Выпускная квалификационная работа "Решение уравнения синус-Гордона методом стрельбы"

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Лиходедова Мария Игоревна, 404 гр.
Научный руководитель: канд. физ.-мат. н. Хапаев М. М.

Москва, 2017 г.

Введение

В данной работе нас будут интересовать одномерные немонотонные квазилинейные уравнения эллиптического типа:

$$-\varphi''(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(\varphi) = \gamma(\mathrm{x})$$

К таким задачам относится нелинейная краевая задача физики джозефсоновских переходов. В этой задаче нелинейность имеет вид:

$$\mathrm{f}(\varphi) = \mathrm{I}(\mathrm{x}) \sin(\varphi)$$

Эффект Джозефсона представляет собой туннельный эффект в сверхпроводниках. Проявлением данного эффекта является протекание сверхпроводящего тока через тонкий зазор между двумя сверхпроводниками.

В этой работе мы поставим целью изучить число решений одномерного распределенного джозефсоновского перехода.

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для квазилинейного уравнения :

$$\begin{cases} -\varphi_{\mathrm{xx}} + \mathrm{I}(\mathrm{x})\sin(\varphi) - \gamma(\mathrm{x}) = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(\mathrm{L}) = \mu \end{cases} \quad , 0 < \mathrm{x} < \mathrm{L}$$

Задачи:

- Найти число решений
- Понять, как найти каждое решение

Алгоритм нахождения всех решений

Метод стрельбы

Для решения поставленной задачи перейдем от краевой задачи:

$$\begin{cases} -\varphi''(\mathrm{x}) + \mathrm{I}(\mathrm{x})\sin(\varphi) - \gamma(\mathrm{x}) = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(\mathrm{L}) = \mu \end{cases}, \quad 0 < \mathrm{x} < \mathrm{L}$$

к эквивалентной задаче Коши:

$$\begin{cases} -\varphi''(\mathrm{x}) + \mathrm{I}(\mathrm{x})\sin(\varphi) - \gamma(\mathrm{x}) = 0 \\ \varphi(0) = \mathrm{a} \\ \varphi'(0) = \mu \end{cases}, \quad 0 < \mathrm{x} < \mathrm{L}$$

Значение a достаточно рассмотреть на отрезке $0 \leqslant \mathrm{a} \leqslant 2\pi$, где значение a соответствует второму краевому условию, т. к. если $\varphi(\mathrm{x})$-решение краевой задачи, то и $(\varphi(\mathrm{x}) + 2\pi)$ также будет являться решением. Далее считаем невязку $\mathrm{r}(\mathrm{a}) = \varphi'(\mathrm{L}) - \mu$ для каждого a. Для тех значений a, где невязка будет мала с указанной нами точностью, будут получены решения нелинейной задачи.

Разностная схема для метода стрельбы для уравнения второго порядка:

$$h = \frac{L}{N}, \quad x_i = i \cdot h, \quad \varphi_i = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, ..., N$$

$$a \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+1} = 2\varphi_i - \varphi_{i-1} - h^2(\gamma(x_i) - \sin(\varphi_i)) \\ \varphi_0 = a_k \\ \varphi_1 = \varphi_0 + h\mu - \frac{h^2}{2}(\gamma(0) - I(0)\sin(\varphi(0))) \end{cases}$$

График невязки покажет, сколько всего решений для расчета с данной точностью мы нашли. Корни невязки соответствуют решениям нелинейной задачи. Удобно построить график невязки, который мы будем рассматривать ниже.

Результаты расчетов

Простой случай однородного перехода

$$I(x) = 1, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = \mu = 0.25, \quad \gamma(x) = 0$$

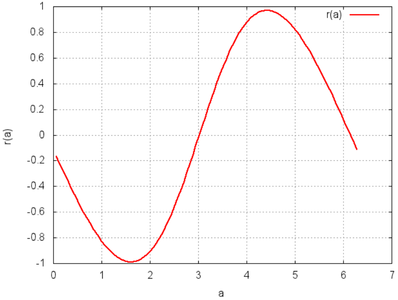

Рис.: График невязки. Решения краевой задачи существуют при a = 3.0787 и a = 6.1575.

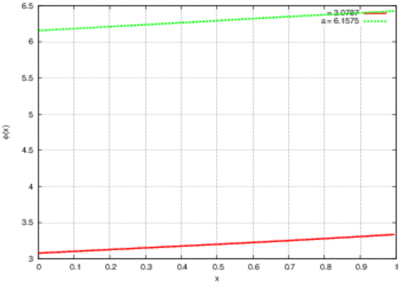

Рис.: Графики решений при a = 3.0787 и a = 6.1575

Результаты расчетов

Влияние краевых условий μ_1, μ_2

$\mathrm{I(x)} = 1, \quad \varphi'(0) = \mu_1 = 0.25, \quad \gamma(\mathrm{x}) = 0.$
Рассмотрим случаи: $\varphi'(1) = \mu_2 = 0.25, \quad \mu_2 = 0.5, \quad \mu_2 = 0.75, \quad \mu_2 = 1.$

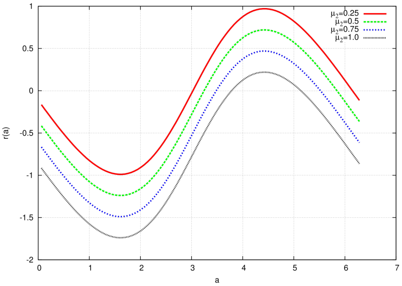

Рис.: Графики невязки при изменении μ_2.

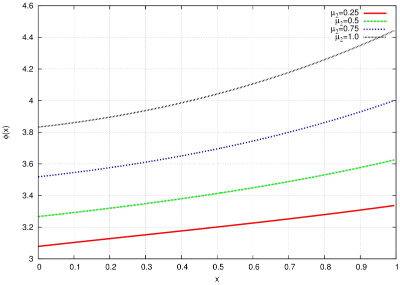

Рис.: Графики решений при $\mathrm{a} = 3.0787, \quad \mathrm{a} = 3.2672, \quad \mathrm{a} = 3.5185, \quad \mathrm{a} = 3.8327.$

Результаты расчетов

Влияние $\gamma(x)$

$\mathrm{I}(x) = 1, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = \mu = 0.25.$
Рассмотрим случаи: $\gamma(x) = 0, \quad \gamma(x) = 0.5, \quad \gamma(x) = 0.75, \quad \gamma(x) = x(1-x).$

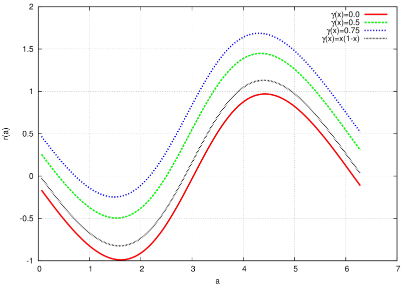

Рис.: Графики невязки при изменении $\gamma(x)$.

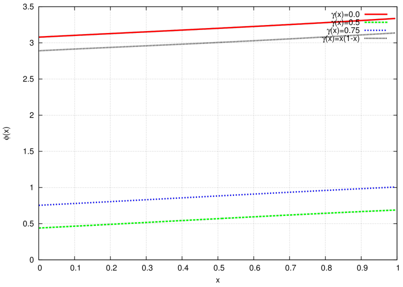

Рис.: Графики решений при $a = 3.0787, a = 0.4398, a = 0.7539, a = 2.8902.$

Результаты расчетов

Джозефсоновский переход малой длины

$\gamma(x) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = \mu = 0.25$

$$I(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leqslant x \leqslant 1 - x_0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 1 - x_0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

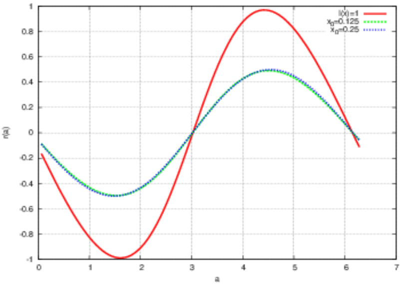

Рис.: Графики невязки при изменении I(x) ($x_0 = 0.25$ и $x_0 = 0.125$ и $I(x) = 1$)

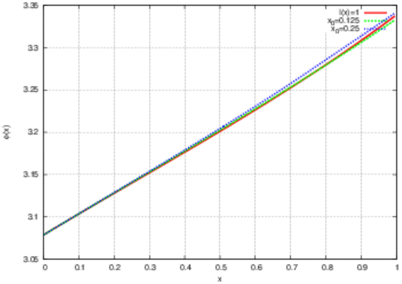

Рис.: Графики решений при $a = 3.0787$

Результаты расчетов
π-junction

$\gamma(x) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = \mu = 0.25.$
$I(x) = \mathrm{sgn}(x - 0.5).$

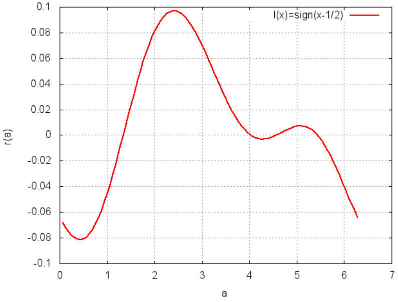

Рис.: График невязки при $I(x) = \mathrm{sgn}(x - 0.5)$.

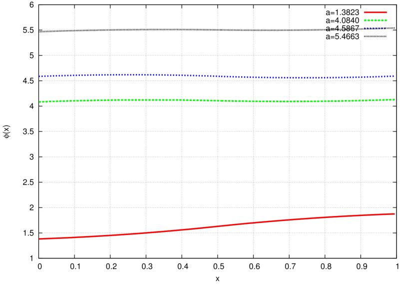

Рис.: Графики решений при $I(x) = \mathrm{sgn}(x - 0.5)$.

Выводы

- Проведено простое исследование числа решений стационарного уравнения синус-Гордона для распределенного джозефсоновского перехода. Показано, как найти число решений и каждое решение по отдельности.
- Изучено влияние некоторых параметров на число и вид решений.

Спасибо за внимание!