Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Майоров Петр Александрович

Частично-неявная схема КАБАРЕ для двумерного уравнения мелкой воды

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
В. М. Головизнин

Москва, 2016

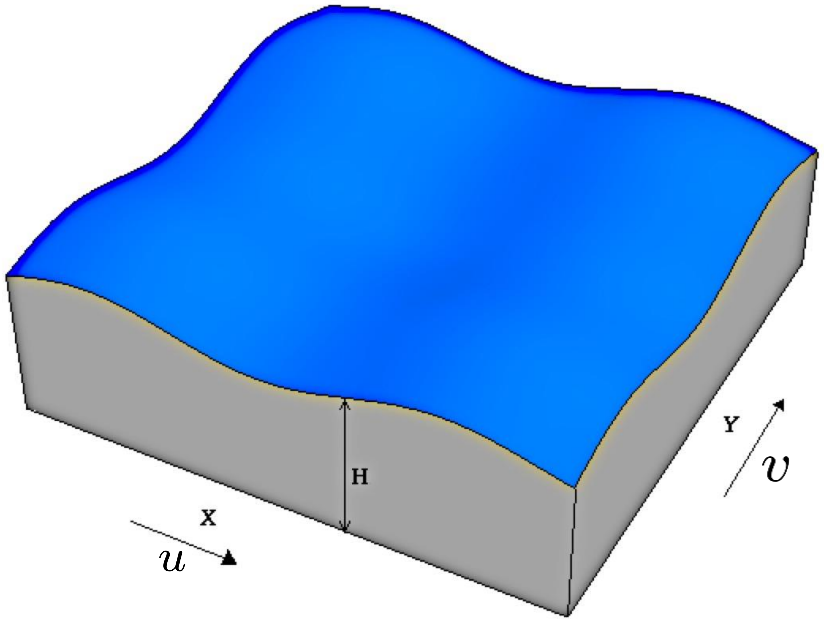
Цель работы

- Построить однопараметрическое семейство неявных разностных схем КАБАРЕ для одномерных уравнений мелкой воды, разработать алгоритм расчета по этим схемам и реализовать его, исследовать свойства получившихся разностных схем.
- Построить частично-неявную схему для двумерных уравнений мелкой воды: явная вдоль одного направления и неявная вдоль другого, разработать алгоритм расчета по этой схеме и реализовать его.

Постановка задачи

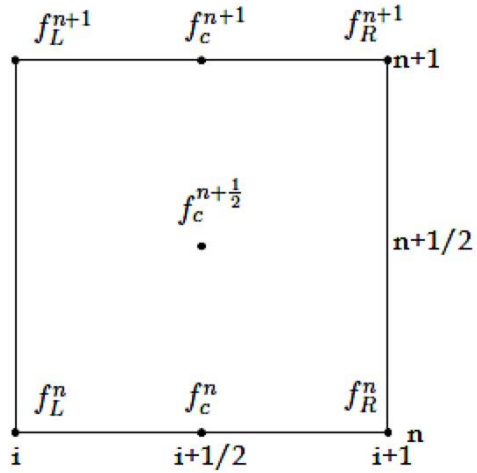
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial Hu}{\partial x} + \dfrac{\partial Hv}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial Hu}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(Hu^2 + P\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial Huv}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial Hv}{\partial t} + \dfrac{\partial Huv}{\partial x} + \dfrac{\partial \left(Hv^2 + P\right)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

, где $P = \frac{g}{2}H^2$



Однопараметрическое семейство неявных разностных схем КАБАРЕ для простейшего уравнения переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\ \ c = const > 0$$



$$f_c^{n+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f(x_i + 0.5\cdot h, t^n + 0.5\cdot\tau)$$
$$f_c^n = f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(x_i + 0.5\cdot h, t^n)$$
$$f_R^n = f_{i+1}^n = f(x_i + h, t^n)$$
$$f_L^n = f_i^n = f(x_i, t^n)$$

Разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_c^{n+1/2} - \varphi_c^n}{\tau/2} + c\left[(1-\sigma)\frac{\varphi_R^n - \varphi_L^n}{h} + \sigma\frac{\varphi_R^{n+1} - \varphi_L^{n+1}}{h}\right] = 0 \\ \varphi_R^{n+1} = 2\varphi_c^{n+1/2} - \varphi_L^n \\ \frac{\varphi_c^{n+1} - \varphi_c^{n+1/2}}{\tau/2} + c\left[\sigma\frac{\varphi_R^n - \varphi_L^n}{h} + (1-\sigma)\frac{\varphi_R^{n+1} - \varphi_L^{n+1}}{h}\right] = 0 \end{cases}$$

Устойчивость и диссипативные свойства

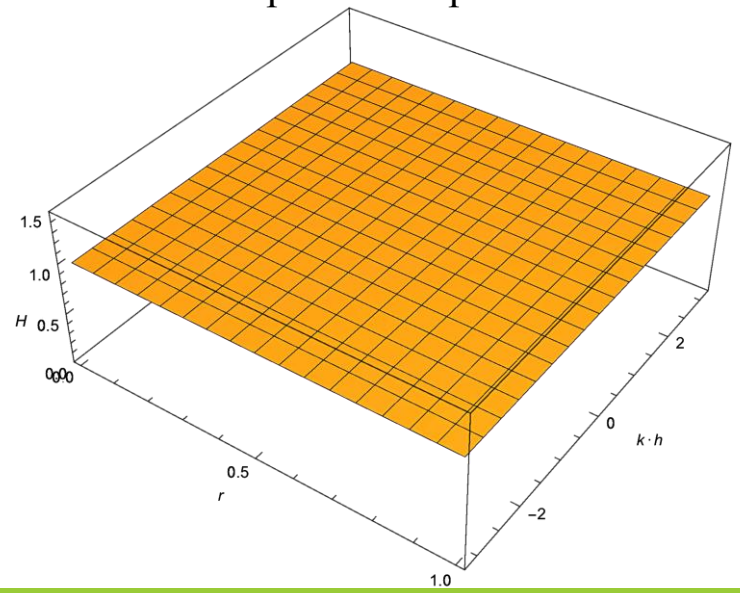
Исследование устойчивости производилось методом гармоник. Подставляя решения в виде бегущей волны в разностную схему, нашли характеристическое уравнение:

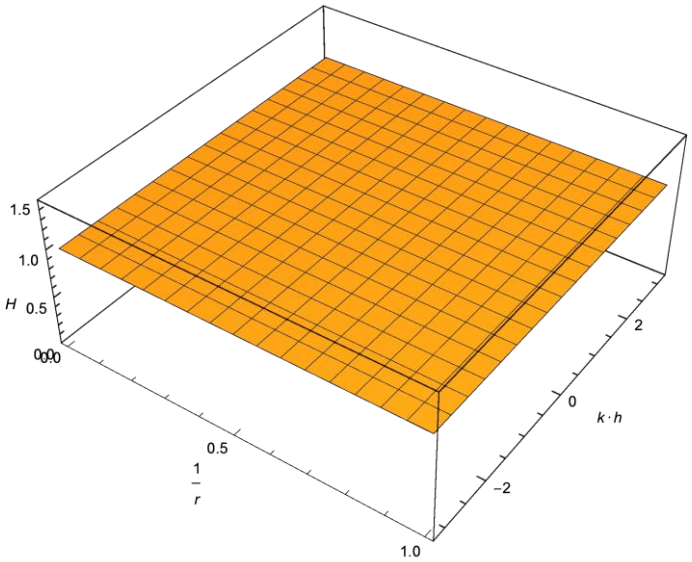
$$\varphi^{n}_{j+1/2} = A \cdot q^{n} \cdot exp(-ik \cdot x_{j+1/2})$$
$$\varphi^{n+1/2}_{j+1/2} = B \cdot q^{n+1/2} \cdot exp(-ik \cdot x_{j+1/2}); \; aq^2 + bq + c = 0, \text{ где } \begin{cases} a = 1 + r(1 - e^{i \cdot kh})\sigma \\ b = -[1 - 2(1-\sigma)r](1 - e^{i \cdot kh}) \\ c = -e^{i \cdot kh} + r(1 - e^{i \cdot kh})\sigma \end{cases}$$
$$\varphi^{n}_{j+1} = C \cdot q^{n} \cdot exp(-ik \cdot x_{j+1})$$

где ω - частота, $q^n = exp(i\omega t_n)$ - неизвестные амплитуды, $r = \frac{c \cdot \tau}{h}$ - число Куранта.

Анализ модулей корней характеристического уравнения показал, что область бездиссипативности схемы расширяется с отрезка r∈ [0,1] при σ = 0 до r ∈ [0, ∞) при σ = 0.5 и далее остается таковой при дальнейшем росте σ, так же при σ ≥ 0.5 схемы являются абсолютно устойчивыми.

Диссипативные поверхности при σ = 0.5:

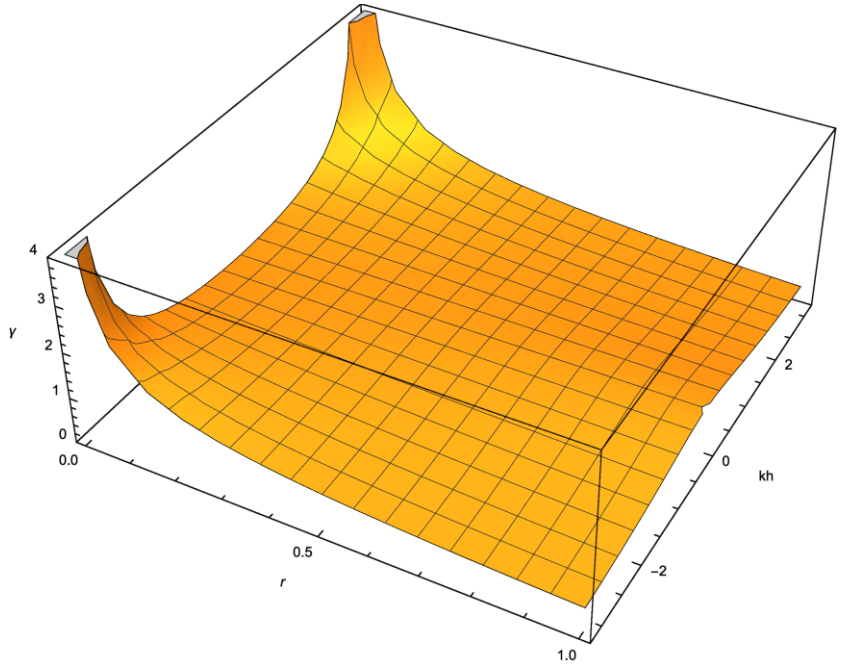


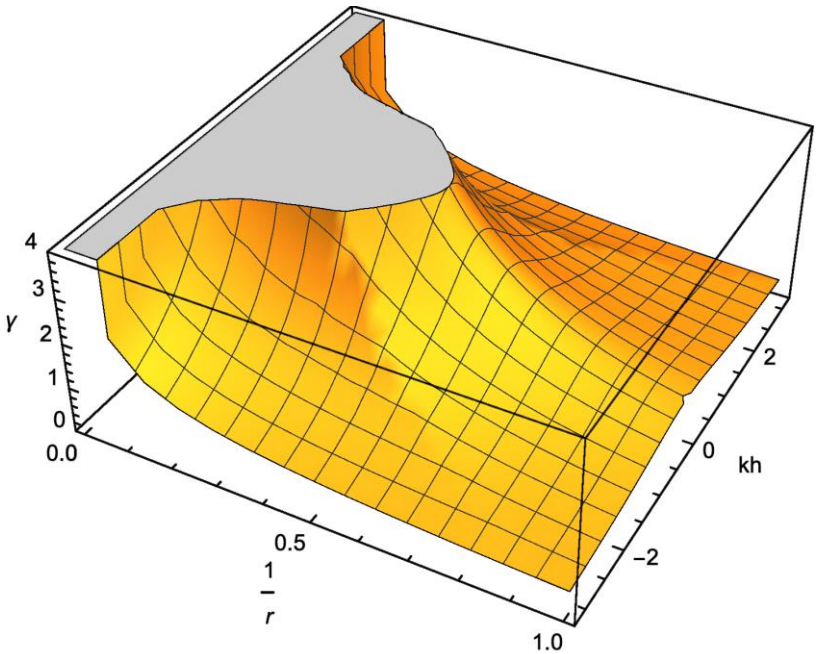


Дисперсионные свойства

Приведенная фазовая скорость гармоники: $$\gamma(r, kh) = \frac{\omega}{ck} = -\frac{i}{r \cdot kh} ln(q)$$

Дисперсионные поверхности при σ = 0.5:





Однопараметрическое семейство неявных разностных схем КАБАРЕ для одномерных уравнений мелкой воды

Первая фаза.

$$\frac{H_c^{n+\frac{1}{2}}-H_c^n}{\tau/2}+\sigma\frac{(Hu)_R^{n+1}-(Hu)_L^{n+1}}{h}+(1-\sigma)\frac{(Hu)_R^n-(Hu)_L^n}{h}=0$$

$$\frac{(Hu)_c^{n+\frac{1}{2}}-(Hu)_c^n}{\tau/2}+\sigma\frac{(Hu^2+P)_R^{n+1}-(Hu^2+P)_L^{n+1}}{h}+(1-\sigma)\frac{(Hu^2+P)_R^n-(Hu^2+P)_L^n}{h}=0$$

Вторая фаза.

$$\begin{cases} R_R^{n+1}=2\cdot R_c^{n+\frac{1}{2}}-R_L^n, \text{ если } u_c^{n+1}+c_c^{n+1}>0 \\ R_L^{n+1}=2\cdot R_c^{n+\frac{1}{2}}-R_R^n, \text{ если } u_c^{n+1}+c_c^{n+1}\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_R^{n+1}=2\cdot Q_c^{n+\frac{1}{2}}-Q_L^n, \text{ если } u_c^{n+1}-c_c^{n+1}>0 \\ Q_R^{n+1}=2\cdot Q_c^{n+\frac{1}{2}}-Q_L^n, \text{ если } u_c^{n+1}-c_c^{n+1}\le 0, \end{cases}$$

где $R=u+2c,\ Q=u-2c,\ c=\sqrt{gH}.$

Третья фаза.

$$\frac{H_c^{n+1}-H_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2}+(1-\sigma)\frac{(Hu)_R^{n+1}-(Hu)_L^{n+1}}{h}+\sigma\frac{(Hu)_R^n-(Hu)_L^n}{h}=0$$

$$\frac{(Hu)_c^{n+1}-(Hu)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2}+(1-\sigma)\frac{(Hu^2+P)_R^{n+1}-(Hu^2+P)_L^{n+1}}{h}+\sigma\frac{(Hu^2+P)_R^n-(Hu^2+P)_L^n}{h}=0$$

Алгоритм численного решения

Получившуюся нелинейную систему уравнений решаем методом Ньютона относительно инвариантов в центрах пространственно-временных ячеек. Учитывая вторую фазу и выражения:

$u = \dfrac{R+Q}{2},\ H = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{R-Q}{4}\right)^2$, получим:

$$\frac{H^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - H^{n}_{i+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(Hu)^{n+1}_{i+1} - (Hu)^{n+1}_{i}}{h} = f^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}\left(R^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{(Hu)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - (Hu)^{n}_{i+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(Hu^2+P)^{n+1}_{i+1} - (Hu^2+P)^{n+1}_{i}}{h} = f^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}\left(R^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}, Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}\right)$$

На каждой итерации решается следующая система:

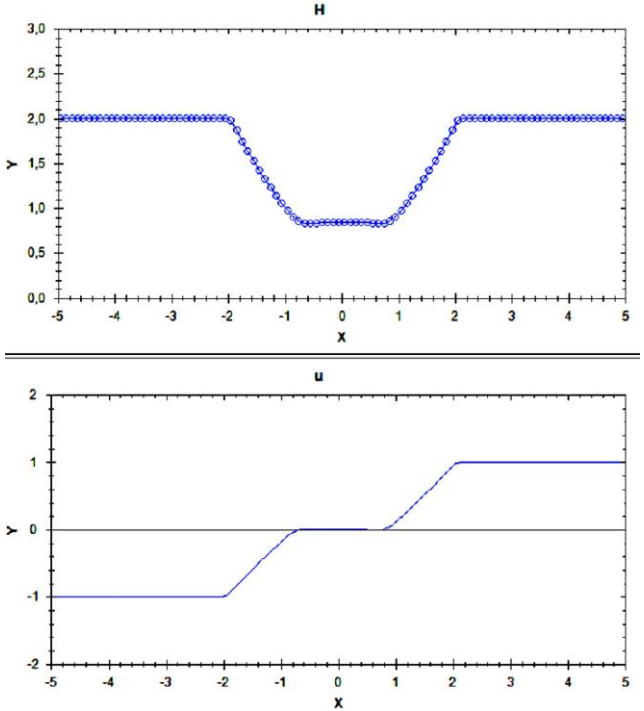
$$W^s \begin{pmatrix} \Delta R^{s+1} \\ \Delta Q^{s+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}^s,\ s = 0, 1, 2, \ldots \qquad W = \begin{pmatrix} -C_0 & B_0 & 0 & & & & & \\ A_1 & -C_1 & B_1 & & \cdots & & 0 & \\ 0 & A_2 & -C_2 & & & & & \\ & & & \ddots & B_{i-1} & 0 & & \\ & \vdots & & A_i & -C_i & B_i & & \vdots \\ & & & 0 & A_{i+1} & \ddots & & \\ & & & & & & -C_{N-2} & B_{N-2} & 0 \\ & 0 & & & \cdots & & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ & & & & & & 0 & A_N & -C_N \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial f^1_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{\partial f^2_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial f^2_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},\ B_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}} & \dfrac{\partial f^1_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial f^2_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}} & \dfrac{\partial f^2_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{3}{2}}} \end{bmatrix},\ C_i = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial f^1_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{\partial f^2_i}{\partial Q^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}} & \dfrac{\partial f^2_i}{\partial R^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

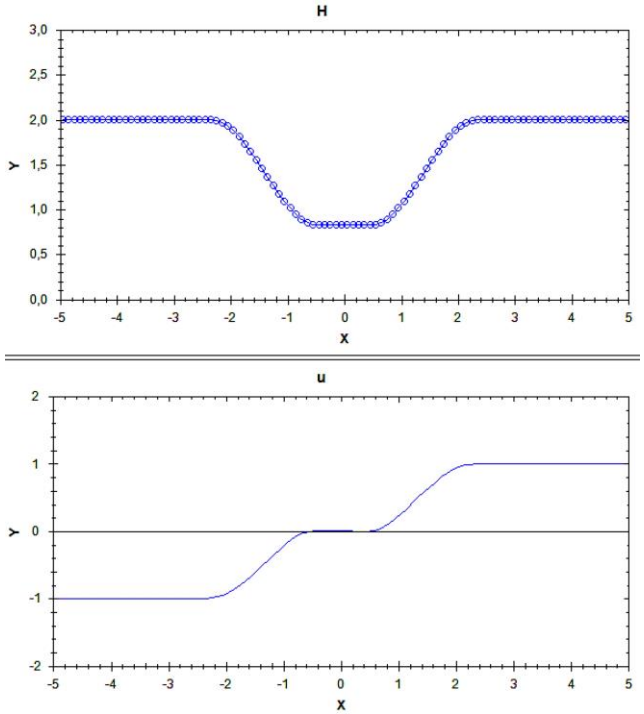
Расчет распада разрыва: две волны разрежения

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & , x \in [-5,0) \\ 1 & , x \in [0,5] \end{cases} \qquad H(X,0) = 2 \quad , x \in [5,5]$$

$$R(-5,t) = const, \ t \in (0,T); \qquad Q(5,t) = const, \ t \in (0,T)$$



σ=0



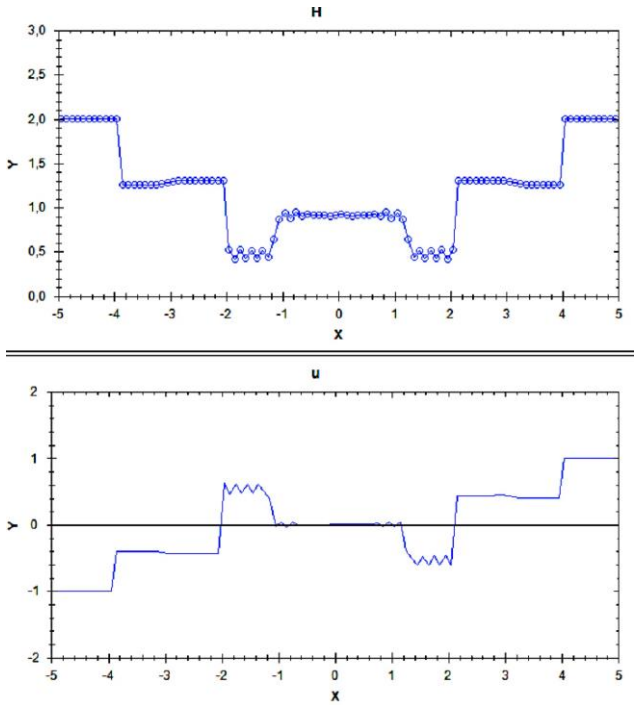
σ=1

100 расчетных ячеек, r = 0.2, 100 шагов по времени

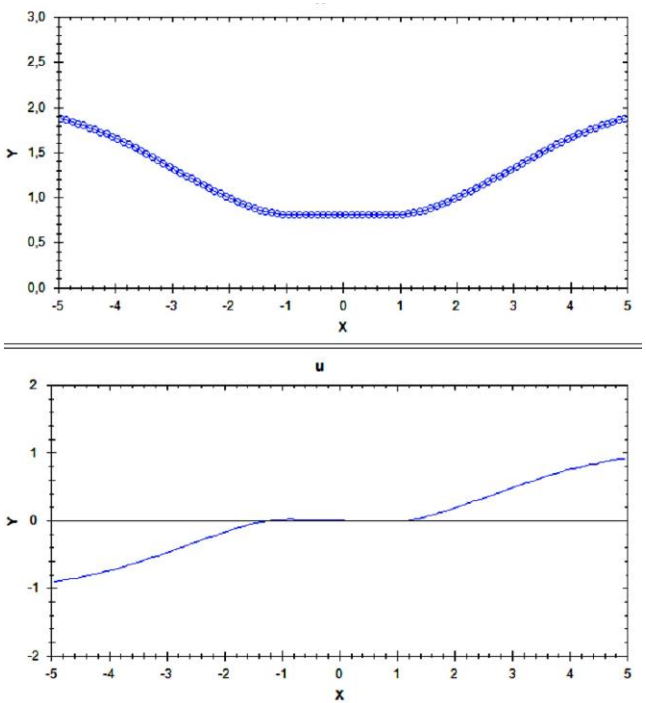
Расчет распада разрыва: две волны разрежения

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & , x \in [-5,0) \\ 1 & , x \in [0,5] \end{cases} \qquad H(X,0) = 2 \quad , x \in [5,5]$$

$$R(-5,t) = const, \ t \in (0,T); \qquad Q(5,t) = const, \ t \in (0,T)$$



σ=0



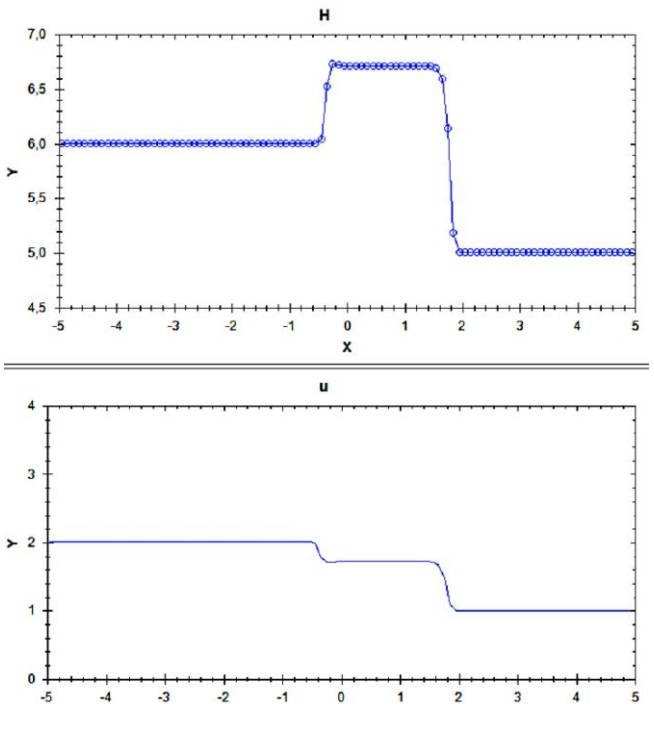
σ=1

100 расчетных ячеек, r = 1.2, 40 шагов по времени

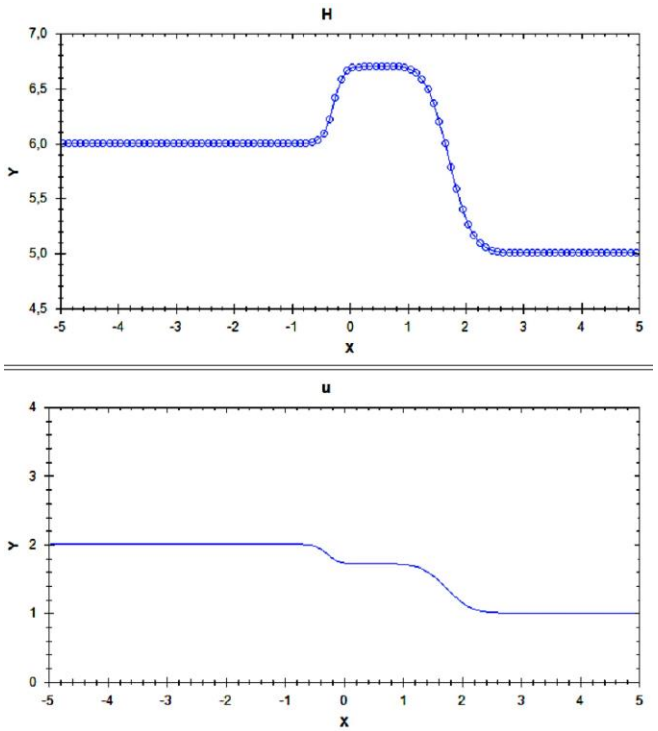
Расчет распада разрыва: два гидродинамических прыжка

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & , x \in [-5,0) \\ 1 & , x \in [0,5] \end{cases} \qquad H(X,0) = 2 \quad , x \in [5,5]$$

$$R(-5,t) = const, \ t \in (0,T); \qquad Q(5,t) = const, \ t \in (0,T)$$



σ=0



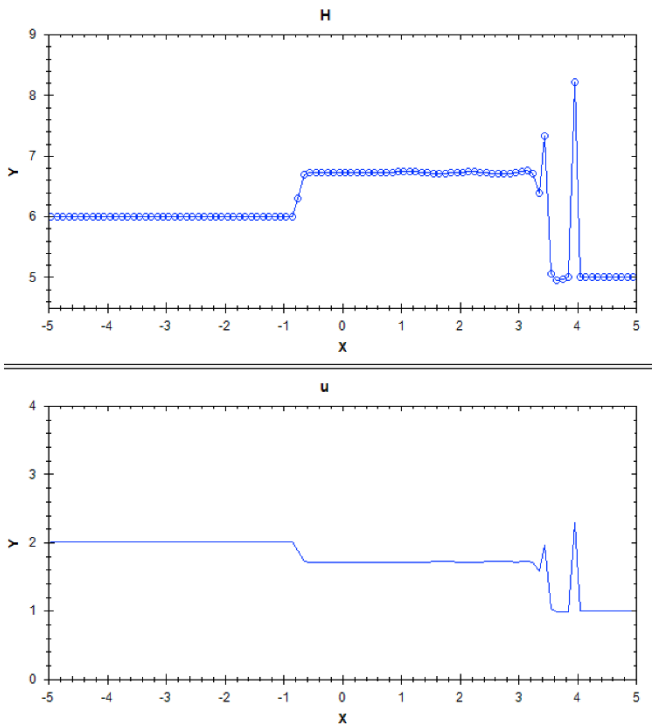
σ=1

100 расчетных ячеек, r = 0.2, 100 шагов по времени

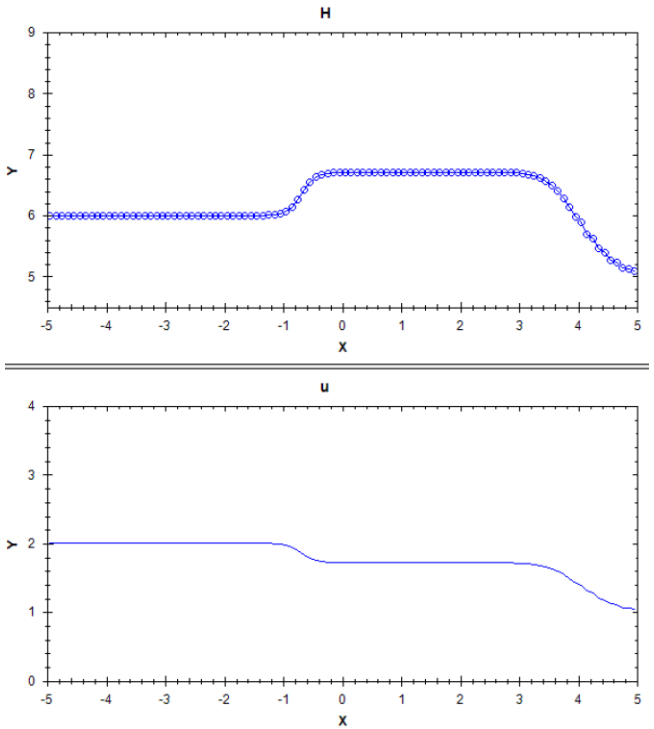
Расчет распада разрыва: два гидродинамических прыжка

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & , x \in [-5,0) \\ 1 & , x \in [0,5] \end{cases} \qquad H(X,0) = 2 \quad , x \in [5,5]$$

$$R(-5,t) = const, \ t \in (0,T); \qquad Q(5,t) = const, \ t \in (0,T)$$



σ=0



σ=1

100 расчетных ячеек, r = 1.2, 40 шагов по времени

Частично-неявная схема КАБАРЕ для двумерного уравнения мелкой воды.

Первая фаза.

$$\begin{cases} \frac{H_c^{n+\frac{1}{2}}-H_c^n}{\tau/2} + \sigma\frac{(Hu)_R^{n+1}-(Hu)_L^{n+1}}{h_x} + (1-\sigma)\frac{(Hu)_R^n-(Hu)_L^n}{h_x} + \frac{(Hv)_T^n-(Hv)_B^n}{h_y} = 0 \\ \frac{(Hu)_c^{n+\frac{1}{2}}-(Hu)_c^n}{\tau/2} + \sigma\frac{(Hu^2+P)_R^{n+1}-(Hu^2+P)_L^{n+1}}{h_x} + (1-\sigma)\frac{(Hu^2+P)_R^n-(Hu^2+P)_L^n}{h_x} + \frac{(Huv)_T^n-(Huv)_B^n}{h_y} = 0 \\ \frac{(Hv)_c^{n+\frac{1}{2}}-(Hv)_c^n}{\tau/2} + \frac{(Huv)_R^n-(Huv)_L^n}{h_x} + \frac{(Hv^2+P)_T^n-(Hv^2+P)_B^n}{h_y} = 0 \end{cases}$$

Вторая фаза.

$$\begin{cases} (I_{ix})_R^{n+1} = 2\cdot(I_{ix})_c^{n+\frac{1}{2}} - (I_{ix})_L^n, \text{ если } (\lambda_{ix})_c^{n+\frac{1}{2}} > 0 \\ (I_{ix})_L^{n+1} = 2\cdot(I_{ix})_c^{n+\frac{1}{2}} - (I_{ix})_R^n, \text{ если } (\lambda_{ix})_c^{n+\frac{1}{2}} \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_{iy})_T^{n+1} = 2\cdot(I_{iy})_c^{n+\frac{1}{2}} - (I_{iy})_B^n, \text{ если } (\lambda_{iy})_c^{n+\frac{1}{2}} > 0 \\ (I_{iy})_B^{n+1} = 2\cdot(I_{iy})_c^{n+\frac{1}{2}} - (I_{iy})_T^n, \text{ если } (\lambda_{iy})_c^{n+\frac{1}{2}} \le 0 \end{cases}$$

$$I_{1x} = u + 2\sqrt{gH}$$
$$I_{2x} = u - 2\sqrt{gH}$$
$$I_{3x} = v$$
$$I_{1y} = v + 2\sqrt{gH}$$
$$I_{2y} = v - 2\sqrt{gH}$$
$$I_{3y} = u$$

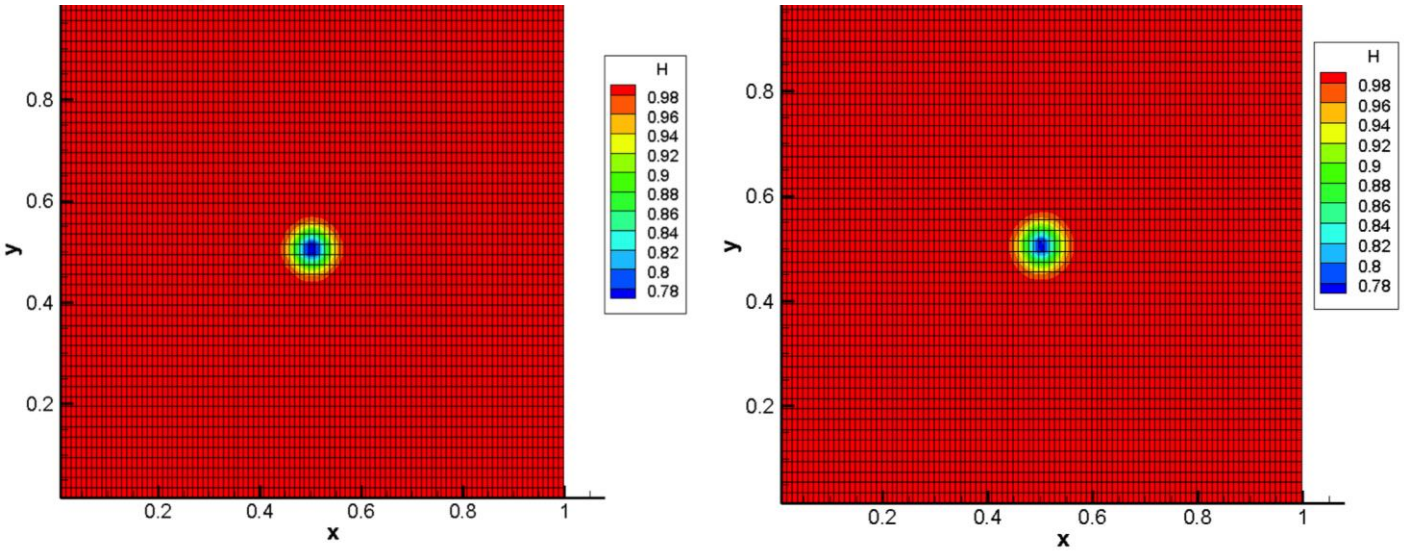
Третья фаза.

$$\begin{cases} \frac{H_c^{n+1}-H_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + (1-\sigma)\frac{(Hu)_R^{n+1}-(Hu)_L^{n+1}}{h_x} + \sigma\frac{(Hu)_R^n-(Hu)_L^n}{h_x} + \frac{(Hv)_T^{n+1}-(Hv)_B^{n+1}}{h_y} = 0 \\ \frac{(Hu)_c^{n+1}-(Hu)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + (1-\sigma)\frac{(Hu^2+P)_R^{n+1}-(Hu^2+P)_L^{n+1}}{h_x} + \sigma\frac{(Hu^2+P)_R^n-(Hu^2+P)_L^n}{h_x} + \frac{(Huv)_T^{n+1}-(Huv)_B^{n+1}}{h_y} = 0 \\ \frac{(Hv)_c^{n+1}-(Hv)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(Huv)_R^{n+1}-(Huv)_L^{n+1}}{h_x} + \frac{(Hv^2+P)_T^{n+1}-(Hv^2+P)_B^{n+1}}{h_y} = 0 \end{cases}$$

Двумерная задача о динамике уединенного центрального вихря

$$\begin{cases} H(x,y,0) = -\dfrac{\alpha^2}{4g\beta}\exp\left[2\beta\left(1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\right)\right] + H_0 \\ u(x,y,0) = \dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)^2\right)\right]\cdot y \\ v(x,y,0) = -\dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)^2\right)\right]\cdot x \end{cases}$$

где $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$, $r = \sqrt{x+y^2}$, $\alpha = 0.404$, $\beta = 0.3$, $H_0 = 1$, $r_0 = 0.03$ и $g = 1$. На границе ставятся условия непротекния - нормальная компонента скорости равна 0.



a) b)

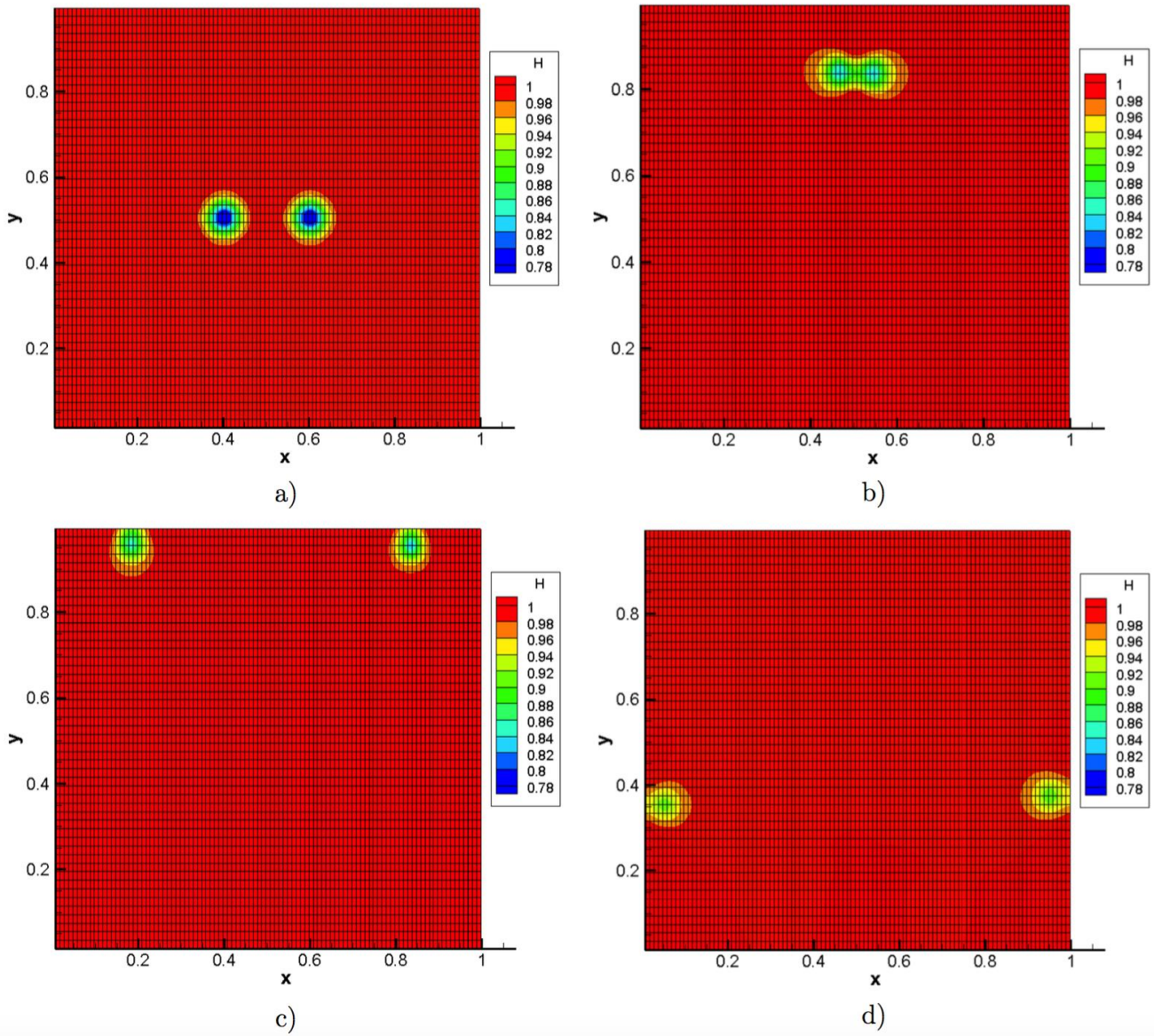
Сетка 100 × 50, r = 0.3, a) Начальное состояние, b) Состояние после 300 шагов по времени

Двумерная задача о динамике вихревого диполя в квадратной области

$$
\begin{cases}
H(x,y,0) = -\dfrac{\alpha^2}{4g\beta}\exp\left[2\beta\left(1-\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)^2\right)\right] - \dfrac{\alpha^2}{4g\beta}\exp\left[2\beta\left(1-\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2\right)\right] + H_0 \\
u(x,y,0) = \dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)^2\right)\right]y - \dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2\right)\right]y \\
v(x,y,0) = -\dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_1}{r_0}\right)^2\right)\right](x-0.1) + \dfrac{\alpha}{r_0}\exp\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2\right)\right](x+0.1)
\end{cases}
$$

где $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$, $r_1 = \sqrt{(x-0.1)^2+y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+0.1)^2+y^2}$, $\alpha = 0.404$, $\beta = 0.3$, $H_0 = 1$, $r_0 = 0.03$ и $g = 1$. На границе ставятся условия непротекния - нормальная компонента скорости равна 0.

Двумерная задача о динамике вихревого диполя в квадратной области



Сетка 100×50, r = 0.3, a) t=0, b) t = 5.74, c) t = 8.66, d) t = 14.65

Заключение

- Было построено однопараметрическое семейство неявных разностных схем Кабаре, изучены их дисперсионные и диссипативные свойства. Построены диссипативные и дисперсионные поверхности. Показана безусловная устойчивость неявной и бездиссипативность схемы при σ от 0.5 до 1.
- Разработан алгоритм вычисления по этим схемам для системы уравнений мелкой воды, написана и отлажена одномерная программа, приведены тестовые расчеты задачи о распаде разрыва.
- Разработана и реализована частично-неявная схема для двумерных уравнений мелкой воды: явная вдоль одного направления и неявная вдоль другого. Работоспособность предложенного алгоритма проверена на решении двумерной задачи о динамике вихревого диполя в квадратной области.

Спасибо за внимание!