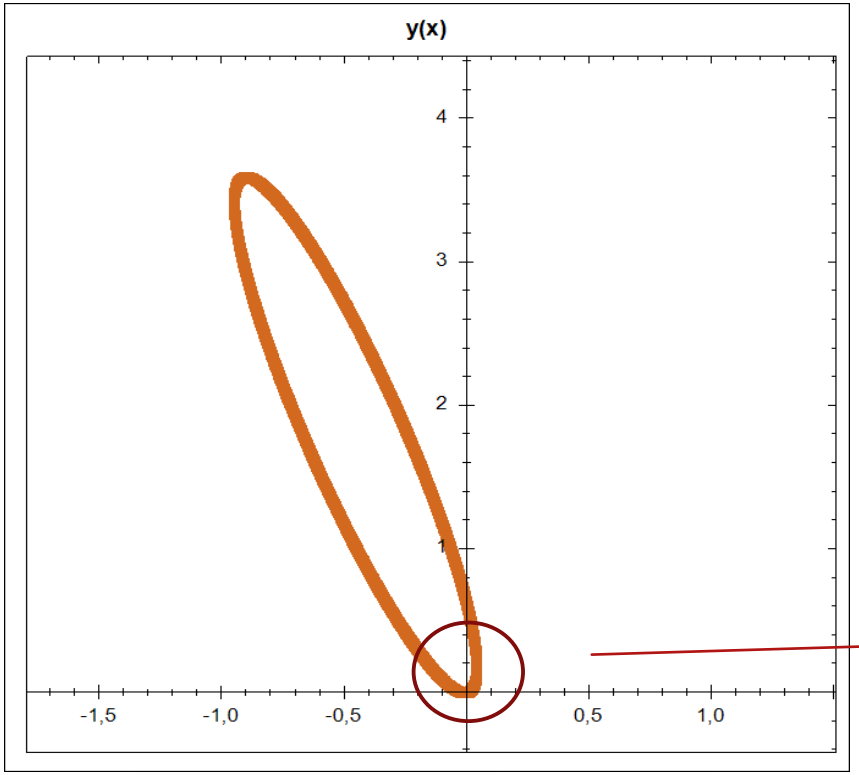


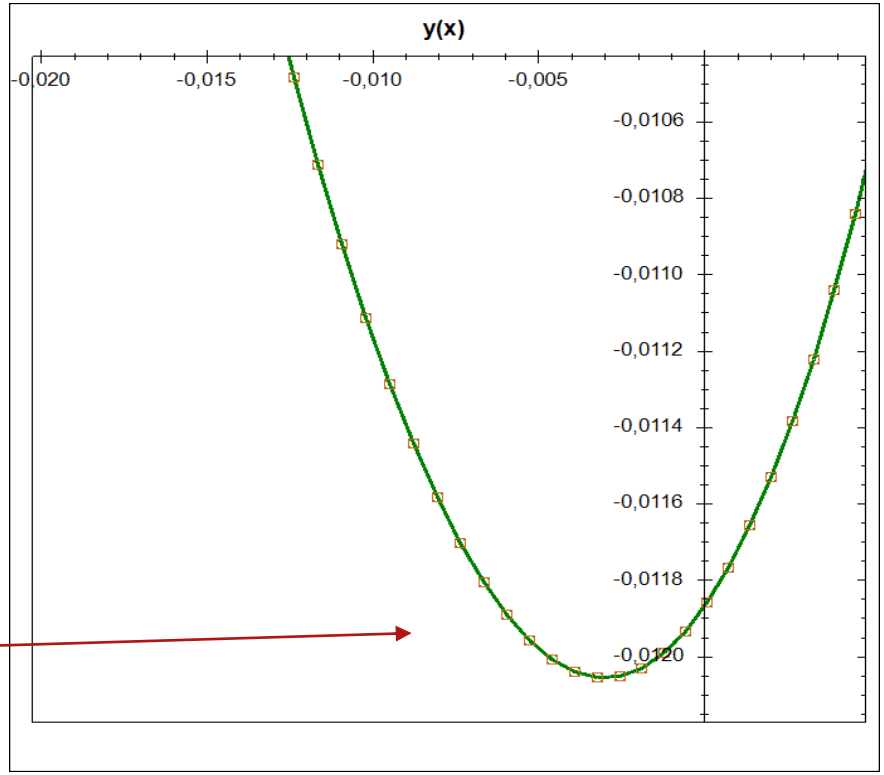
График зависимости $H(t) - H(0)$ от t

Метод с адаптивным шагом SSRK2

Случай эксцентриситета близкого к единице.

1 период, 2000 точек



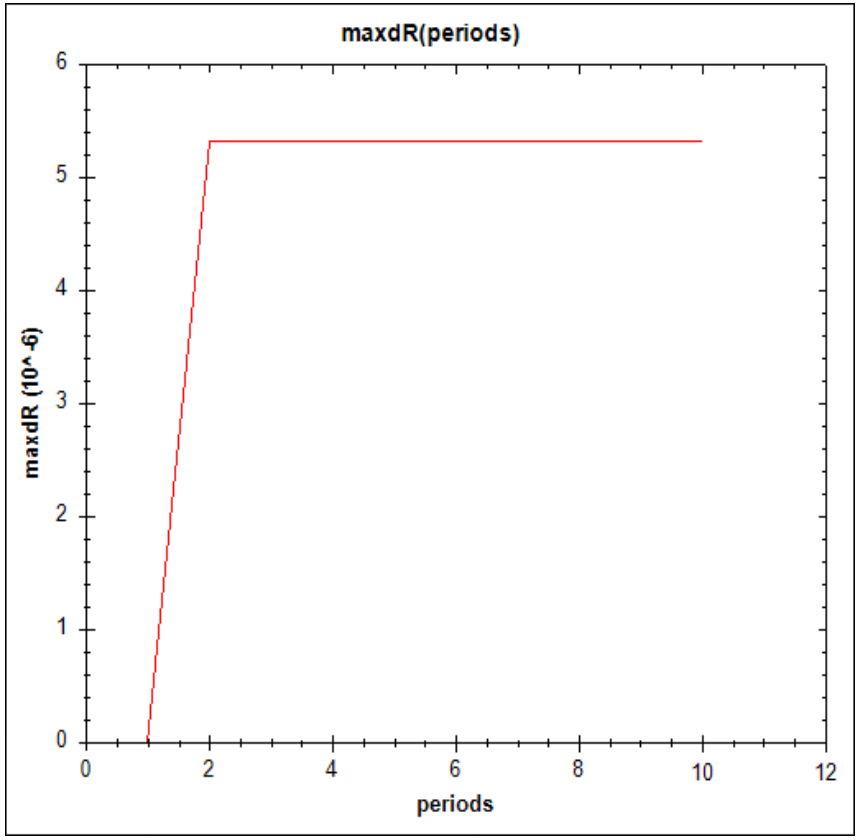


Орбита, вычисленная методом SSRK2

Адаптивность шага

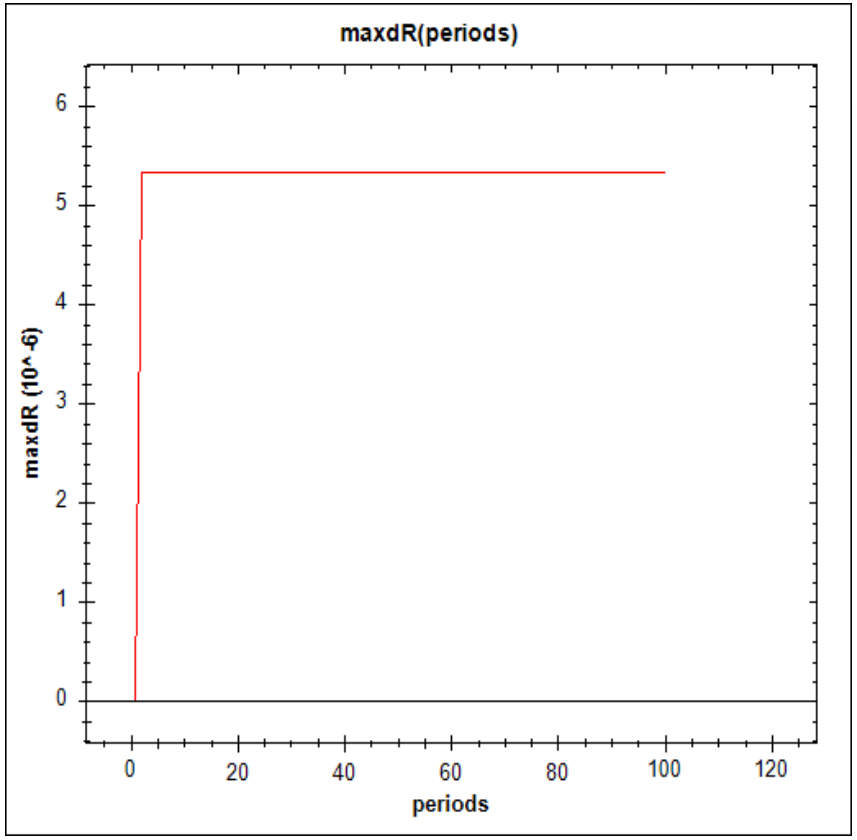
Исследование точности численного решения, полученного методом SSRK2.

10 периодов, 2000 точек на период



Зависимость максимальной погрешности на периоде от номера периода

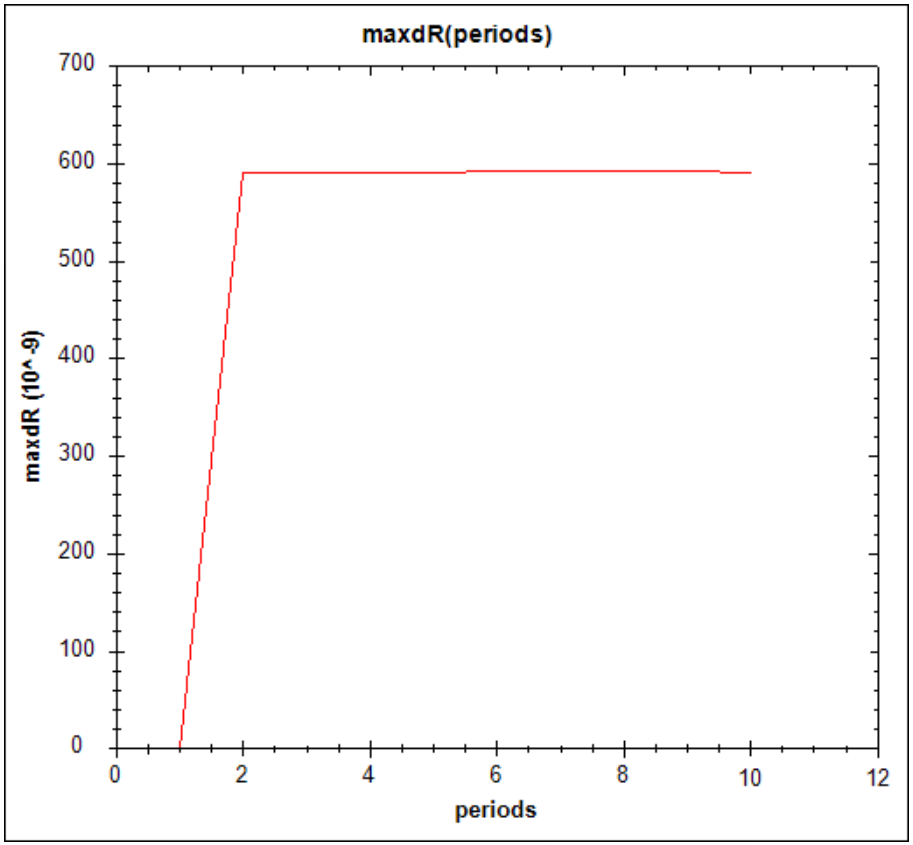
100 периодов, 2000 точек на период



Зависимость максимальной погрешности на периоде от номера периода

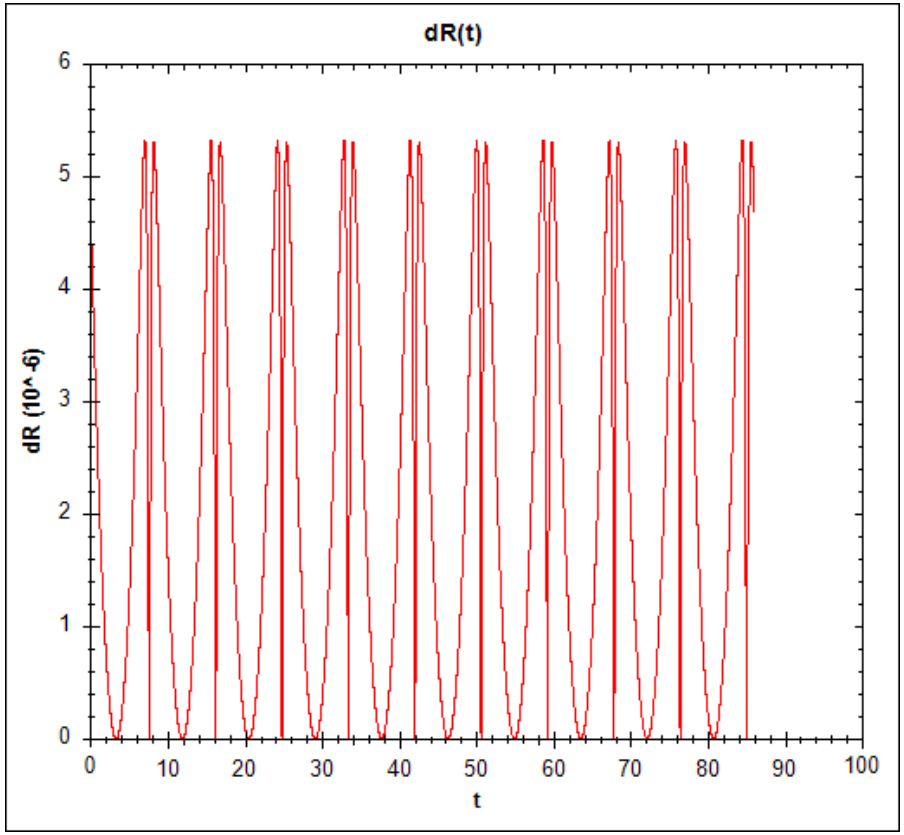
Исследование точности численного решения, полученного методом SSRK2.

10 периодов, 6000 точек на период



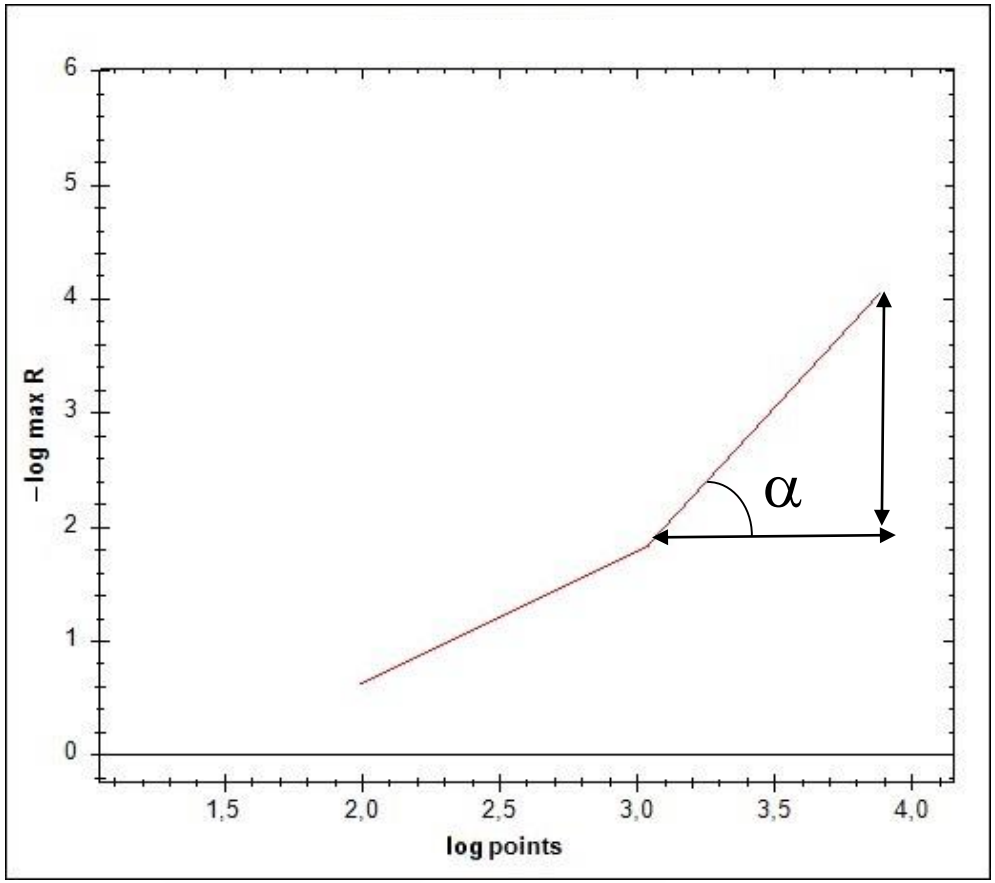
Зависимость максимальной погрешности на периоде от номера периода

2000 точек на период



Зависимость погрешности от времени

Экспериментальное определение порядка точности метода SSRK2.



Зависимость - логарифма максимальной погрешности от логарифма числа точек на период.

Тангенс угла наклона прямой показывает порядок аппроксимации решения методом SSRK2.

Второй порядок точности.

Результаты работы.

- Создана компьютерная программа «Кеплер»
- Детально изучено поведение точного решения задачи Кеплера. Показана необходимость разработки адаптивных численных методов для расчета орбит с большим эксцентриситетом
- Проведен сравнительный анализ точности распространенных численных методов решения задачи Коши и однопараметрического семейства новых методов, сохраняющих <u>все</u> глобальные свойства точных решений задачи Кеплера.
- Показано преимущество семейства новых адаптивных симплектических консервативных методов решения задачи Кеплера