



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных методов

Майоров Павел Александрович

## Схема КАБАРЕ для двухслойной мелкой воды

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
В. М. Головизнин

Москва, 2016

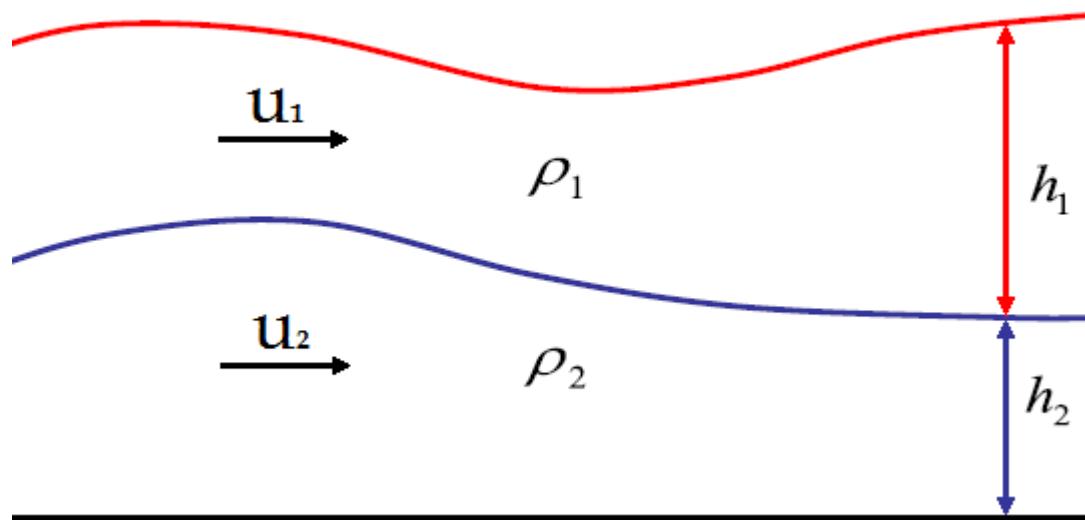
# Цель работы

- Построить схему КАБАРЕ для уравнений двухслойной мелкой воды.
- Разработать алгоритм решения по построенной схеме, в частности нахождение собственных чисел и векторов системы.
- Реализовать решение одномерной двухслойной мелкой воды.

## Математическая постановка задачи.

Движение двухслойной мелкой воды описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t(h_1) + \partial_x(h_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(h_2) + \partial_x(h_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(h_1 u_1) + \partial_x \left( h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right) = -g h_1 \partial_x(h_2), \\ \partial_t(h_2 u_2) + \partial_x \left( h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right) = -r g h_2 \partial_x(h_1). \end{cases}$$



## Простая форма двухслойной мелкой воды.

Данная система является простой формой уравнений двухслойной мелкой воды:

$$\begin{cases} \partial_t(h_1) + u_1\partial_x(h_1) + h_1\partial_x(u_1) = 0, \\ \partial_t(h_2) + u_2\partial_x(h_2) + h_2\partial_x(u_2) = 0, \\ \partial_t(u_1) + u_1\partial_x(u_1) + g\partial_x(h_1) + g\partial_x(h_2) = 0, \\ \partial_t(u_2) + u_2\partial_x(u_2) + rg\partial_x(h_1) + g\partial_x(h_2) = 0. \end{cases}$$

Векторный вид:

$$\partial_t \vec{q} + A(q) \partial_x \vec{q} = \vec{\psi},$$

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\psi}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & h_2 \\ g & g & u_1 & 0 \\ rg & g & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

# Гиперболичность двухслойной мелкой воды.

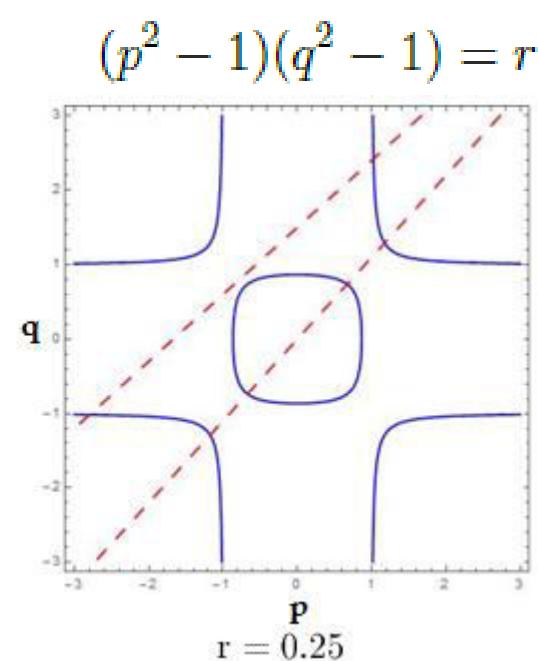
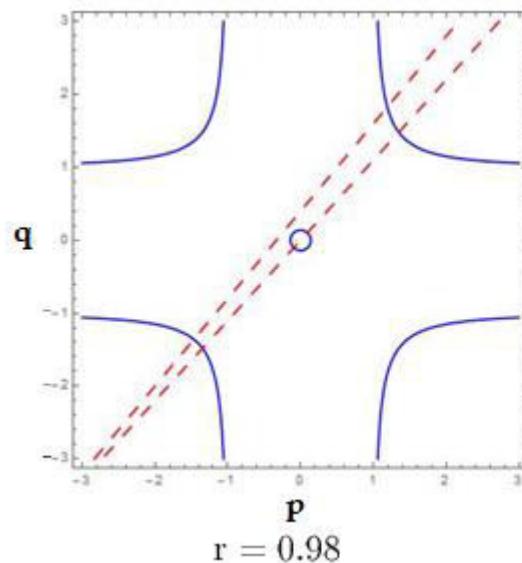
Характеристический многочлен матрицы  $A(q)$  имеет следующий вид:

$$((\lambda - u_1)^2 - gh_1)((\lambda - u_2)^2 - gh_2) = rg^2 h_1 h_2$$

Для анализа собственных значений воспользуемся геометрической интерпретацией, предложенной в работе [1] Овсянникова Л.В. Вводятся новые переменные  $p$  и  $q$  такие, что  $\lambda - u_1 = p\sqrt{gh_1}$ ,  $\lambda - u_2 = q\sqrt{gh_2}$

Прямая:  $q = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}p + \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{gh_2}}$

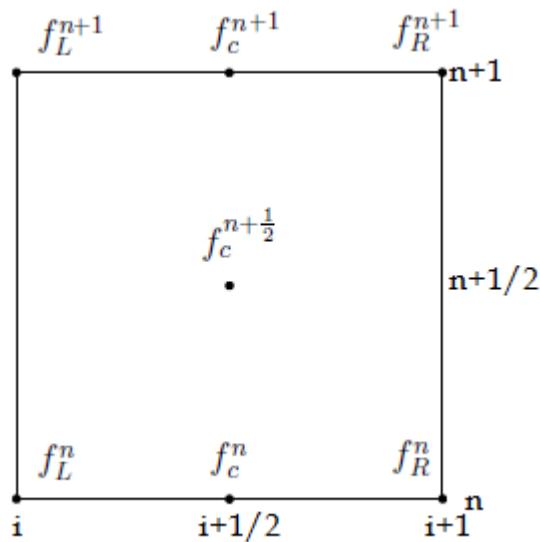
Характеристический многочлен:



[1] Овсянников Л.В. Модели двухслойной мелкой воды. ПМТФ. - 1979. - № 2. - С- 2-14.

## Шаблон схемы КАБАРЕ.

Описание схемы КАБАРЕ ведется с учетом данных обозначений для пространственно-временной ячейки:



$$f_c^{n+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f(x_i + 0.5 \cdot h, t^n + 0.5 \cdot \tau)$$

$$f_c^n = f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(x_i + 0.5 \cdot h, t^n)$$

$$f_R^n = f_{i+1}^n = f(x_i + h, t^n)$$

$$f_L^n = f_i^n = f(x_i, t^n)$$

# Вычисление консервативных переменных.

**Первая фаза.** Вычисление консервативных переменных на “половинном” слое.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(h_1)_c^{n+\frac{1}{2}} - (h_1)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1)_R^n - (h_1 u_1)_L^n}{h} = 0 \\ \frac{(h_2)_c^{n+\frac{1}{2}} - (h_2)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2)_R^n - (h_2 u_2)_L^n}{h} = 0 \\ \frac{(h_1 u_1)_c^{n+\frac{1}{2}} - (h_1 u_1)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_R^n - (h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_L^n}{h} = -g(h_1)_c^{n+\frac{1}{2}} \frac{(h_2)_R^n - (h_2)_L^n}{h} \\ \frac{(h_2 u_2)_c^{n+\frac{1}{2}} - (h_2 u_2)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_R^n - (h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_L^n}{h} = -g(h_2)_c^{n+\frac{1}{2}} \frac{(h_1)_R^n - (h_1)_L^n}{h} \end{array} \right.$$

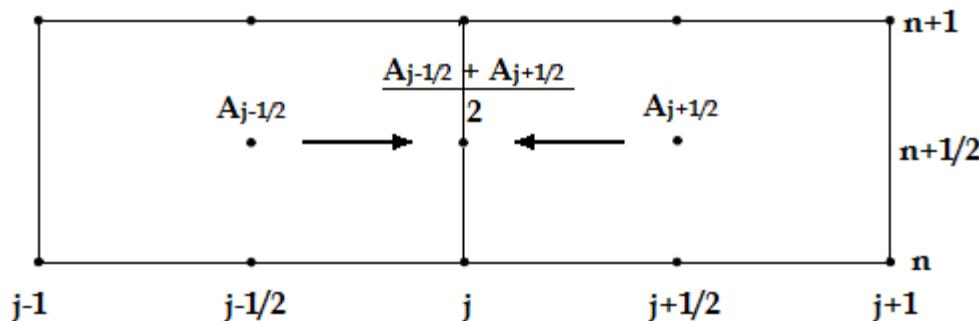
**Третья фаза.** Вычисление консервативных переменных на новом временном слое.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(h_1)_c^{n+1} - (h_1)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1)_R^{n+1} - (h_1 u_1)_L^{n+1}}{h} = 0 \\ \frac{(h_2)_c^{n+1} - (h_2)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2)_R^{n+1} - (h_2 u_2)_L^{n+1}}{h} = 0 \\ \frac{(h_1 u_1)_c^{n+1} - (h_1 u_1)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_R^{n+1} - (h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_L^{n+1}}{h} = -g(h_1)_c^{n+1} \frac{(h_2)_R^{n+1} - (h_2)_L^{n+1}}{h} \\ \frac{(h_2 u_2)_c^{n+1} - (h_2 u_2)_c^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_R^{n+1} - (h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_L^{n+1}}{h} = -g(h_2)_c^{n+1} \frac{(h_1)_R^{n+1} - (h_1)_L^{n+1}}{h} \end{array} \right.$$

## Вычисление потоковых переменных.

**Вторая фаза.** На второй фазе вычисляются потоковые переменные на новом временном слое.

Вычисление собственных значений:



Методом Д.К. Фаддеева [1] находятся левые собственные векторы.  
Характеристическая форма двухслойной мелкой воды для пары смежных ячеек:

$$\partial_t \left( L_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \vec{q} \right) + \Lambda \partial_x \left( L_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \vec{q} \right) = \vec{0}$$

Тогда можно говорить о локальных инвариантах:

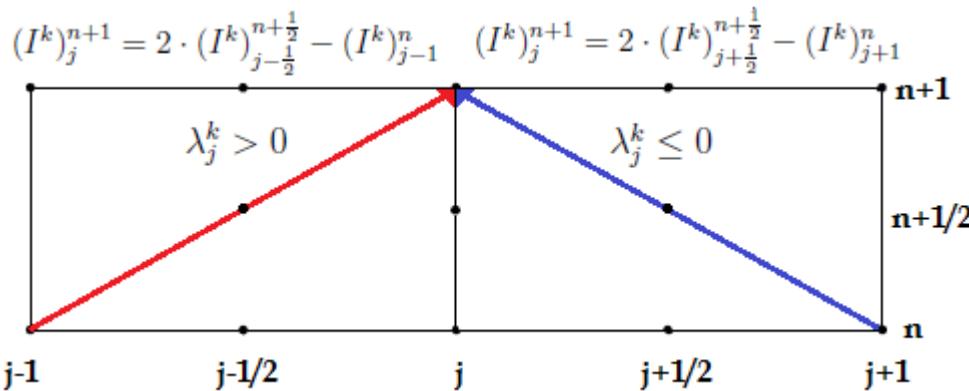
$$I^1 = (l_{1,j}, \vec{q}), \quad I^2 = (l_{2,j}, \vec{q}), \quad I^3 = (l_{3,j}, \vec{q}), \quad I^4 = (l_{4,j}, \vec{q}).$$

---

[1] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.

# Вычисление потоковых переменных.

Экстраполяция локальных инвариантов:



Коррекция локальных инвариантов:

$$(I_i)_R^{n+1} = \begin{cases} \max(I), & (I_i)_R^{n+1} \geq \max(I) \\ \min(I), & (I_i)_R^{n+1} \leq \min(I) \\ (I_i)_R^{n+1}, & \min(I) \leq (I_i)_R^{n+1} \leq \max(I) \end{cases}$$

где

$$\max(I) = \max\{(I_i)_L^n, (I_i)_c^n, (I_i)_R^n\} + \tau \cdot g, \quad \text{и} \quad g = \frac{(I_i)_c^{n+1/2} - (I_i)_c^n}{\tau/2} + (\lambda_i)_c^{n+1/2} \frac{(I_i)_R^n - (I_i)_L^n}{h}$$
$$\min(I) = \min\{(I_i)_L^n, (I_i)_c^n, (I_i)_R^n\} + \tau \cdot g,$$

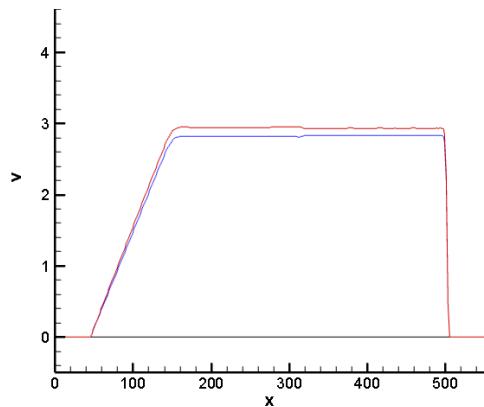
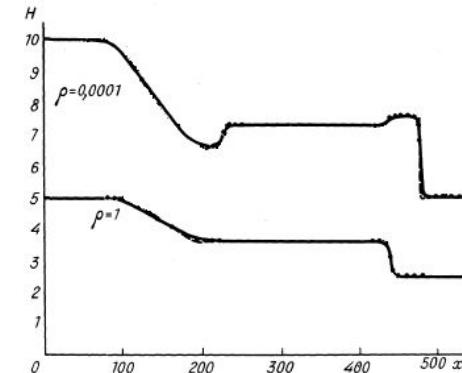
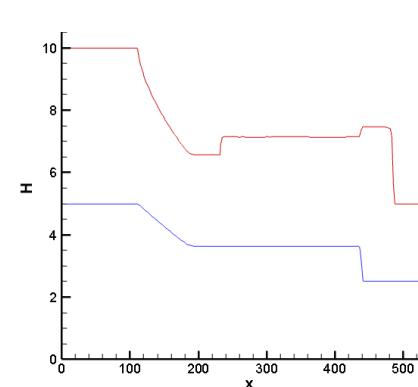
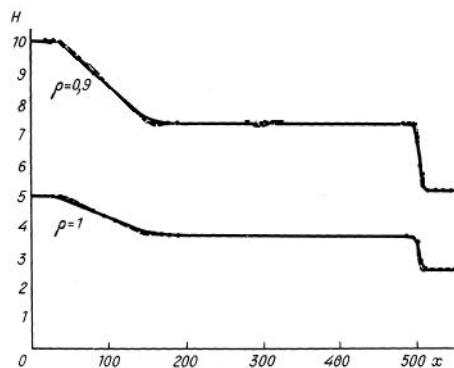
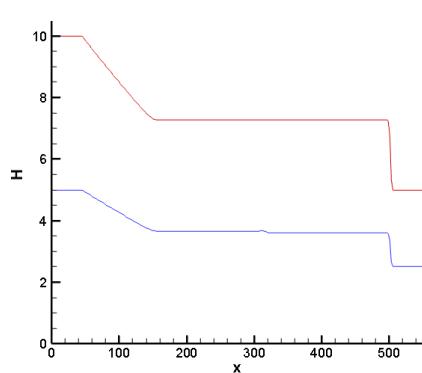
В конце второй фазы в каждом узле на новом слое по времени разрешаем систему из пришедших инвариантов относительно исходных переменных методом Гаусса.

# Тестовые расчеты

## Задача о перепаде высот [1]

Начальные данные задаются следующим образом:

$$h_1(x, 0) = \begin{cases} 5, & x \in [0, 280) \\ 2.5, & x \in [280, 560] \end{cases} \quad u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 560]$$
$$h_2(x, 0) = \begin{cases} 5, & x \in [0, 280) \\ 2.5, & x \in [280, 560] \end{cases} \quad u_2(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 560]$$



$r = 0.98$

$r = 0.0001$

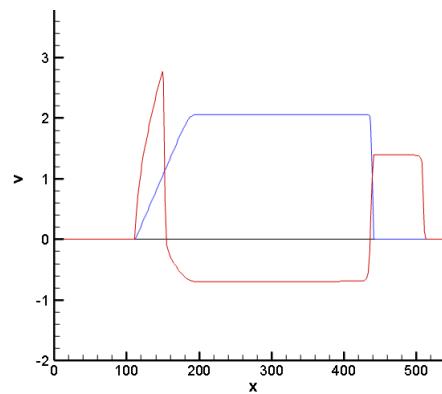
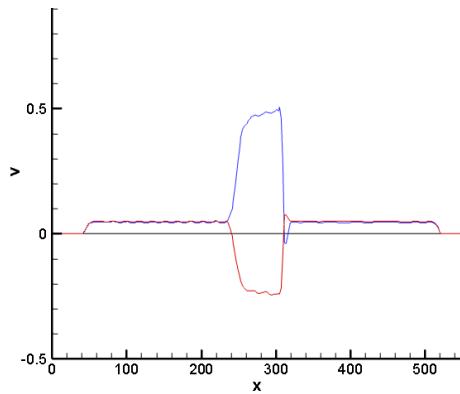
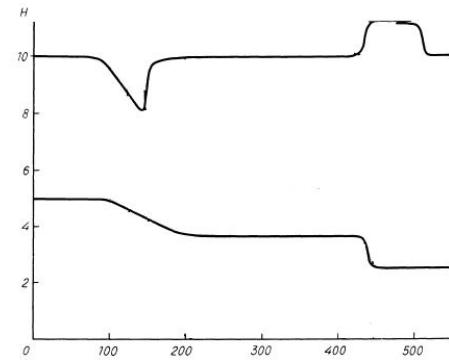
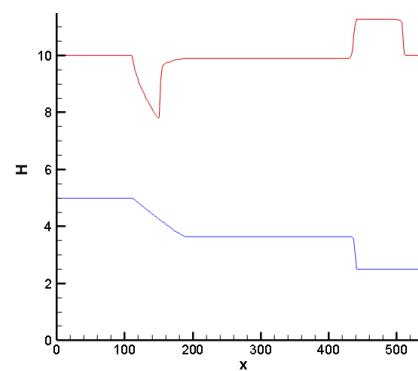
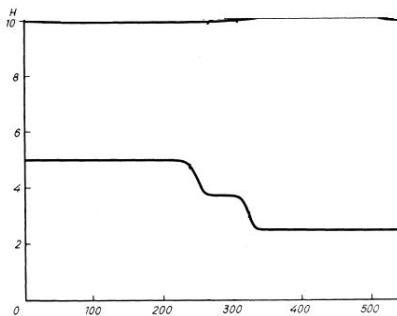
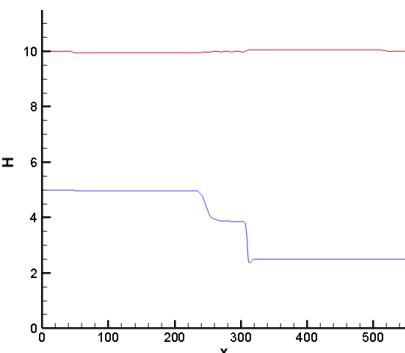
[1] А. Б. Ведерников, А. С. Холодов. Численное моделирование течений двухслойной жидкости в рамках модели мелкой воды.

# Тестовые расчеты

## Внутренние волны [1]

Начальные данные задаются следующим образом:

$$h_1(x, 0) = \begin{cases} 5, & x \in [0, 280) \\ 7.5, & x \in [280, 560] \end{cases}$$
$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 560]$$
$$h_2(x, 0) = \begin{cases} 5, & x \in [0, 280) \\ 2.5, & x \in [280, 560] \end{cases}$$
$$u_2(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 560]$$



$r = 0.98$

$r = 0.0001$

[1] А. Б. Ведерников, А. С. Холодов. Численное моделирование течений двухслойной жидкости в рамках модели мелкой воды.

# Заключение

- Разработана схема КАБАРЕ для системы уравнений двуслойной мелкой воды.
- Описан алгоритм решения по этой схеме: нахождение локальных собственных значений и локальных инвариантов методом Фаддеева.
- Написана и отлажена компьютерная программа.
- Проведены тестовые расчеты.

**Спасибо за внимание!**