Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Колокольников Алексей Михайлович

Математическое моделирование турбулентных течений за обратной ступенькой при больших числах Рейнольдса

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
В. М. Головизнин

Москва, 2016

Цель и постановка задачи

Разработать алгоритм решения системы уравнений Навье-Стокса с приближением слабой сжимаемости, используя явную схему КАБАРЕ. Написать и отладить программу, реализующую данный алгоритм. Исследовать течения за обратной ступенькой при различных числах Рейнольдса.

Решаемая система имеет вид:

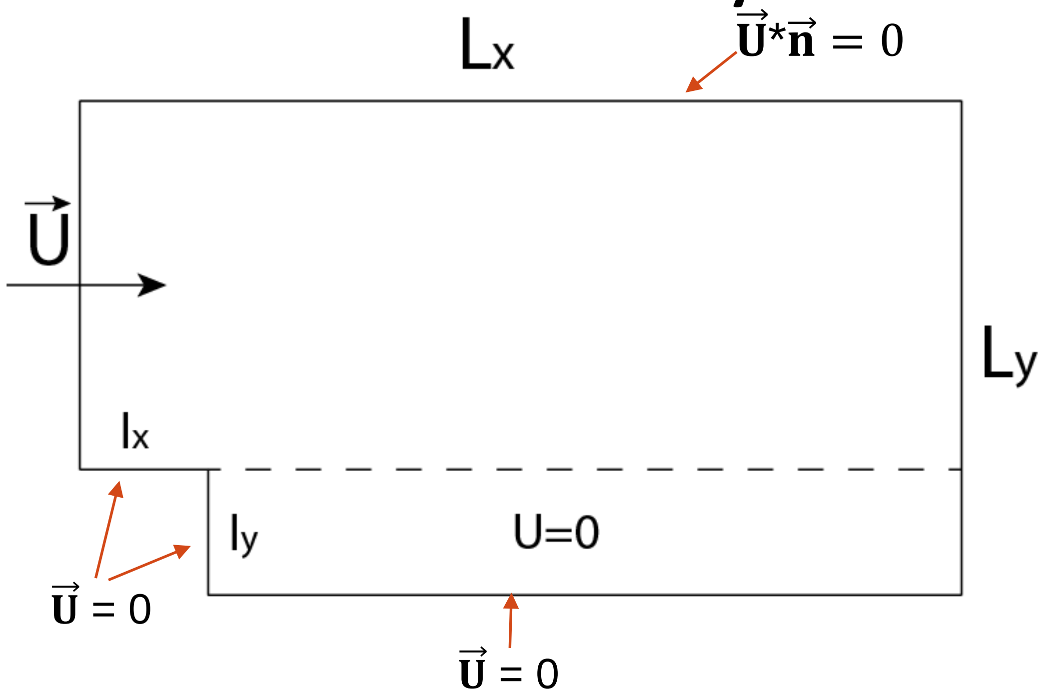
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v}\mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mu \Delta \mathbf{v}, \\ p = c^2(\rho - \rho_0), \end{cases}$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{cases} \rho\left(\mathbf{x},0\right) = \rho_0\left(\mathbf{x}\right) \\ \mathbf{v}\left(\mathbf{x},0\right) = u_0\left(\mathbf{x}\right)' \end{cases} \quad \mathbf{x} \in G \qquad \begin{cases} \rho\left(\mathbf{x},t\right)|_{\partial G} = \rho\left(t\right) \\ \mathbf{v}\left(\mathbf{x},t\right)|_{\partial G} = \mathbf{v}\left(t\right)' \end{cases} \quad t \in [0,T]$$

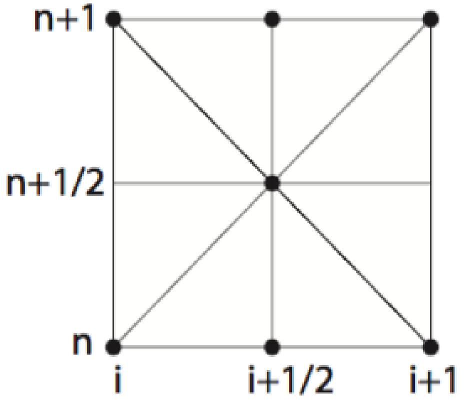
Рассматривается двумерный случай математической модели.

Описание области со ступенькой



В начальный момент времени горизонтальная скорость u равна нулю в нижней части области, а в верхней части равна значению скорости входного потока. Вертикальная скорость v=0 во всей области. На верхней границе задано условие проскальзывания, на нижней-условие прилипания, на правой границе задаются неотражающие граничные условия, а на левую границу приходит входной поток.

Явная схема КАБАРЕ. Одномерный случай



$$\begin{cases} \dfrac{(\rho)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\rho)_{i+1/2}^{n}}{\tau/2} + \dfrac{(\rho u)_{i+1}^{n} - (\rho u)_{i}^{n}}{h_x} = 0, \\ \dfrac{(\rho u)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\rho u)_{i+1/2}^{n}}{\tau/2} + \dfrac{(\rho u^2 + p)_{i+1}^{n} - (\rho u^2 + p)_{i}^{n}}{h_x} = Q_{i+1/2}^{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_1)_i^{n+1} = 2(I_1)_{i-1/2}^{n+1/2} - (I_1)_{i-1}^{n} \\ (I_2)_i^{n+1} = 2(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_2)_{i+1}^{n} \end{cases}$$

$$(I_k)_i^{n+1} = \begin{cases} max(I_k), & I_i^{n+1} \geq max(I_k) \\ min(I_k), & I_i^{n+1} \leq min(I_k) \\ (I_k)_i^{n+1}, & min(I_k) \leq I_i^{n+1} \leq max(I_k) \end{cases} \qquad k = 1, 2$$

где

$$\begin{cases} max(I_k) = max\{(I_k)_{i-1}^{n}, (I_k)_{i-1/2}^{n}, (I_k)_{i}^{n}\} + \tau Q_{i+1/2}^{n+1/2} \\ min(I_k) = min\{(I_k)_{i-1}^{n}, (I_k)_{i-1/2}^{n}, (I_k)_{i}^{n}\} + \tau Q_{i+1/2}^{n+1/2} \end{cases} \qquad k = 1, 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{(\rho)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + \dfrac{(\rho u)_{i+1}^{n+1} - (\rho u)_{i}^{n+1}}{h_x} = 0, \\ \dfrac{(\rho u)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + \dfrac{(\rho u^2 + P)_{i+1}^{n+1} - (\rho u^2 + P)_{i}^{n+1}}{h_x} = Q_{i+1/2}^{n} \end{cases}$$

Явная схема КАБАРЕ. Двумерный случай

Нелинейная коррекция в двумерном случае выглядит следующим образом:

$$(I_k^x)_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} max(I_k^x), & (I_k^x)_{i,j+1/2}^{n+1} > max(I_k^x) \\ min(I_k^x), & (I_k^x)_{i,j+1/2}^{n+1} < min(I_k^x) \\ (I_k^x)_{i,j+1/2}^{n+1}, & min(I_k^x) \le (I_k^x)_{i,j+1/2}^{n+1} \le max(I_k^x) \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} max(I_k^x) = max\{(I_k^x)_{i-1,j+1/2}^n, (I_k^x)_{i-1/2,j+1/2}^n, (I_k^x)_{i,j+1/2}^n\} + \tau_{n+1/2} < G_k^x >_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \\ min(I_k^x) = min\{(I_k^x)_{i-1,j+1/2}^n, (I_k^x)_{i-1/2,j+1/2}^n, (I_k^x)_{i,j+1/2}^n\} + \tau_{n+1/2} < G_k^x >_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \end{cases}$$

Здесь $< G_k^x >_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}$ - разностная аппроксимация правой части, задаваемая следующим образом:

$$< G_k^x >_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \frac{(I_k^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (I_k^x)_{i-1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_k^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \frac{(I_k^x)_{i,j+1/2}^n - (I_k^x)_{i-1,j+1/2}^n}{h_x}$$

Тестовые расчеты. Распространение возмущения плотности

Начальные данные :

Распределение плотности:

$$\rho(r) = \frac{\left(-\rho_0 * \frac{\alpha^2}{4\beta} * exp\left(2\beta(1-\eta^2)\right) + P_0\right)}{c^2} + \rho_0,$$

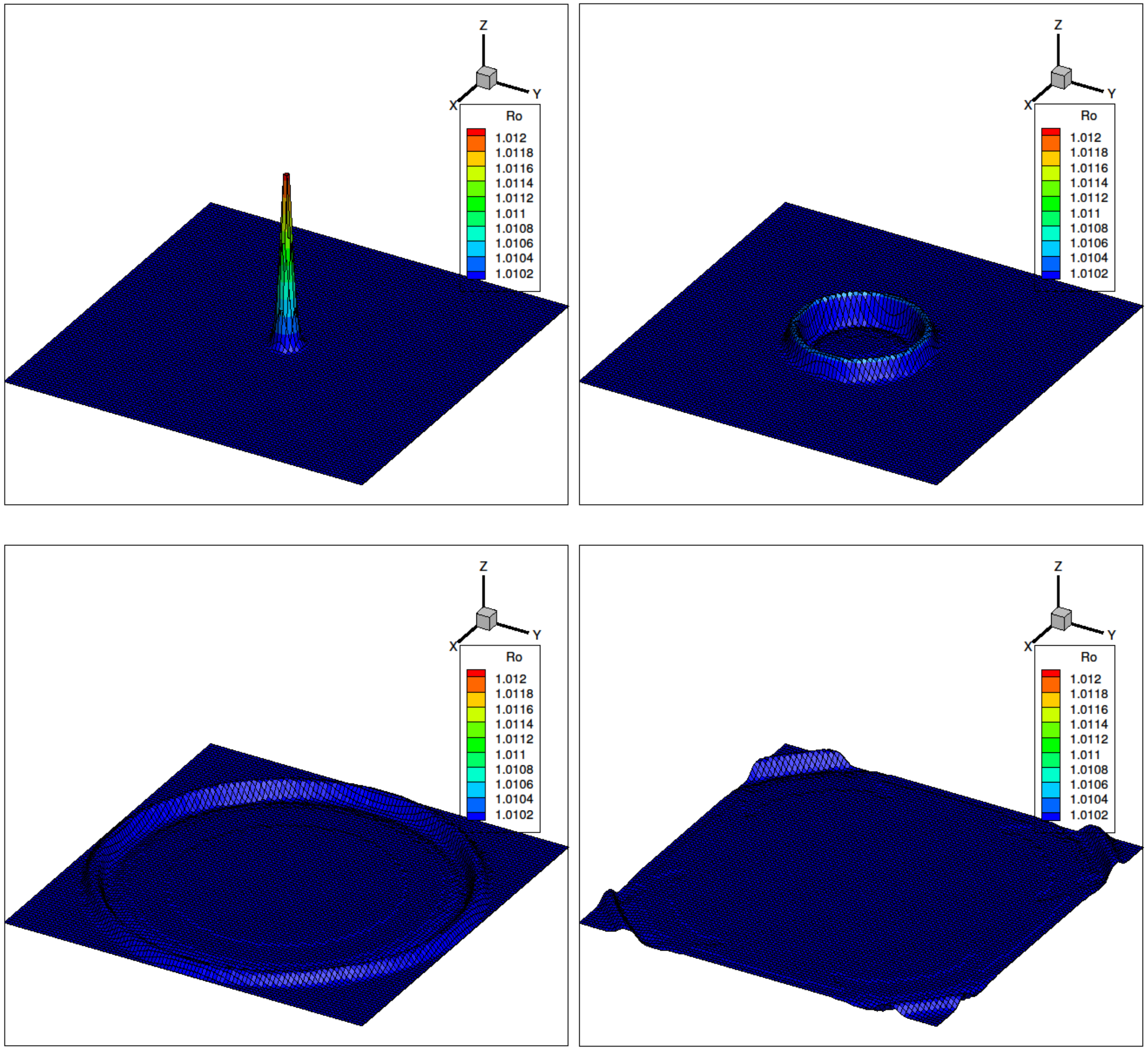
где $\eta = r/r_0, r = \sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$

$\alpha = 0.404, \beta = 0.3, r_0 = 0.03, P_0 = 1, \rho_0 = 1$

Поле скоростей:

$u(x,y) = 0, v(x,y) = 0.$

Сетка 100x100, CFL = 0,3.



На границах заданы неотражающие граничные условия через инварианты Римана на бесконечности.

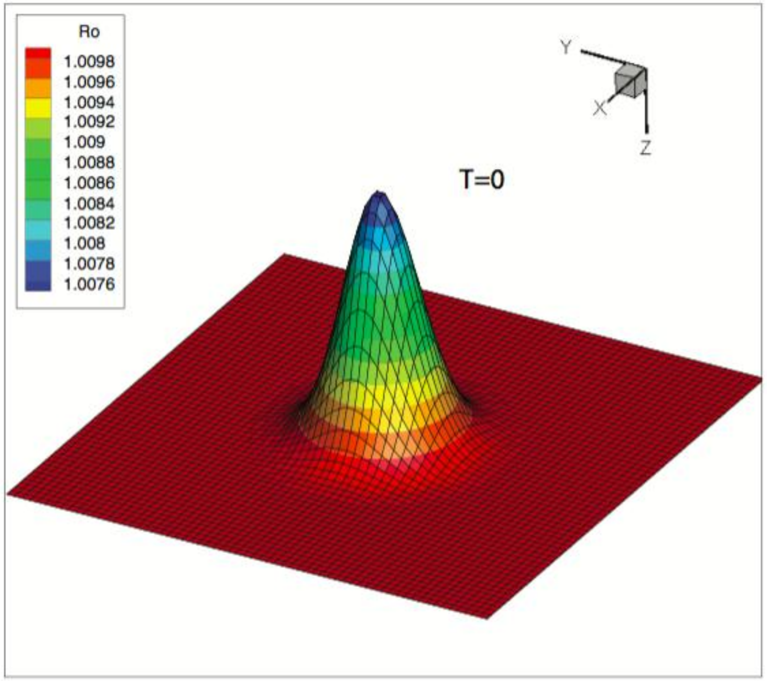
Тестовые расчеты. Изолированный вихрь

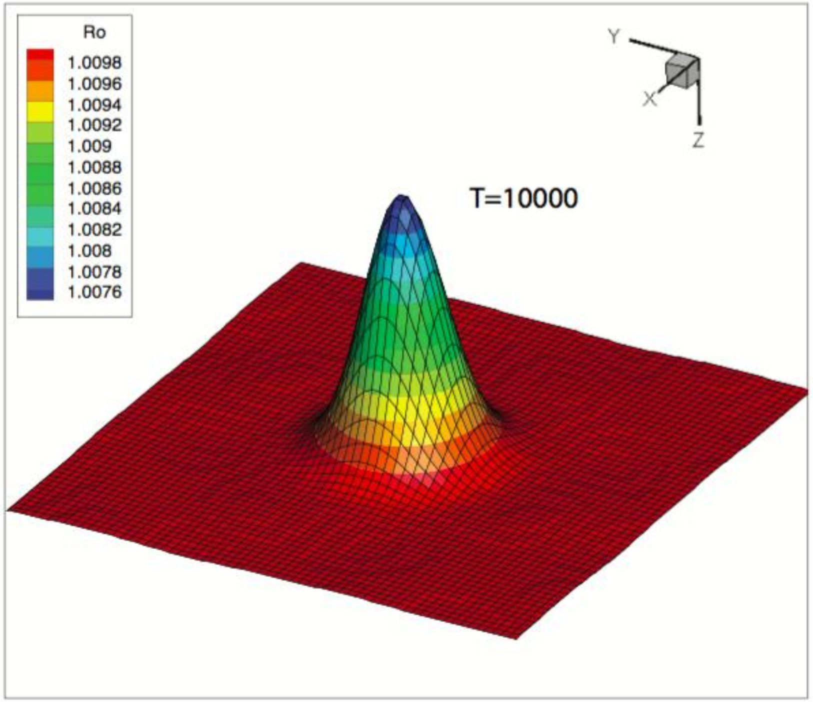
Распределение плотности:

$$\rho(r) = \frac{\left(-\rho_0 * \frac{\alpha^2}{4\beta} * exp\left(2\beta(1-\eta^2)\right) + P_0\right)}{c^2} + \rho_0.$$

Поле скоростей: $u_\tau(r,\varphi) = \alpha * \eta * exp\left(\beta(1-\eta^2)\right)$, где $\eta = r/r_0, r = \sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$

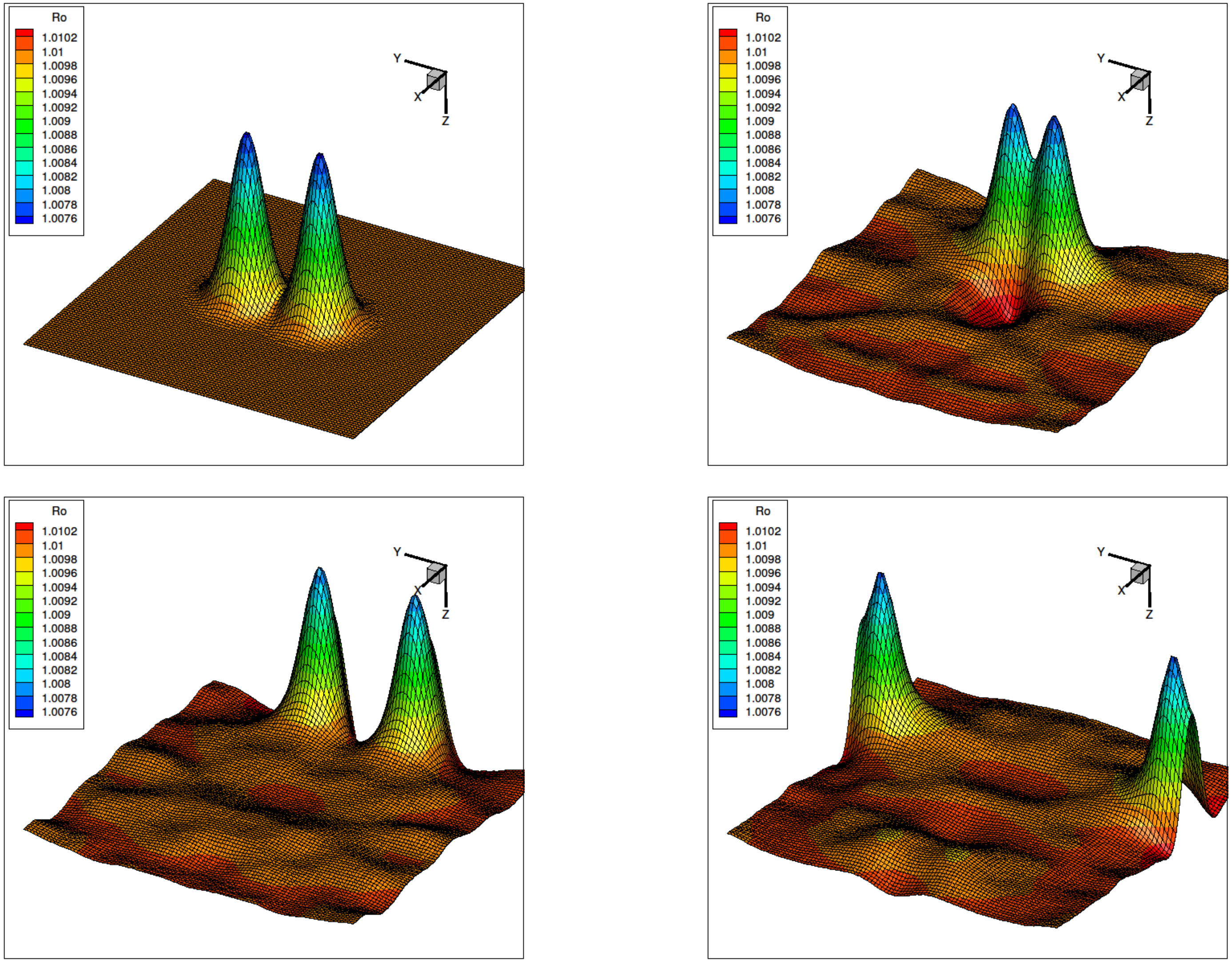
$\alpha = 0.404, \beta = 0.3, r_0 = 0.15, P_0 = 1, \rho_0 = 1$





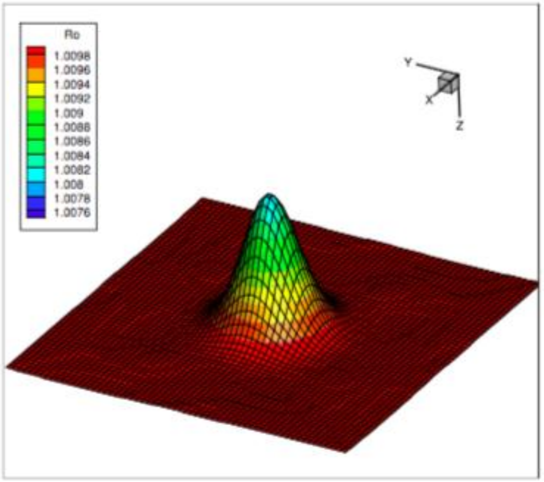
Распределение плотности для изолированного вихря. Сетка 64x64, CFL = 0,3.

Тестовые расчеты. Вихревой диполь

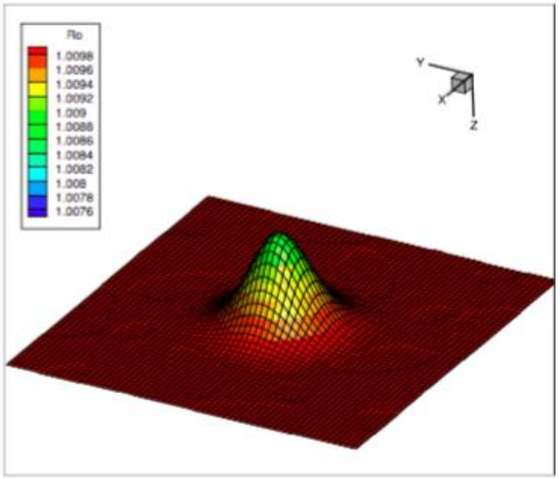


Распределение плотности для вихревого диполя. Сетка 100x100, CFL = 0,3.

Тестовые расчеты. Учет вязкости



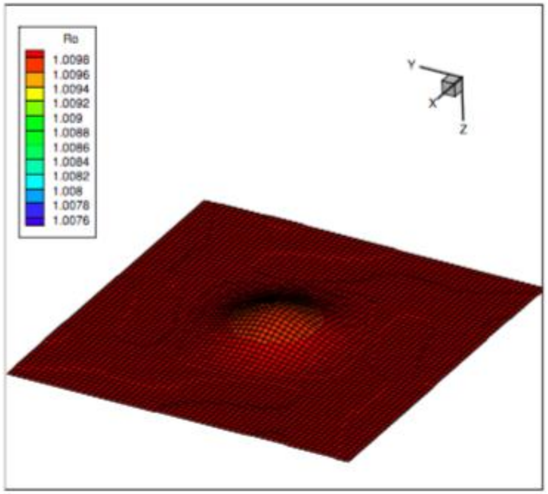
а)



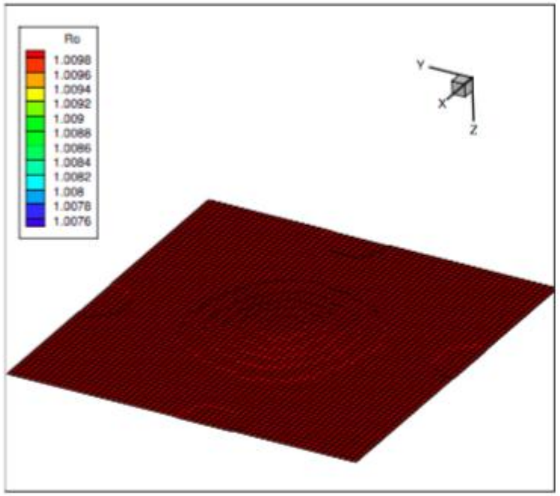
б)

Профили плотности для вихря с вязкостью:

а) Re=1000, T=4000
б) Re=1000, T=10000



в)

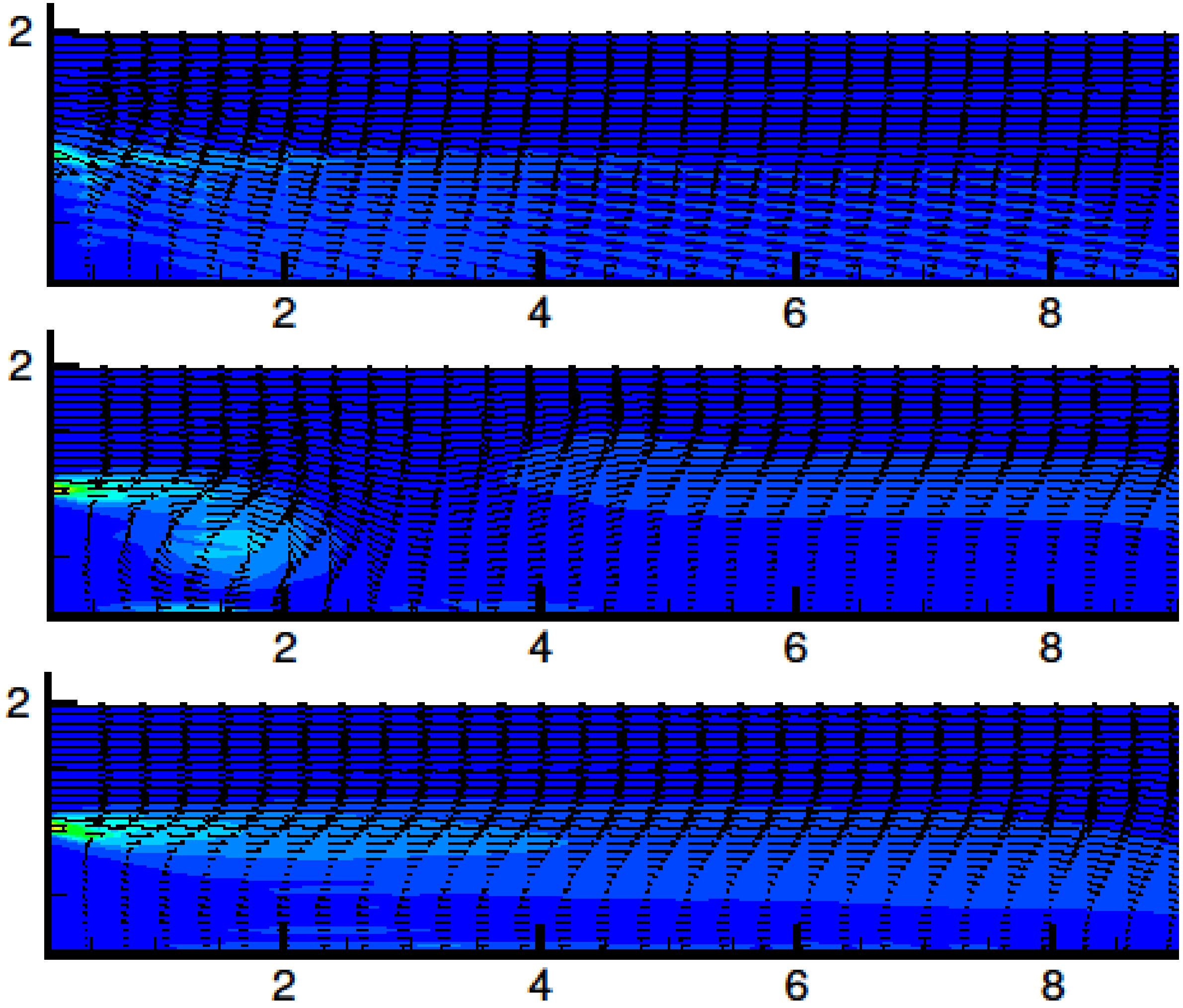


г)

в) Re=100, T=4000
г) Re=100, T=10000

Распределение плотности для вихря с вязкостью. Сетка 100x100, CFL = 0,3.

Течения за обратной ступенькой



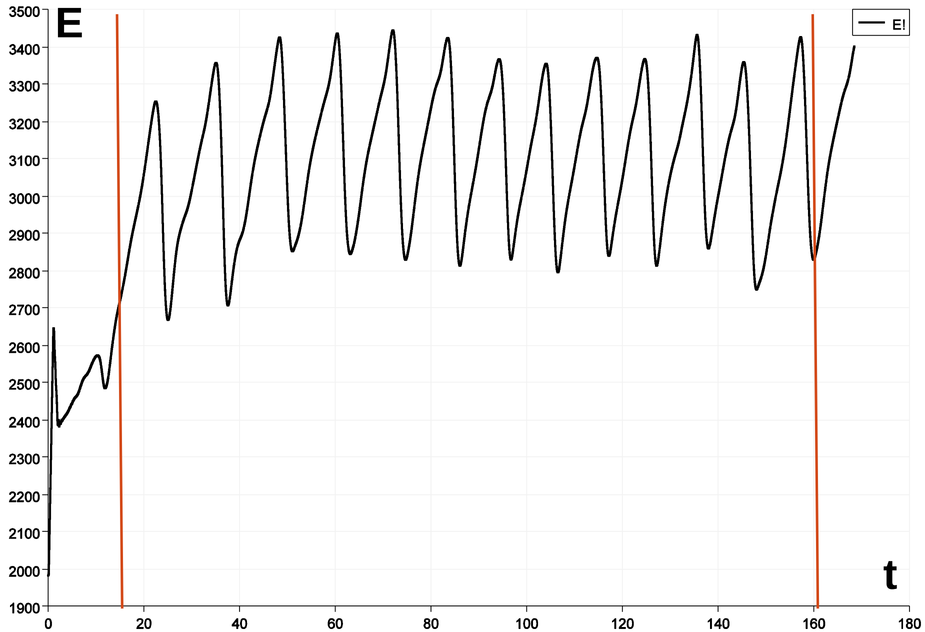
Re = 10

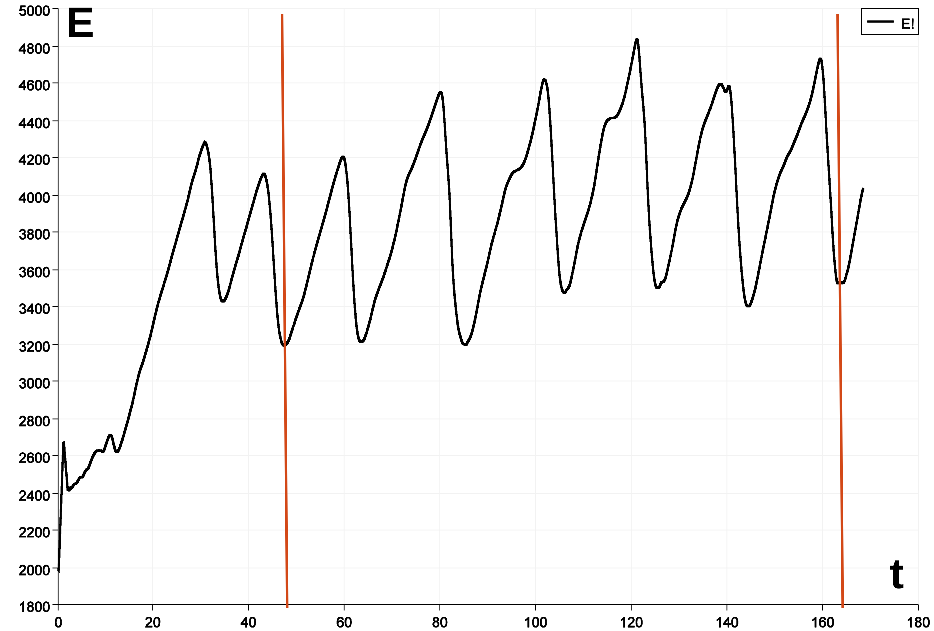
Re = 170, формирование вихря

Re = 170, установившееся течение

Поля скоростей для разных чисел Рейнольдса

Отрезок по времени для осреднения



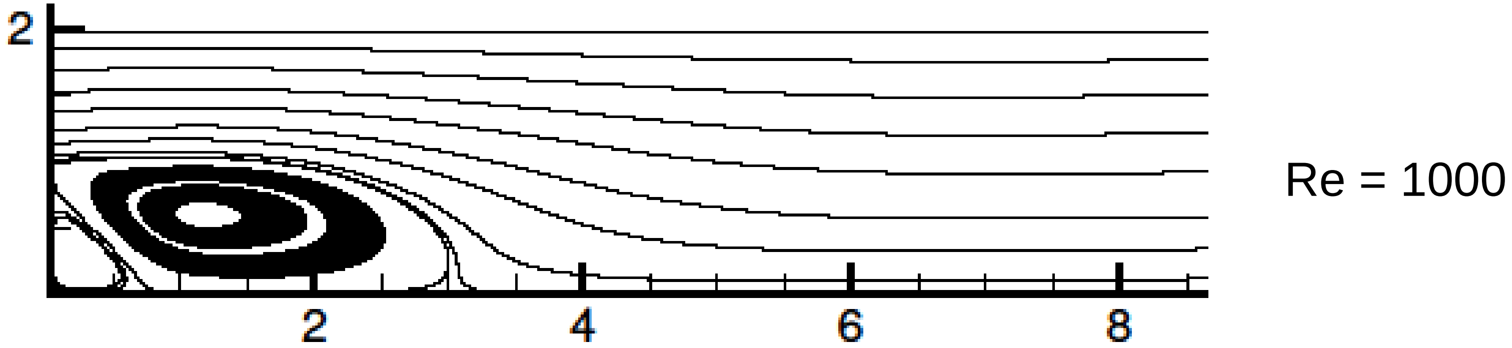


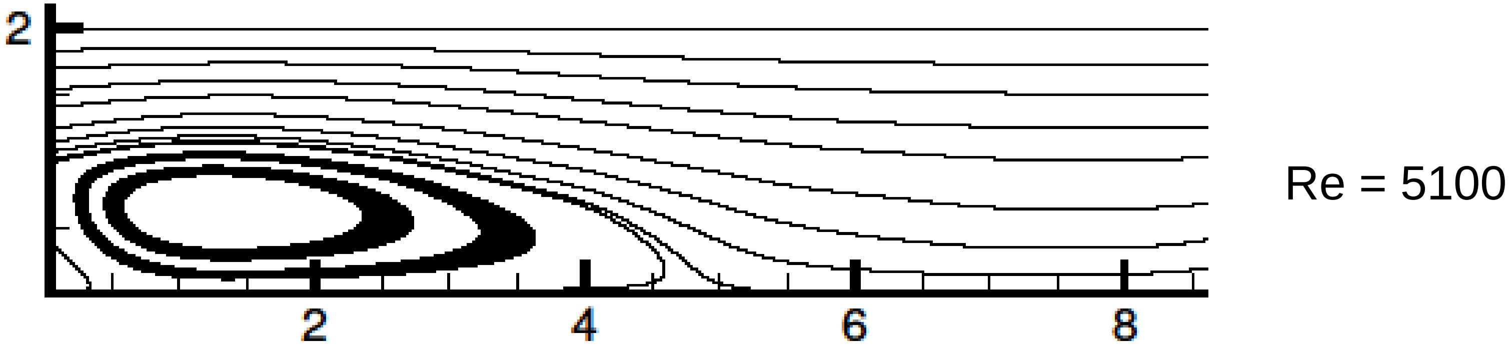
Re = 1000

Re = 5100

Графики кинетической энергии в расчетной области

Линии тока осредненных течений за обратной ступенькой для двух различных чисел Рейнольдса





Заключение

Реализована явная схема КАБАРЕ для системы уравнений Навье-Стокса в приближении слабой сжимаемости. Проведены верификационные расчеты:

- задача о распространении возмущения плотности
- задача о динамике изолированного вихря с учетом и без учета вязкости
- задача о динамике вихревого диполя

Проведены расчеты течения за обратной ступенькой при числах Рейнольдса: 10,170,1000,5100. Показано, что при числах Рейнольдса меньше 70, течение является ламинарным. Проведена статистическая обработка течений при числах Рейнольдса 1000 и 5100. Для этих случаев построены линии тока.

Спасибо за внимание!