



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Иванов Артем Андреевич

Точность вычислительных методов решения задачи Кеплера

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор Г.Г.Еленин

Задача Кеплера

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial H(V_x, V_y, x, y)}{\partial x} = -\gamma M r^{-3} x,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial H(V_x, V_y, x, y)}{\partial y} = -\gamma M r^{-3} y,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(V_x, V_y, x, y)}{\partial V_x} = V_x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(V_x, V_y, x, y)}{\partial V_y} = V_y;$$

$$V_x(0) = V_{x,0}, \quad V_y(0) = V_{y,0}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Силовой центр находится в начале координат.

Неизвестные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$ определяют декартовы координаты и составляющие скорости точки в плоскости движения в момент времени $t > 0$.

Числа x_0 , y_0 , $v_{x,0}$, $v_{y,0}$ задают начальное состояние динамической системы.

Глобальные свойства

Точное решение задачи Кеплера имеет ряд глобальных свойств, отражающих глубокое геометрическое и физическое содержание.

- 1) Решение осуществляет симплектическое отображение начального состояния в текущее состояние $(v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0) \rightarrow (v_x(t), v_y(t), x(t), y(t))$:
- 2) Отображение является обратимым во времени в следующем смысле:
 $(v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0) \rightarrow (v_x(t), v_y(t), x(t), y(t)) \rightarrow (-v_x(t), -v_y(t), x(t), y(t)) \rightarrow (\underline{v}_x(2t), \underline{v}_y(2t), \underline{x}(2t), \underline{y}(2t)) \rightarrow (-\underline{v}_x(2t), -\underline{v}_y(2t), \underline{x}(2t), \underline{y}(2t)) = (v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0)$.

- 3) На любом решении задачи (1) - (5) сохраняются момент количества движения I_z , полная энергия H , компоненты вектора Лапласа-Рунге-Ленца e_{LRL} , фазовый объем V_{ph} :

$$I_z(t) = x(t)v_y(t) - y(t)v_x(t) = I_{z,0},$$

$$H = 0.5v^2(t) - gMr(t)^{-1} = 0.5v_0^2 - gMr_0^{-1} = -H^*,$$

$$e_{LRL,x}(t) = v_y^2(t)x(t) - v_x(t)v_y(t)y(t) - gMr^{-1}(t)x(t) = v_y(t)I_z - gMr^{-1}(t)x(t) = e_{LRL,x}(0) = e_{LRL,x,0},$$

$$e_{LRL,y}(t) = v_x^2(t)y(t) - v_x(t)v_y(t)x(t) - gMr^{-1}(t)y(t) = -v_x(t)I_z - gMr^{-1}(t)y(t) = e_{LRL,y}(0) = e_{LRL,y,0},$$

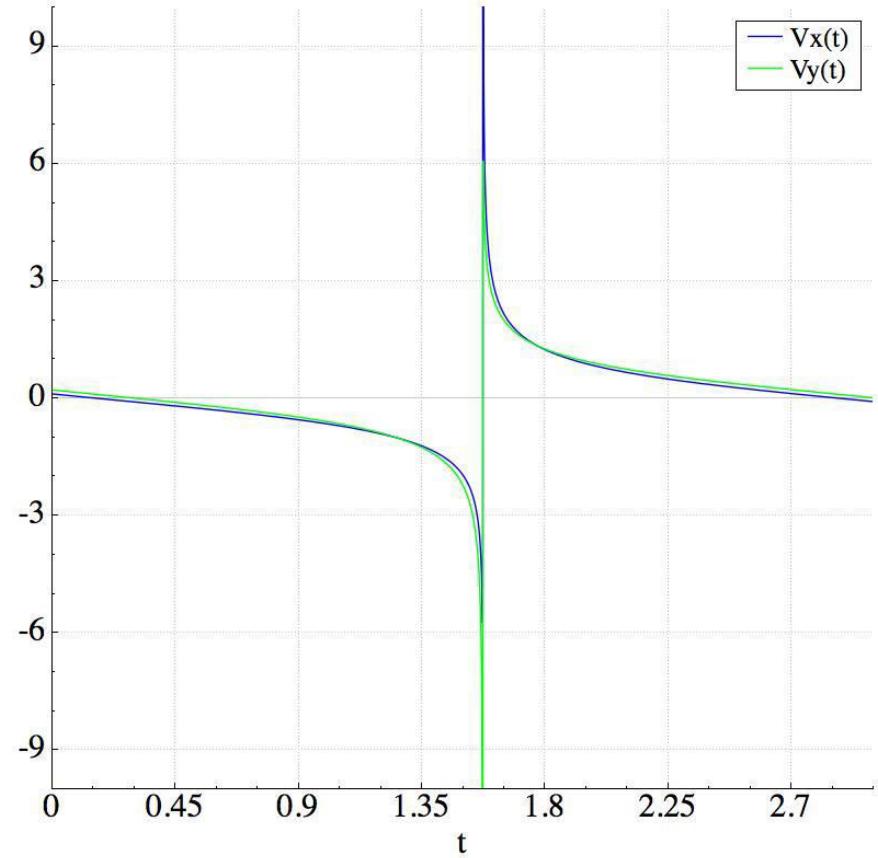
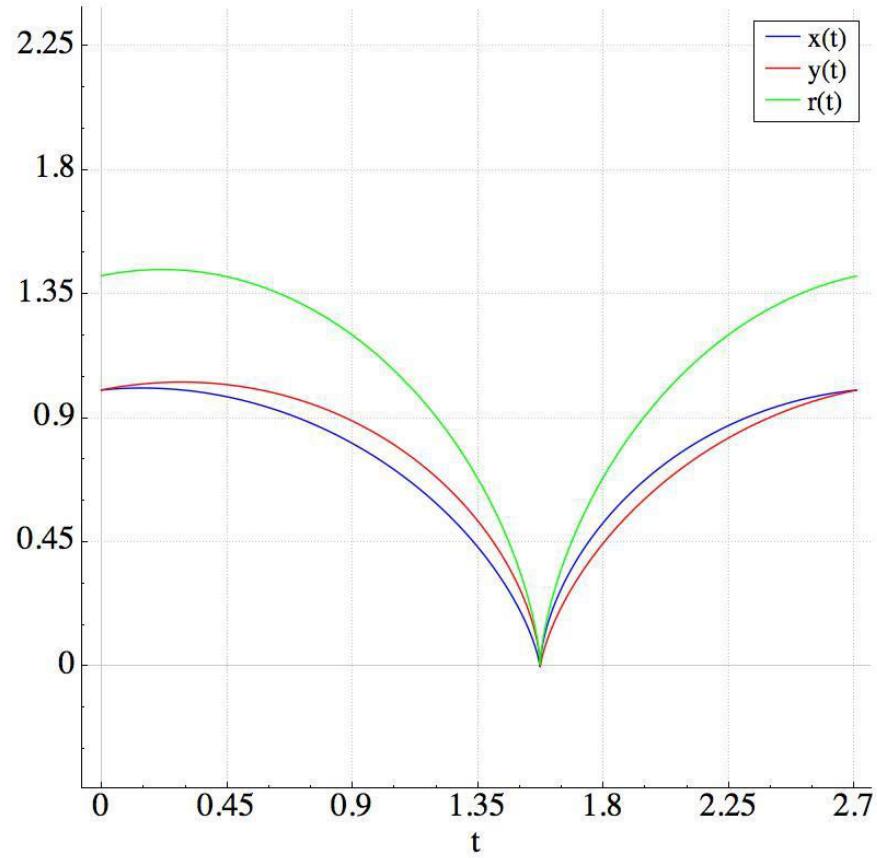
$$V_{ph}(t) = V_{ph}(0) = V_{ph,0}.$$

Первые интегралы I_z , H , $e_{LRL,x}$, $e_{LRL,y}$ не являются независимыми. Между ними существует связь

$$2H(t)I_z^2(t) = e_{LRL,x}^2(t) + e_{LRL,y}^2(t) - g^2M^2.$$

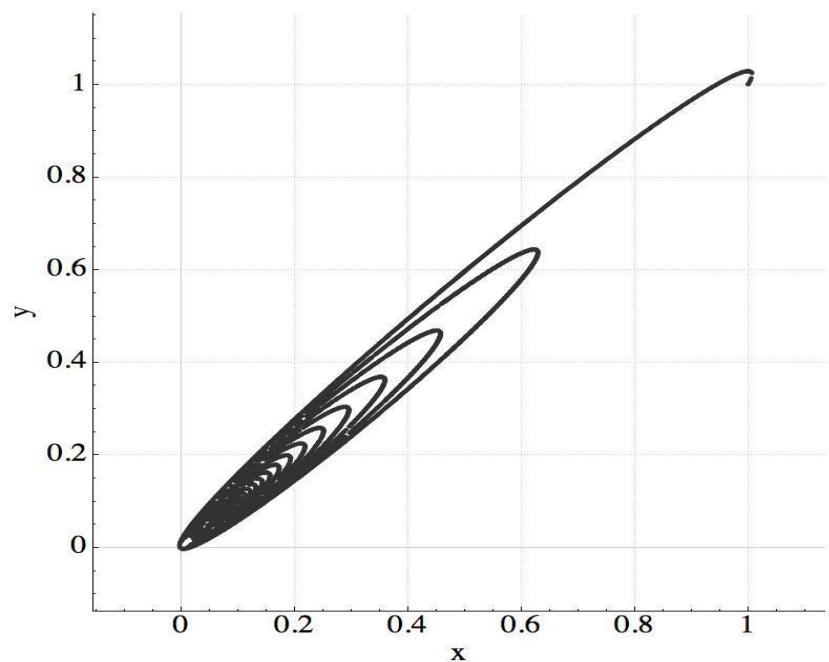
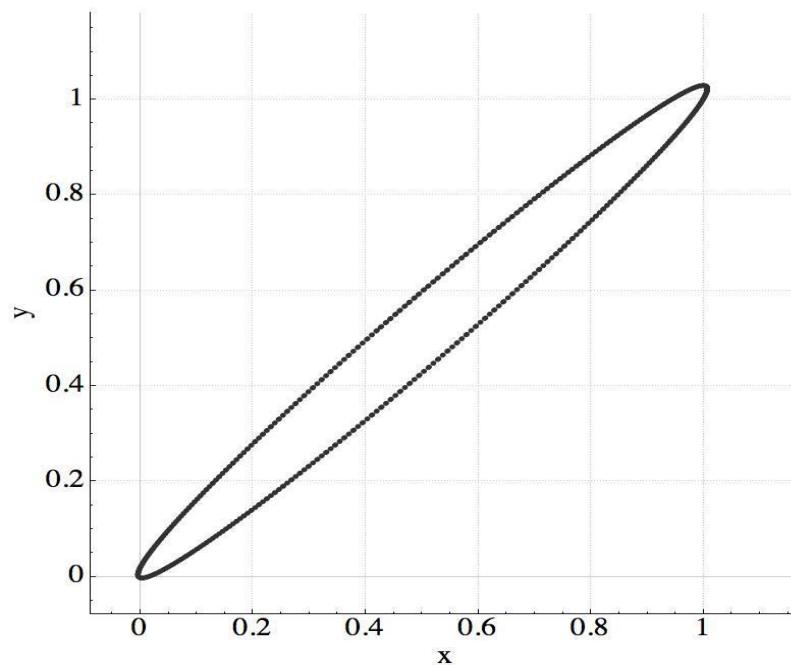
Цели

1. Исследовать точность новых методов.
2. Сравнить новые методы с явными методами Рунге – Кутты и Верле.

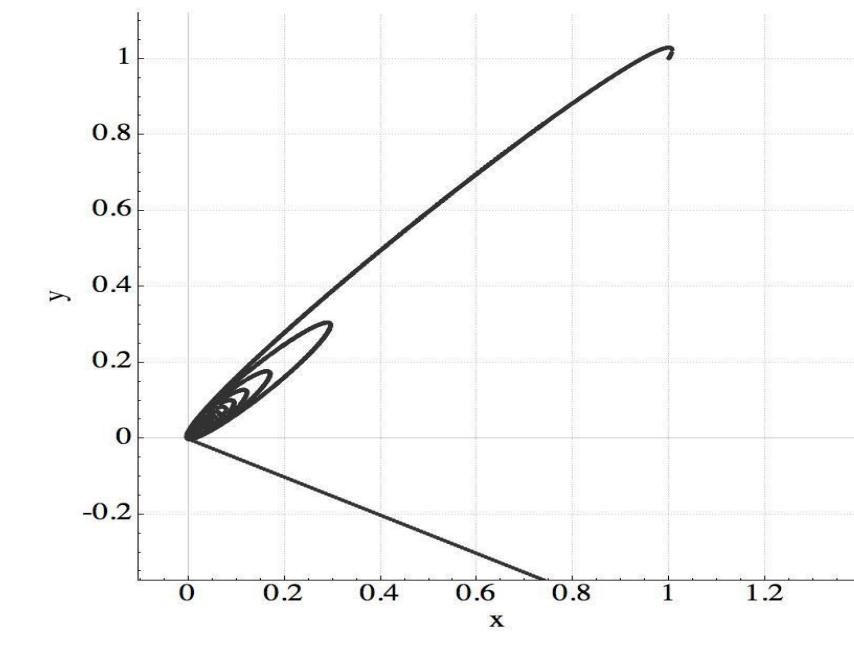


Зависимости положения (x, y, r) и скорости (v_x, v_y) от времени t .

Точное решение



Метод Верле при 500000 точек на период



Метод Рунге-Кутты при 50000 точек на период

Адаптивные методы численного решения задачи Кеплера

$$x_{i+1} = x_i + 2r_i v_{x,i} q_1 \Delta\theta - 2(2H^* x_i + e_{LRL,x,i}) q_2 (\Delta\theta)^2,$$

$$y_{i+1} = y_i + 2r_i v_{y,i} q_1 \Delta\theta - 2(2H^* y_i + e_{LRL,y,i}) q_2 (\Delta\theta)^2,$$

$$t_{i+1} = t_i + 2r_i q_1 \Delta\theta + 2(x_i v_{x,i} + y_i v_{y,i}) q_2 (\Delta\theta)^2 + gM q_3 (\Delta\theta)^3,$$

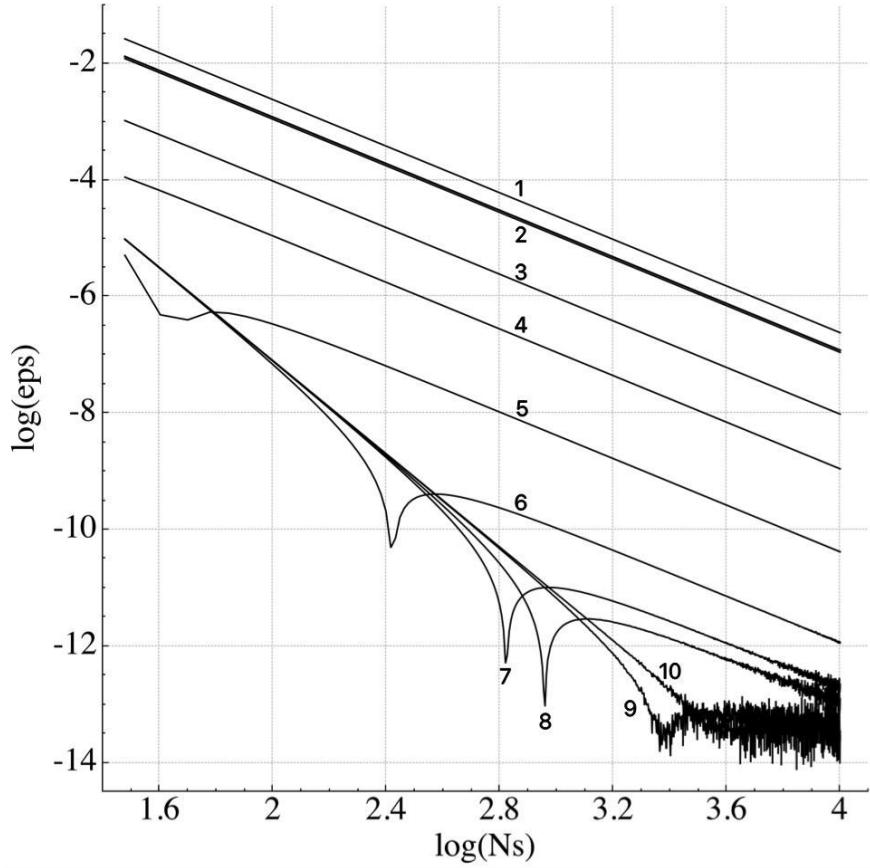
$$r_{i+1} = (gM)^{-1} (I_{z,i}^{-2} - e_{LRL,x,i} x_{i+1} - e_{LRL,y,i} y_{i+1}),$$

$$v_{x,i+1} = - (I_{z,i}^{-2} e_{LRL,y,i} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} x_{i+1} + (g^2 M^2 - e_{LRL,y,i}^{-2}) y_{i+1}) (gM I_{z,i})^{-1} r_{i+1}^{-1},$$

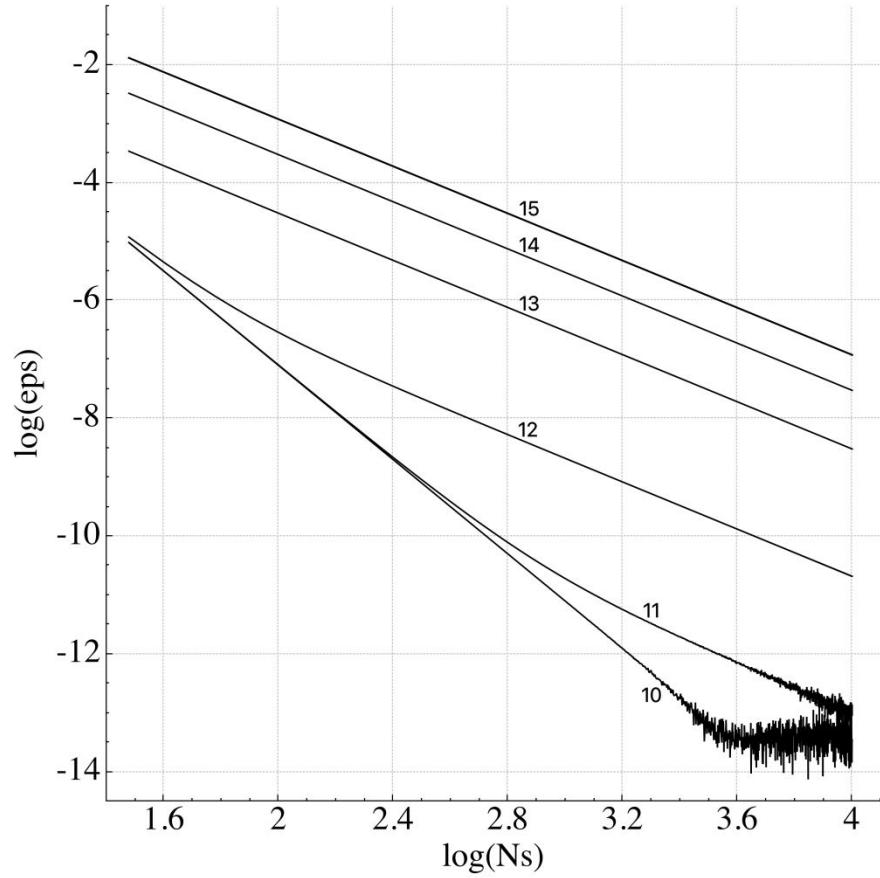
$$v_{y,i+1} = (I_{z,i}^{-2} e_{LRL,x,i} + (g^2 M^2 - e_{LRL,x,i}^{-2}) x_{i+1} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} y_{i+1}) (gM I_{z,i})^{-1} r_{i+1}^{-1},$$

$$i = 0, 1, \dots$$

$q_1 = (1 - s^2 2H^*(\Delta\theta)) \Delta_2^{-1}$ – однопараметрическое семейство методов



а



б

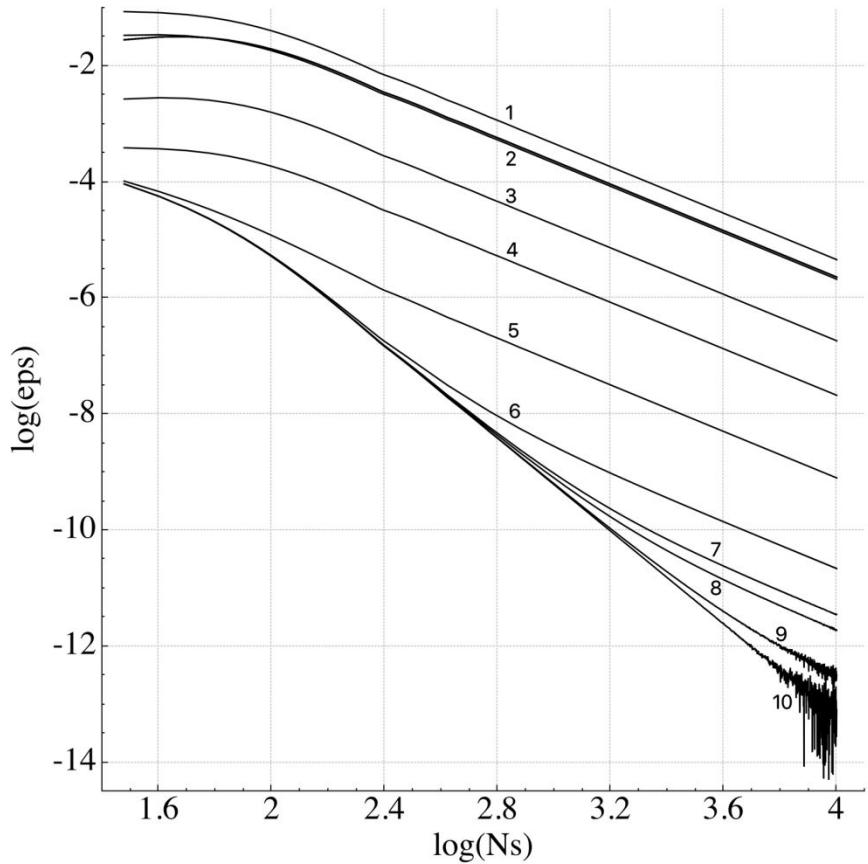
Зависимости логарифма погрешности координат от логарифма числа расчетных точек при
 $s \in \{s\}_1$ ($s \in \{s\}_2$) (а) ((б)) при первой параметризации.

$$\{s\}_1 = \{-1.0, -0.8, -0.6, -0.58, -(3^{-0.5} + 0.0001), -0.5773530, -0.5773507, -0.5773505, -0.5773503, -3^{-0.5}\}.$$

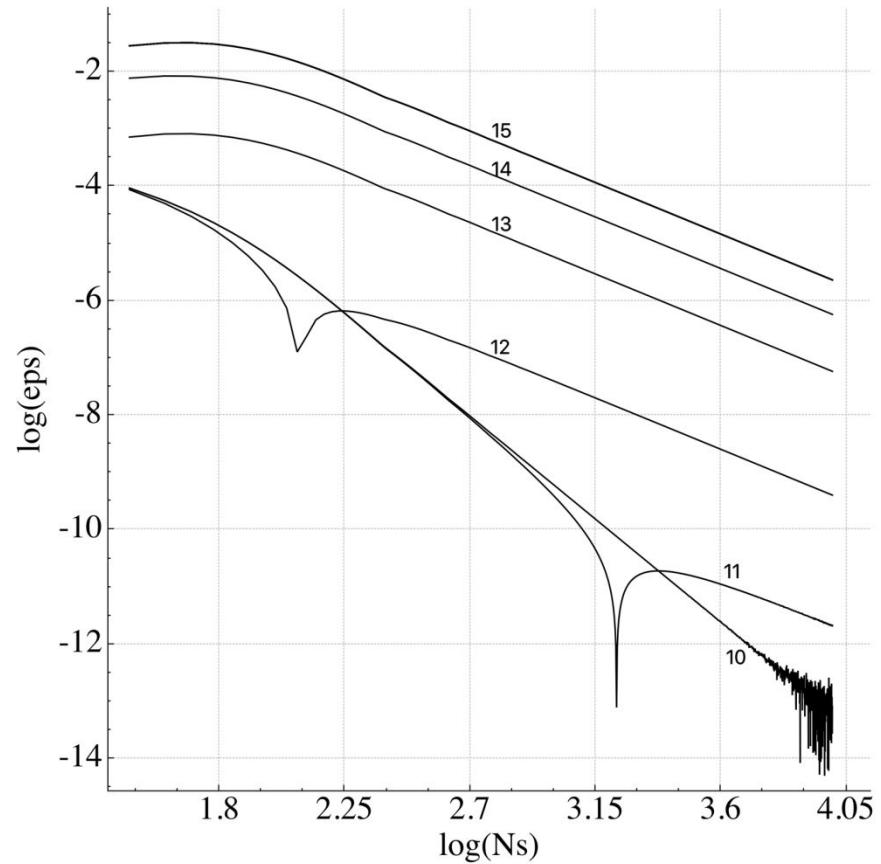
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$$\{s\}_2 = \{-3^{-0.5}, -0.57735, -0.57730, -0.57, -0.5, 0\}.$$

10, 11, 12, 13, 14, 15



а



б

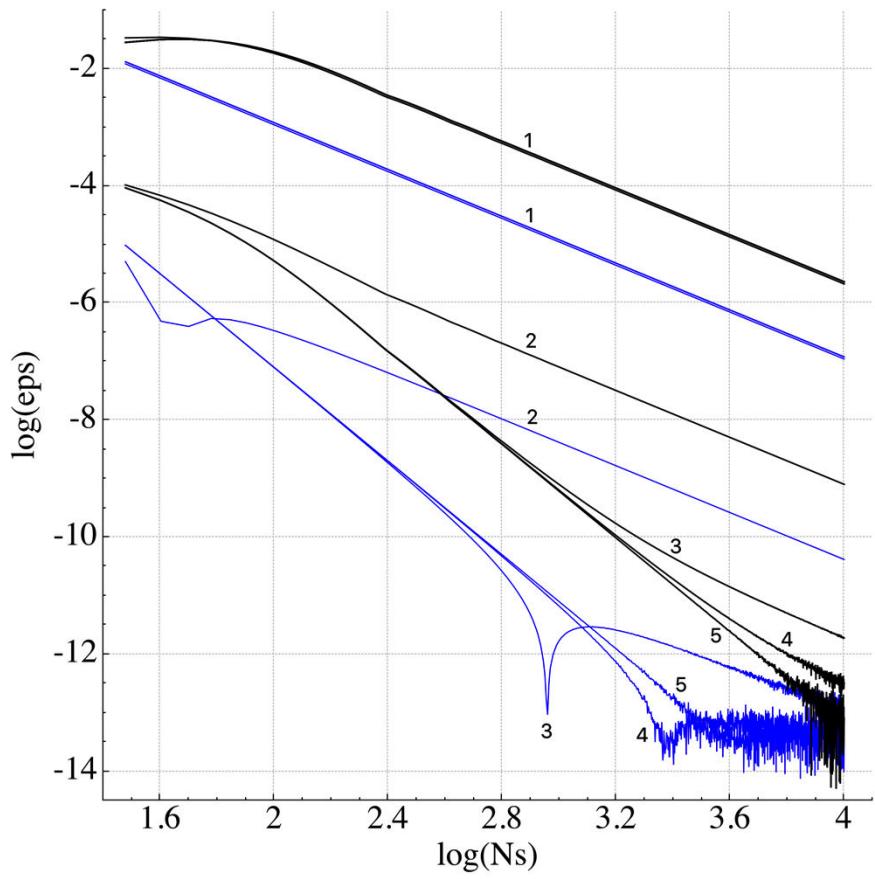
Зависимости логарифма погрешности координат от логарифма числа расчетных точек при $s \in \{s\}_1$ ($s \in \{s\}_2$) (а) ((б)) при второй параметризации.

$$\{s\}_1 = \{-1.0, -0.8, -0.6, -0.58, -(3^{-0.5} + 0.0001), -0.5773530, -0.5773507, -0.5773505, -0.5773503, -3^{-0.5}\}.$$

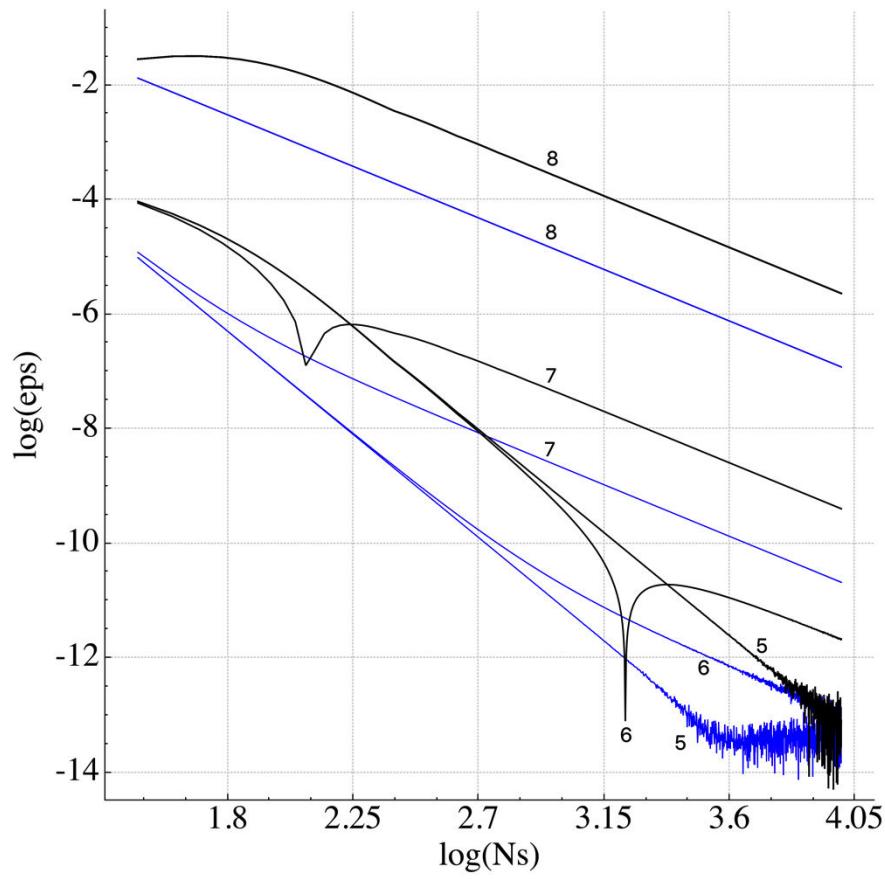
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$$\{s\}_2 = \{-3^{-0.5}, -0.57735, -0.57730, -0.57, -0.57, -0.5, 0\}.$$

10, 11, 12, 13, 14, 15



а



б

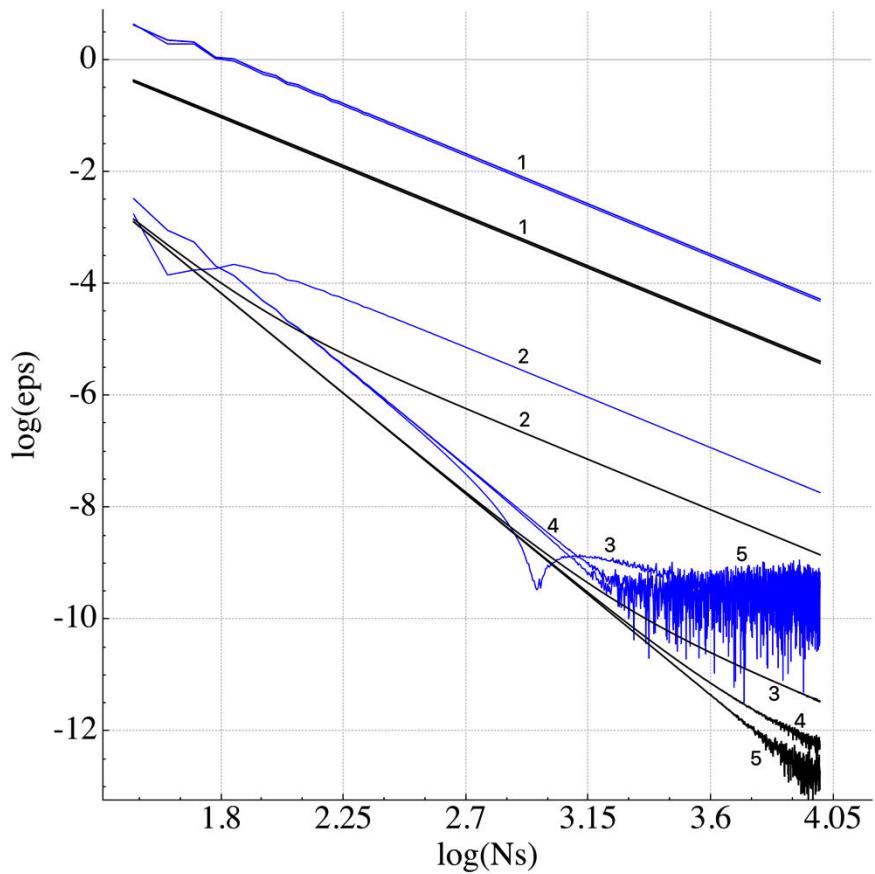
Зависимости логарифма погрешности координат от логарифма числа расчетных точек при $s \in \{s\}_1$ ($s \in \{s\}_2$) (а) ((б)) при первой и второй параметризациях.

$$\{s\}_1 = \{-0.8, -(3^{-0.5} + 0.0001), -0.5773505, -0.5773503, -3^{-0.5}\}.$$

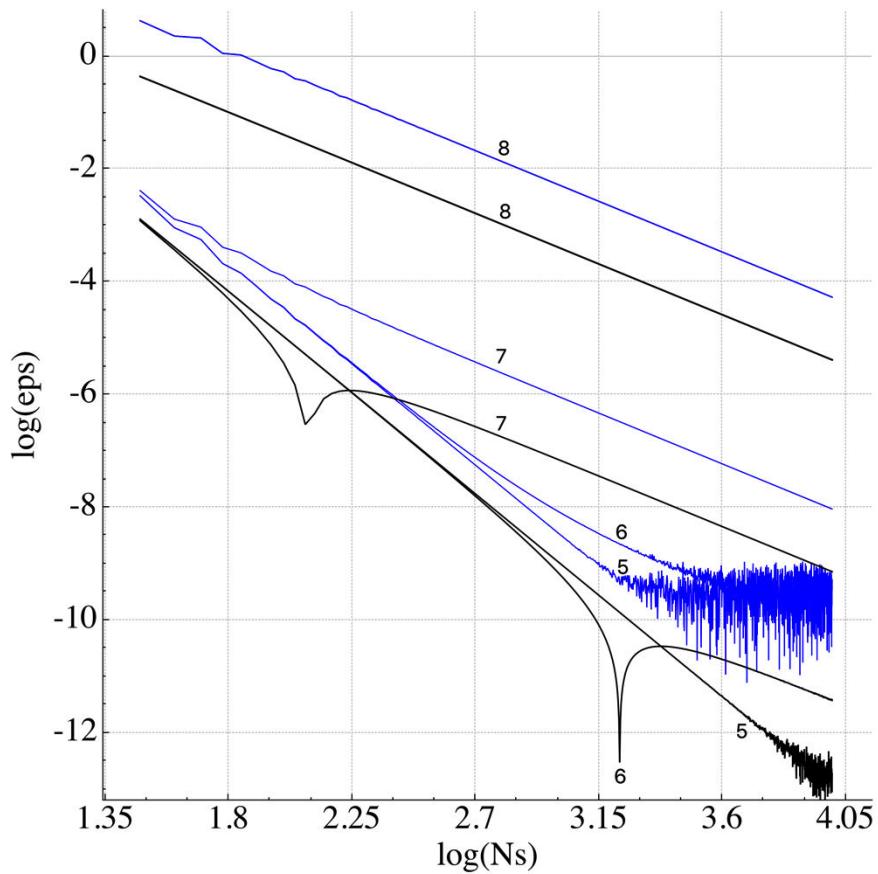
1, 2, 3, 4, 5

$$\{s\}_2 = \{-3^{-0.5}, -0.57735, -0.57730, 0\}.$$

5, 6, 7, 8



а



б

Зависимости логарифма погрешности скоростей от логарифма числа расчетных точек при $s \in \{s\}_1$ ($s \in \{s\}_2$) (а) ((б)) при первой и второй параметризациях.

$$\{s\}_1 = \{-0.8, -(3^{-0.5} + 0.0001), -0.5773505, -0.5773503, -3^{-0.5}\}.$$

1, 2, 3, 4, 5

$$\{s\}_2 = \{-3^{-0.5}, -0.57735, -0.57730, 0\}.$$

5, 6, 7, 8

Выводы

1. Численные методы с постоянным шагом по времени, в частности рассмотренные методы Верле и Рунге-Кутты, неэффективны для решения задачи Кеплера.
2. Рассмотренный однопараметрический адаптивный численный метод обеспечивает, по крайней мере, второй порядок точности, а при $s = -3^{0.5}$ – четвертый.
3. Также существуют такие пары значений параметра и числа точек на период, при которых приближенное решение отличается от точного лишь на ошибки округления.
4. При рассмотрении двух различных параметризаций выяснилось, что в одном случае точнее вычисляются координаты, а в другом – скорости.

Спасибо за внимание!