Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Коростелев Илья Юрьевич

Применение и численное исследование скорости сходимости итерационных методов вариационного типа для решения систем линейных алгебраических уравнений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
М. В. Абакумов

$$Ay = f,\ detA \neq 0$$

Одношаговые методы:

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau_{n+1}} + Ay_n = f;$$

$$n = 0, 1, ...;\ \ y_0 \in H$$

$$\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)}$$

Двушаговые методы:

$$B\frac{(y_{n+1}-y_n)+(1-\alpha_{n+1})(y_n-y_{n-1})}{\tau_{n+1}\alpha_{n+1}} + Ay_n = f,$$

$$k = 1, 2, ...$$

$$\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)};\ \ n = 0, 1, ...;$$

$$\alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_{n-1}, z_{n-1})}\right)^{-1};$$

$$n = 1, 2, ...;\ \alpha_1 = 1$$

Для примера, N=9

1. $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = A^T > 0$$

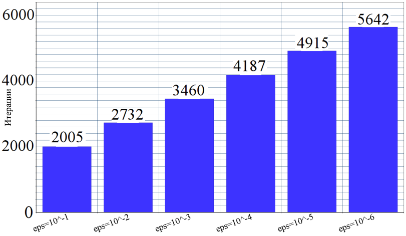
2. $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M \neq M^T,\ M > 0$$

3. Матрица СЛАУ, получаемой при численном решении уравнения НАвье-Стокса для несжимаемой жидкости в естественных переменных на разностных сетках.

$$S \neq S^T$$

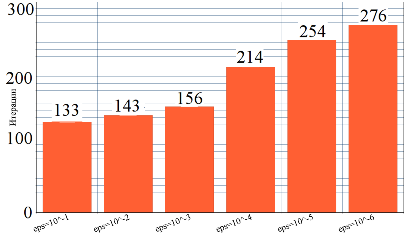
Метод сопряженных невязок(для матрицы A)



$n_0(\epsilon)$:

$$n_0(0.1) = 4759$$
$$n_0(0.01) = 9519$$
$$n_0(0.001) = 14279$$
$$n_0(0.0001) = 19039$$
$$n_0(0.00001) = 23798$$
$$n_0(0.000001) = 28558$$

Метод сопряженных невязок(для матрицы A)



$$n_0(\epsilon) \leq N = 10000$$

$$y_{n+1} = y_n - a_{n+1} s_n,$$
$$s_{n+1} = v_{n+1} + b_{n+1} s_n,$$
$$n = 0, 1, ..., \ s_0 = v_0$$

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} \tau_{n+1},$$

$$b_n = \frac{(\alpha_{n+1} - 1)\alpha_n \tau_n}{(\alpha_{n+1} \tau_{n+1})},$$

$$b_n = \frac{(Dv_n, z_n)}{Dv_{n-1}, z_{n-1}},$$
$$n = 1, 2, ...$$

$$a_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Ds_n, s_n)}$$
$$n = 0, 1, ...$$

При применении к S других, теоритически подходящих, методов значение $||z_n||$ не достигает заданных ϵ

Основная идея метода Крейга:

$$Ay = b$$

$$A^*x = y$$

$$AA^*x = b$$

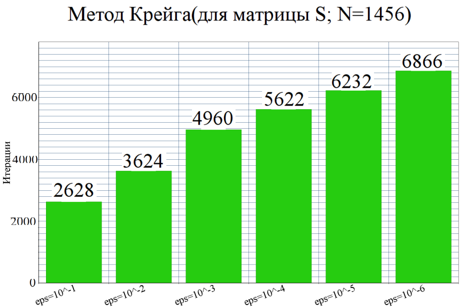
Например в одношаговой форме:

$$r_k = Ax_k - b,$$

$$p_k = p_{k-1} + r_k/(r_k, r_k),$$

$$q_k = A^T p_k,$$

$$x_{k+1} = x_k - q_k/(q_k, q_k)$$



Недостатком данной системы является дополнительное умножение на матрицу.

Результатом работы стала реализация итерационных методов вариационного типа, стандартных и некоторых других. А так же их численное исследование на примерах разреженных матриц с различными свойствами.

Спасибо за внимание!