ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

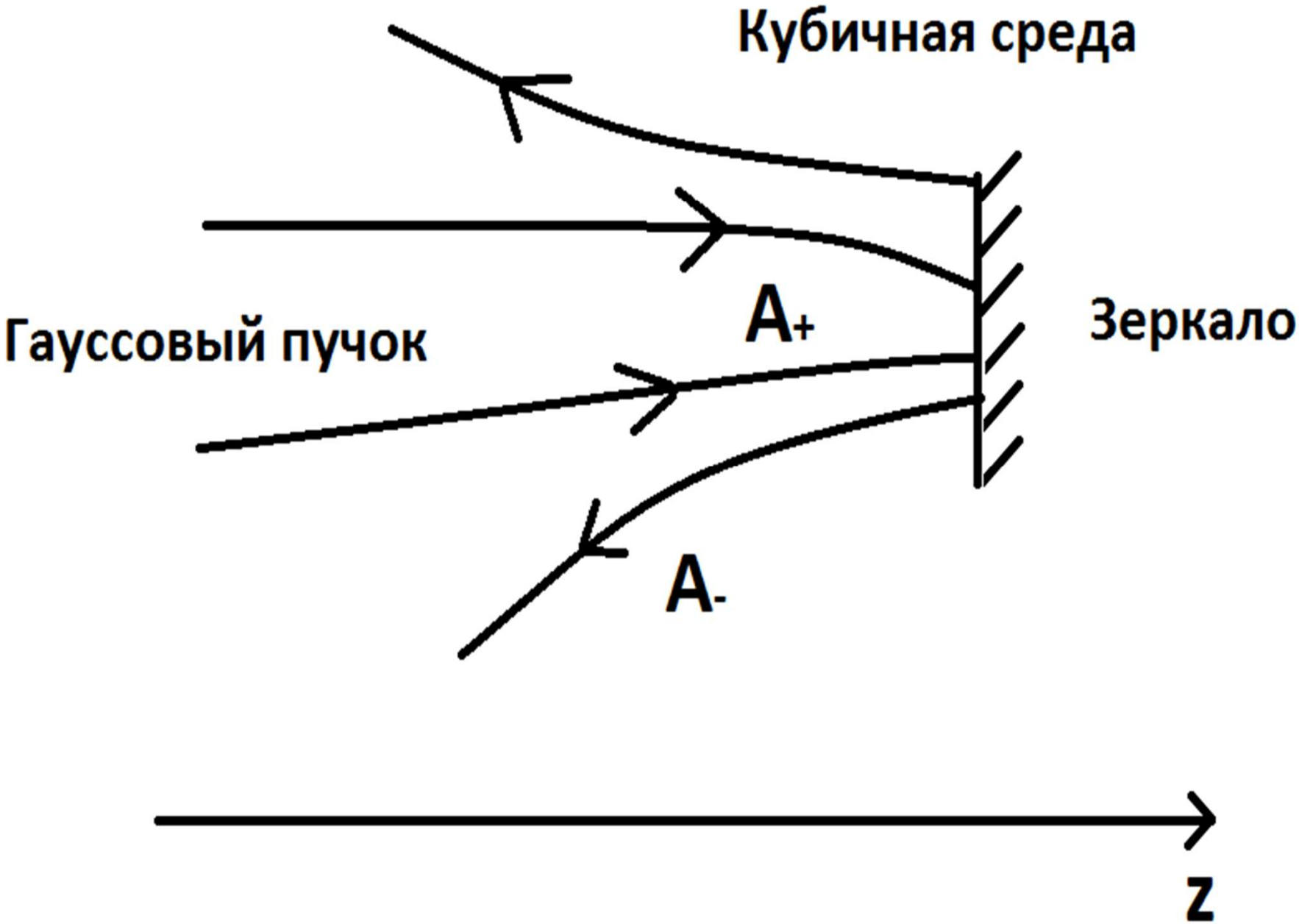
Построение аналитического решения задачи нелинейного отражения гауссова пучка от зеркала, расположенного в кубичной среде

Котков Артем Сергеевич,
404 группа

Научный руководитель:
Трофимов Вячеслав Анатольевич

Введение

- Рассматривается задача отражения гауссова пучка от зеркала, находящегося в нелинейной кубичной среде. Эта задача имеет широкое практическое применение. Одним из самых важных и часто встречающихся примеров является передача световой энергии через атмосферу на отражатель. Требуется, чтобы передаваемая энергия была максимальной. Для этого используется итерационный процесс автофокусировки падающего излучения. На практике необходимо добиться повышения точности фокусировки и быстродействия системы (минимального числа итераций). Эта задача решалась, начиная с 80-ых годов прошлого века (М.А. Воронцов, С.С. Чесноков, В.П. Лукин, С.А. Ахманов, В.И. Шмальгаузен, Ю.Н. Карамзин, В.А. Трофимов и многие другие, включая зарубежных).


Кубичная среда
Гауссовый пучок
A+
Зеркало
A-
z

Постановка задачи

- Уравнения Шредингера для падающего и отраженного пучков:

$$\frac{\partial A_+}{\partial z} + iD\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_+}{\partial r}\right) + i\alpha A_+(|A_+|^2 + |A_-|^2) = 0,$$

$$-\frac{\partial A_-}{\partial z} + iD\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_-}{\partial r}\right) + i\alpha A_-(|A_+|^2 + |A_-|^2) = 0.$$

- Краевые условия для уравнений Шредингера:

$$A_+|_{z=0} = A_{+0}(r), \qquad A_-|_{z=L} = A_+|_{z=L},$$

$$r\frac{\partial A_\pm}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0, \qquad A_\pm|_{r=\infty} = 0.$$

Инварианты

- Из уравнений Шредингера получим кросс-инвариант и третий инвариант:

$$I_c = \int_0^\infty A_- A_+ r dr = const\,,$$

$$I_3 = \int_0^\infty \left[-iD \left(\left| \frac{\partial A_+}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial A_-}{\partial r} \right|^2 \right) + \frac{i\alpha}{2} (|A_+|^2 + |A_-|^2)^2 \right] r dr = const.$$

Вид решения

- Ищем приближенном решение задачи в данном виде:

$$A_+ = \frac{1}{f_+} e^{-\frac{r^2}{4Df_+^2} - i\frac{r^2}{4Df_+}\frac{df_+}{dz} + i\,\varphi_+},$$

$$A_- = \frac{1}{f_-} e^{-\frac{r^2}{4Df_-^2} + i\frac{r^2}{4Df_-}\frac{df_-}{dz} + i\,\varphi_-}.$$

Дифференциальные уравнения

- Подставляя уравнения волн в соответствующие уравнения Шредингера, получим для падающей волны:

$$\frac{d^2 f_+}{dz^2} = \frac{1}{f_+^3} - 2\alpha\left(\frac{1}{f_+^3} + \frac{f_+}{f_-^4}\right),$$

$$\frac{d\varphi_+}{dz} = \frac{1}{f_+^2} - \alpha\left(\frac{1}{f_+^2} + \frac{1}{f_-^2}\right).$$

- Для отраженной:

$$\frac{d^2 f_-}{dz^2} = \frac{1}{f_-^3} - 2\alpha\left(\frac{1}{f_-^3} + \frac{f_-}{f_+^4}\right),$$

$$\frac{d\varphi_-}{dz} = -\frac{1}{f_-^2} + \alpha\left(\frac{1}{f_+^2} + \frac{1}{f_-^2}\right).$$

- Краевые условия:

$$f_+(0) = 1, \qquad \frac{1}{f_+}\left.\frac{df_+}{dz}\right|_{z=0} = -\theta, \qquad \varphi_+(0) = 0,$$

$$f_-(L) = f_+(L), \qquad \frac{1}{f_-}\left.\frac{df_-}{dz}\right|_{z=L} = -\frac{1}{f_+}\left.\frac{df_+}{dz}\right|_{z=L}, \qquad \varphi_-(L) = \varphi_+(L).$$

Инварианты для гауссовых пучков

- Подставив уравнения волн в инварианты, найдем:

$$I_c = \frac{2De^{i\,\varphi_+ + i\,\varphi_-}}{\frac{f_+}{f_-} + \frac{f_-}{f_+} - if_+^2 \frac{d\left(\frac{f_-}{f_+}\right)}{dz}} = C_R + iC_I,$$

$$I_3 = \frac{-iD}{2}\left[\frac{1}{f_+^2} + \left(\frac{df_+}{dz}\right)^2 + \frac{1}{f_-^2} + \left(\frac{df_-}{dz}\right)^2\right] + i\alpha D\left(\frac{1}{f_+^2} + \frac{1}{f_-^2} + \frac{4}{f_+^2 + f_-^2}\right) = const.$$

Следствие из I_c

- Если рассмотреть отношение мнимой части I_c к действительной, то можно получить выражение для $\varphi_+ + \varphi_-$ через константу:

$$\varphi_+ + \varphi_- - \varphi = arctg\left(\frac{C_I}{C_R}\right),$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{\frac{f_+}{f_-} + \frac{f_-}{f_+}}{\sqrt{\left(\frac{f_+}{f_-} + \frac{f_-}{f_+}\right)^2 + \left(f_+^2 \frac{d\left(\frac{f_-}{f_+}\right)}{dz}\right)^2}}\right).$$

Линейный случай

- Рассмотрим дифференциальные уравнения с фокусировкой, зависящей от параметра:

$$\frac{d^2 f_+}{dz^2} = \frac{1}{f_+^3}, \quad f_+(0) = 1, \qquad \frac{1}{f_+}\frac{df_+}{dz}\bigg|_{z=0} = -\theta.$$

$$\frac{d^2 f_-}{dz^2} = \frac{1}{f_-^3}, \quad f_-(L) = f_+(L), \quad \frac{1}{f_-}\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=L} = -\frac{1}{f_+}\frac{df_+}{dz}\bigg|_{z=L}.$$

- Аналитические решения в таком случае:

$$f_+^2(z) = (1-\theta z)^2 + z^2,$$

$$f_-^2(z) = [1-\theta(2L-z)]^2 + (2L-z)^2.$$

Сохранение инвариантов для гауссовых пучков при распространении в нелинейной среде

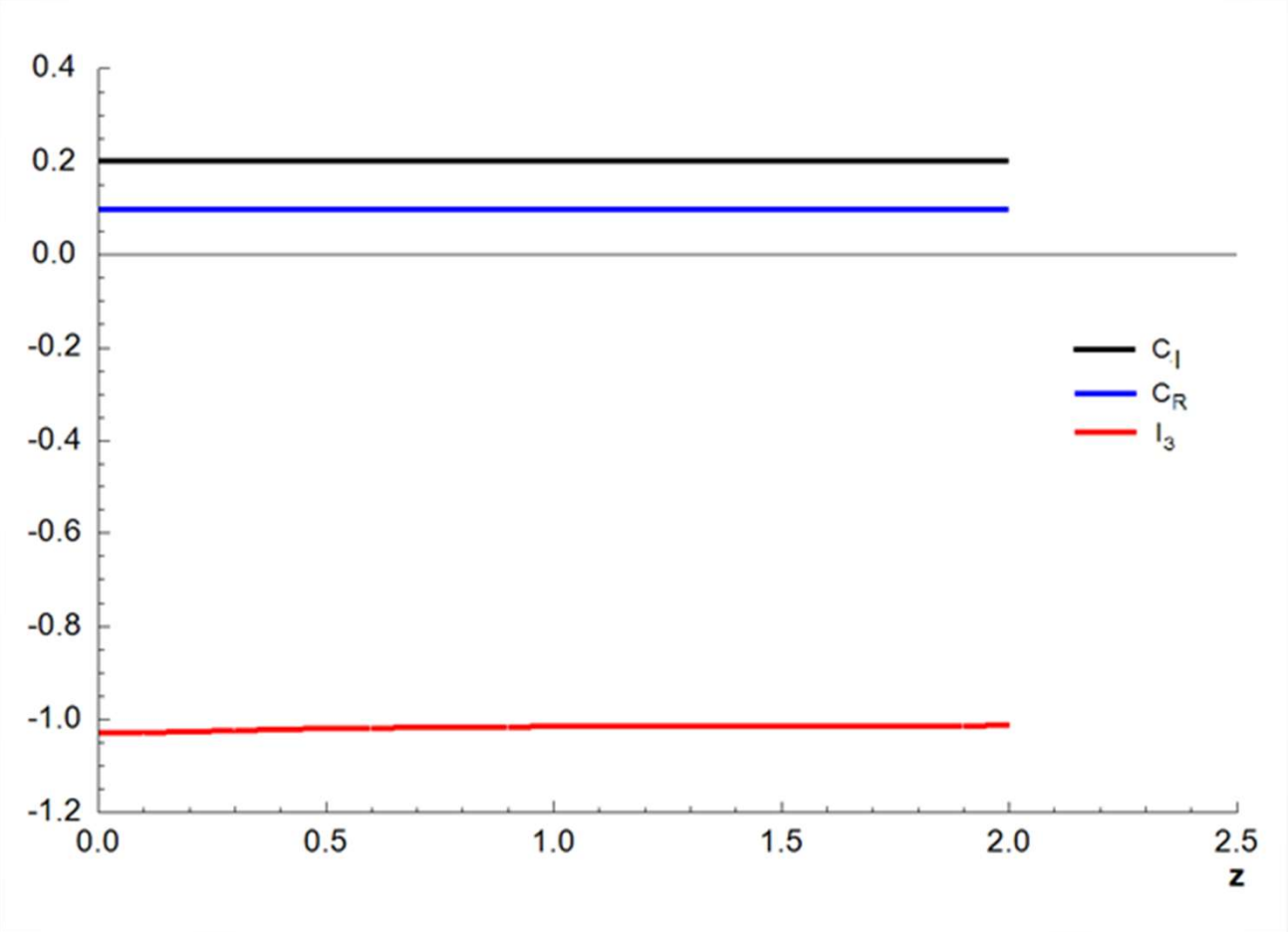


Рис 1. Значение инвариантов для приближенных значений f при N=20, L=2.

Фокусировка излучения по различным критериям, заданным на зеркале

- Ранее процессы фокусировки изучались при $\theta_{N+1} = \theta_N + \gamma J$.
- В моей работе были изучены процессы $\theta_{N+1}^2 = \theta_N^2 + \gamma J$.
- **Задача**: выразить характеристики пучка на зеркале через его характеристики в нуле.

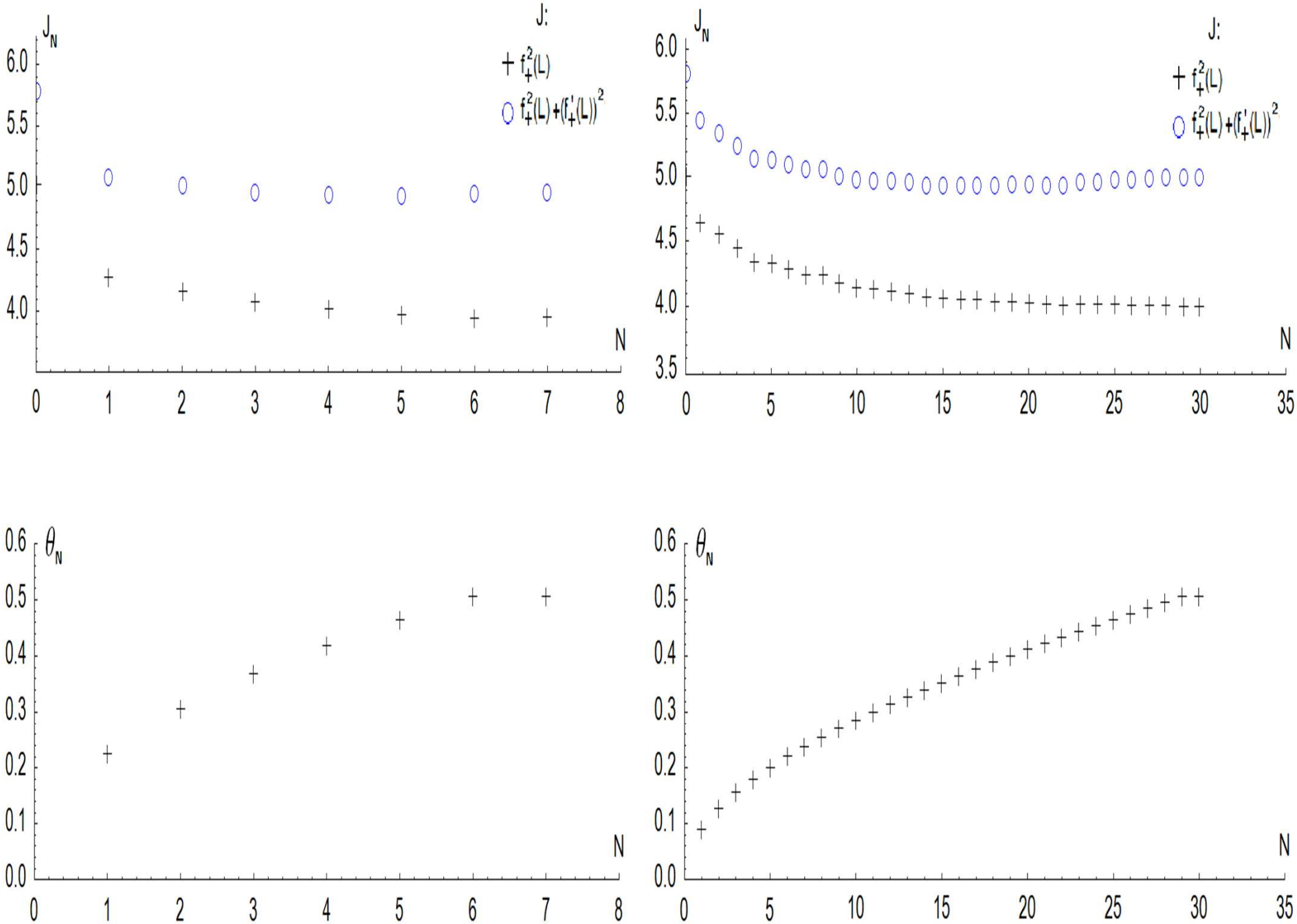
Фокусировка излучения по различным критериям, заданным на зеркале

- Построим итерационные процессы:

A. $\theta_{N+1}^2 = \theta_N^2 + \gamma\, f_+^2(L)$,

B. $\theta_{N+1}^2 = \theta_N^2 + \gamma \left(\left. \frac{df_+}{dz} \right|_{z=L} \right)^2$.

- Минимизируется $f_+(L)$ (используется явное выражение).
- Цель итерационных процессов с данными критериями – показать, что предложенный алгоритм сходится.


J:
$f_+^2(L)$
$f_+^2(L)+(f_+'(L))^2$
J_N
N
θ_N

Итерации с различными критериями по анализу отраженной волны

$$\theta_{N+1}^2 = \theta_N^2 + \gamma\, f_-^2(0)_N, \qquad \theta_{N+1}^2 = \theta_N^2 + \gamma \left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0} \right)_N^2 .$$

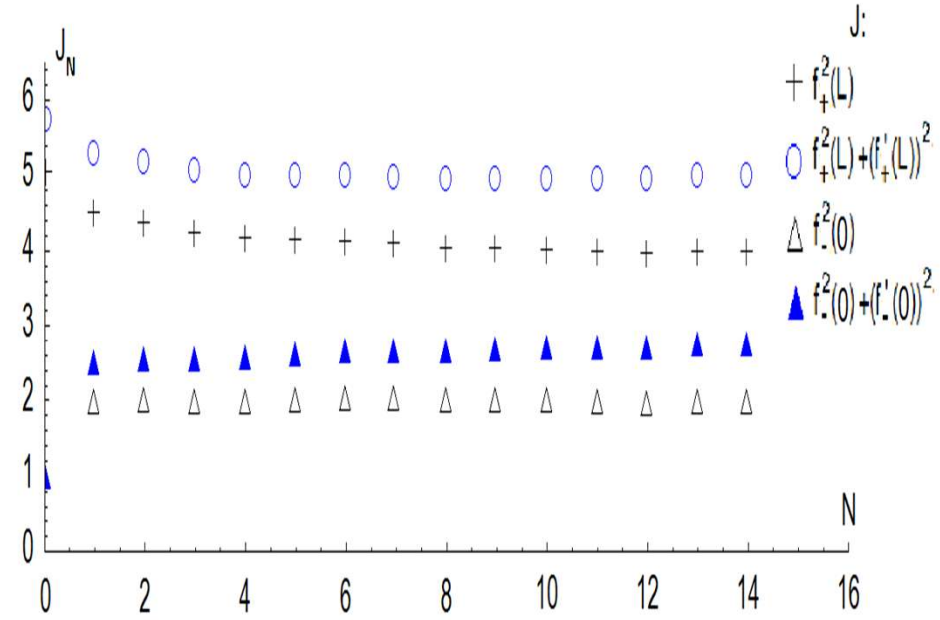
- Цель итерационных процессов с данными критериями – показать, что алгоритм, использующий отраженную волну, сходится.
- Воспользуемся равенством $I_3(L) = I_3(0)$:

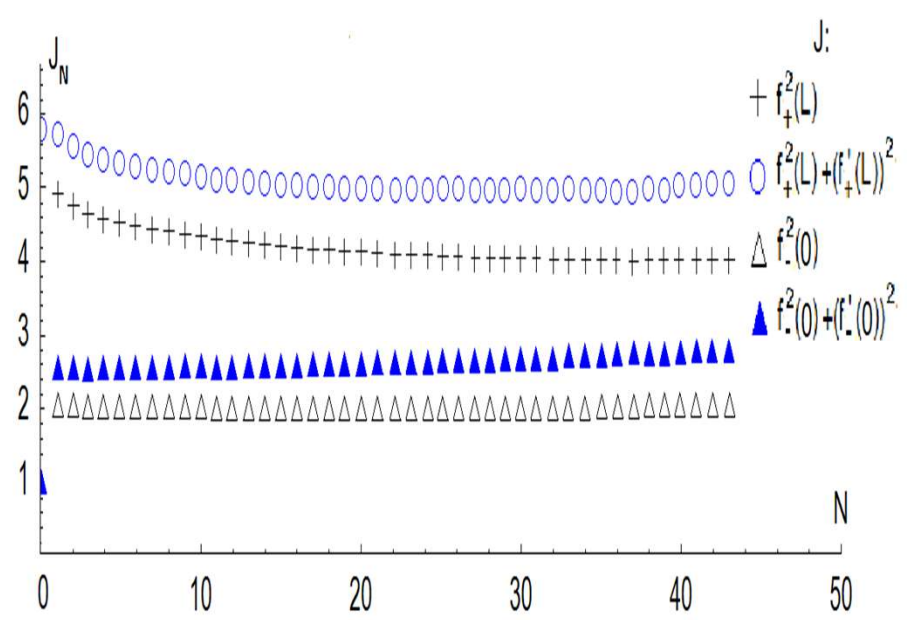
$$1 + \theta^2 = \frac{1}{f_-^2(0)} + \left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0} \right)^2$$

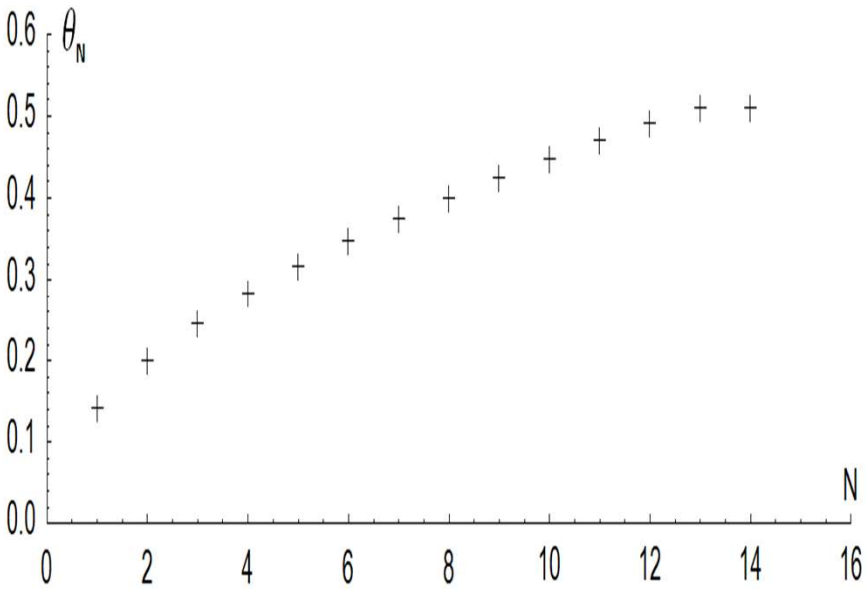
Итерации с различными критериями по анализу отраженной волны

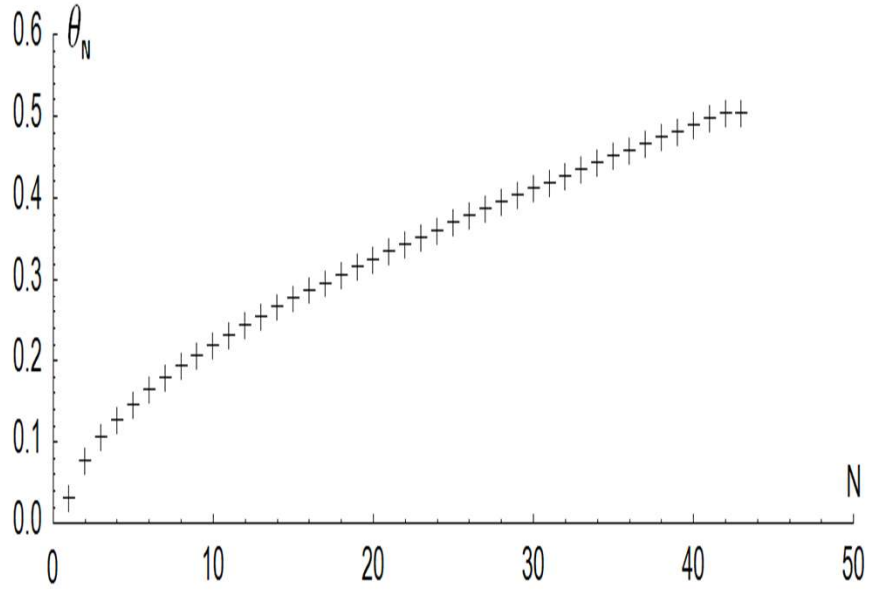
$$\left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0}\right)_N^2 = 1 + \theta_{N+1}^2 - \frac{1}{f_-^2(0)_N}, \qquad f_-^2(0)_N = \frac{1}{1+\theta_{N+1}^2 - \left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0}\right)_N^2},$$

$$f_-^2(0)_{N+1} = \frac{1}{1 + \theta_{N+1}^2 - \left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0}\right)_N^2} \cdot \left(\frac{df_-}{dz}\bigg|_{z=0}\right)_{N+1}^2 = 1 + \theta_{N+1}^2 - \frac{1}{f_-^2(0)_N}.$$


J:
J_N
$f_+^2(L)$
$f_+^2(L)+(f_+'(L))^2$
$f_-^2(0)$
$f_-^2(0)+(f_-'(0))^2$
N


J:
J_N
$f_+^2(L)$
$f_+^2(L)+(f_+'(L))^2$
$f_-^2(0)$
$f_-^2(0)+(f_-'(0))^2$
N


θ_N
N


θ_N
N

Вывод

- Найдены инварианты исходной задачи, получены их выражения для гауссовых пучков.
- Предложены новые законы управления фокусировкой пучков.
- Проведено их тестирование и численно показано, что они сходятся.
- Развитый подход позволяет оценивать интенсивность пучка на зеркале через характеристики отраженного пучка.

Спасибо за внимание!