

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных методов

Григорьев Степан Андреевич

Математические модели двухфазных сред

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

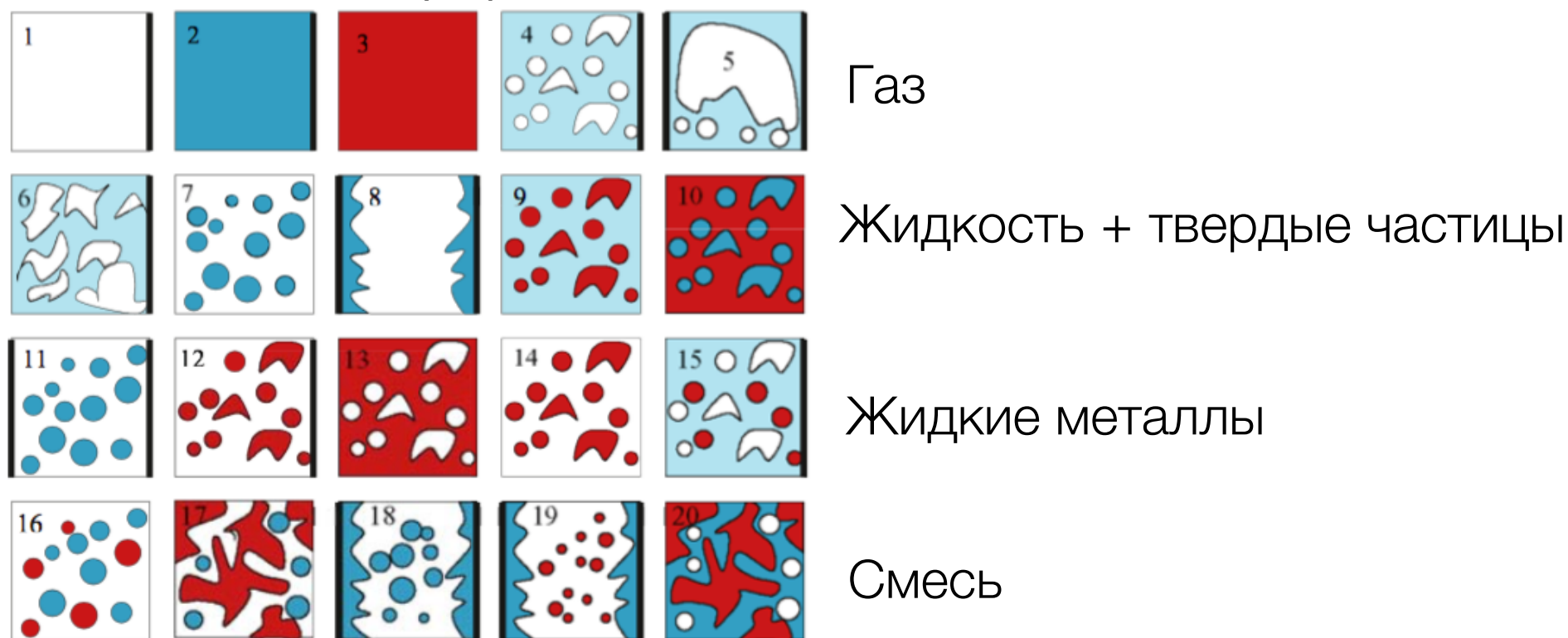
С.И. Мухин

Москва, 2016

Цель работы:

Моделирование течения многофазных сред

Обычно в качестве базовой используется модель сплошной среды, однако на практике часто приходится сталкиваться с разделением сплошности. Тогда имеет место граница раздела, отделяющая одну границу сплошной среды (фазу) от другой. Очевидно что свойства фаз при переходе через границу меняются. Простейшими многофазными системами являются двухфазные: «газ – твердые частицы», «газ – капли жидкости», «жидкость – пузырьки газа» и т.д.



Современное состояние механики многофазных сред характеризуется интенсивным развитием теоретических и экспериментальных исследований. Разработаны и математически описаны некоторые идеализированные модели движения таких сред. В рамках каждой модели наиболее простыми оказываются решения квазиодномерных задач. Естественно, что и в книге Kolev'a в одномерной трактовке представлены наиболее законченные решения.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача одномерного течения двухфазной среды типа
«жидкость - твердые частицы»

Рассматриваются уравнения сохранения

Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(a_{il}\langle\rho_{il}\rangle^l\gamma_v) + \nabla \cdot (a_{il}\langle\rho_{il}\rangle^l\langle\mathbf{V}_{il}^\tau\rangle^{le}\gamma) = -\frac{1}{Vol} \int_{F_{l\sigma}+F_{lw}} a_{il}\rho_{il}(\mathbf{V}_{il}^\tau - \mathbf{V}_{il\sigma}^\tau) \cdot \mathbf{n}_l dF$$

Уравнение сохранения импульса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau}(a_l\gamma_v\langle\rho_l\rangle^l\langle\mathbf{V}_l^\tau\rangle^{le}) + \nabla \cdot (a_l^e\gamma\langle\rho_l\rangle^l\langle\mathbf{V}_l^\tau\rangle^{le}\langle\mathbf{V}_l^\tau\rangle^{le}) - \nabla \cdot (a_l^e\gamma\langle\mathbf{T}_l^\tau\rangle^{le}) \\ & + \nabla \cdot (a_l^e\gamma\langle p_l^\tau\rangle^{le}) + a_l\gamma_v\langle\rho_l\rangle^l\mathbf{g} - \frac{1}{Vol} \int_{F_{l\sigma}} [-p_l^{m\sigma,\tau}\mathbf{I} + \mathbf{T}_l^{m\sigma,\tau} - \rho\mathbf{V}_l^\tau(bfV_l^\tau - \mathbf{V}_{lw}^\tau)] \cdot \mathbf{n}_l dF \\ & - \frac{1}{Vol} \int_{F_{lw}} [-\rho_l^{w\sigma,\tau}\mathbf{I} + \mathbf{T}_l^{w\sigma,\tau} - \rho_l\mathbf{V}_l^\tau(\mathbf{V}_l^\tau - \mathbf{V}_{lw}^\tau)] \mathbf{n}_l dF = 0 \end{aligned}$$

Уравнение сохранения энергии

$$\int_V \frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} dV = - \int_F E_k dF_k + \int_V (\rho g_k u_k + \dot{q}_v) dV,$$

Общие уравнения течения многофазных сред были взяты из книги N.I. Kolev «Multiphase flow dynamics»

Уравнения, использованные в этой работе

В данной задаче использовались следующие приближения

- Жидкость имеет постоянную плотность (редуцировались усреднения плотностей)
- Рассматривается один вид частиц (остались только границы «жидкость - частицы»)
- Все частицы одного вида и плотности (а значит можно отказаться от лишних индексов в уравнениях)
- Теплообмен внутри среды отсутствует (исчезает часть слагаемых связанных с теплом)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_{\text{частиц}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\text{частиц}} U_{\text{частиц}}) = \mu \rho_{\text{частиц}}^2 U_{\text{частиц}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_{\text{жидкости}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\text{жидкости}} U_{\text{жидкости}}) = -\mu \rho_{\text{частиц}}^2 U_{\text{частиц}}$$

$$\rho_{\text{частиц}} \frac{du_{\text{частиц}}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_{\text{частиц}}}{\partial x^2} \right)$$

$$\rho_{\text{жидкости}} \frac{du_{\text{жидкости}}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_{\text{жидкости}}}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{частиц}} e_{\text{частиц}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\text{частиц}} e_{\text{частиц}} U_{\text{частиц}}) + \frac{\partial}{\partial x}(p_{\text{частиц}} U_{\text{частиц}}) = 4\pi R^2 \mu \rho_{\text{частиц}} U_{\text{частиц}}^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{жидкости}} e_{\text{жидкости}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\text{жидкости}} e_{\text{жидкости}} U_{\text{жидкости}}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(p_{\text{жидкости}} U_{\text{жидкости}}) = -4\pi R^2 \mu \rho_{\text{жидкости}} U_{\text{жидкости}}^2 \end{aligned}$$

$$\rho dV = \rho_1 dV_1 + \rho_2 dV_2$$

Как результат, исходные уравнения редуцируются до следующей системы, которая и использовалась для исследования течения сред

На базе полученной системы была построена явная расчетная схема

В расчетной области была взята равномерная расчетная сетка

$$\omega = \omega_\tau \times \omega_x = \{(x_i, t_j) : x_{i+1} = x_i + h, t_{j+1} = t_j + \tau, i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}\}$$

Сама же расчетная схема для системы уравнений выглядит следующим образом

Уравнение сохранения массы

Для жидкой фазы аппроксимация уравнения переноса выглядит следующим образом:

$$\frac{\tilde{\rho}_i^{j+1} - \tilde{\rho}_i^j}{\tau} + \frac{\tilde{\rho}_{i+1}^j \tilde{u}_{i+1}^j - \tilde{\rho}_i^j \tilde{u}_i^j}{h} = -\frac{\tilde{u}_i^j \tilde{\rho}_i^j}{h}$$

Для твердых частиц разностное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\hat{\rho}_i^{j+1} - \hat{\rho}_i^j}{\tau} + \frac{\hat{\rho}_{i+1}^j \hat{u}_{i+1}^j - \hat{\rho}_i^j \hat{u}_i^j}{h} = -\frac{\hat{u}_i^j \hat{\rho}_i^j}{h}$$

Уравнение сохранения импульса

Для жидкой фазы аппроксимация уравнения импульса выглядит следующим образом:

$$\tilde{\rho}_i^j \frac{\tilde{u}_i^{j+1} - \tilde{u}_i^j}{\tau} = -\frac{\tilde{p}_{i+1}^j - \tilde{p}_i^j}{h} + \frac{\tilde{u}_{i+1}^j - 2\tilde{u}_i^j + \tilde{u}_{i-1}^j}{h^2}$$

Для твердых частиц уравнение импульса имеет следующий вид:

$$\hat{\rho}_i^j \frac{\hat{u}_i^{j+1} - \hat{u}_i^j}{\tau} = -\frac{\hat{p}_{i+1}^j - \hat{p}_i^j}{h} + \frac{\hat{u}_{i+1}^j - 2\hat{u}_i^j + \hat{u}_{i-1}^j}{h^2}$$

Уравнение сохранения энергии

Для жидкой фазы аппроксимация уравнения энергии выглядит следующим образом:

$$\frac{\tilde{\rho}_i^{j+1} \tilde{e}_{*i}^{j+1} - \tilde{\rho}_i^j \tilde{e}_{*i}^j}{\tau} + \frac{\tilde{\rho}_{i+1}^j \tilde{u}_{i+1}^j \tilde{e}_{*i+1}^j - \tilde{\rho}_i^j \tilde{u}_i^j \tilde{e}_{*i}^j}{h} = -\frac{\tilde{p}_{i+1}^j \tilde{u}_{i+1}^j - \tilde{p}_i^j \tilde{u}_i^j}{h}$$

Для твердых частиц разностное уравнение энергии имеет следующий вид:

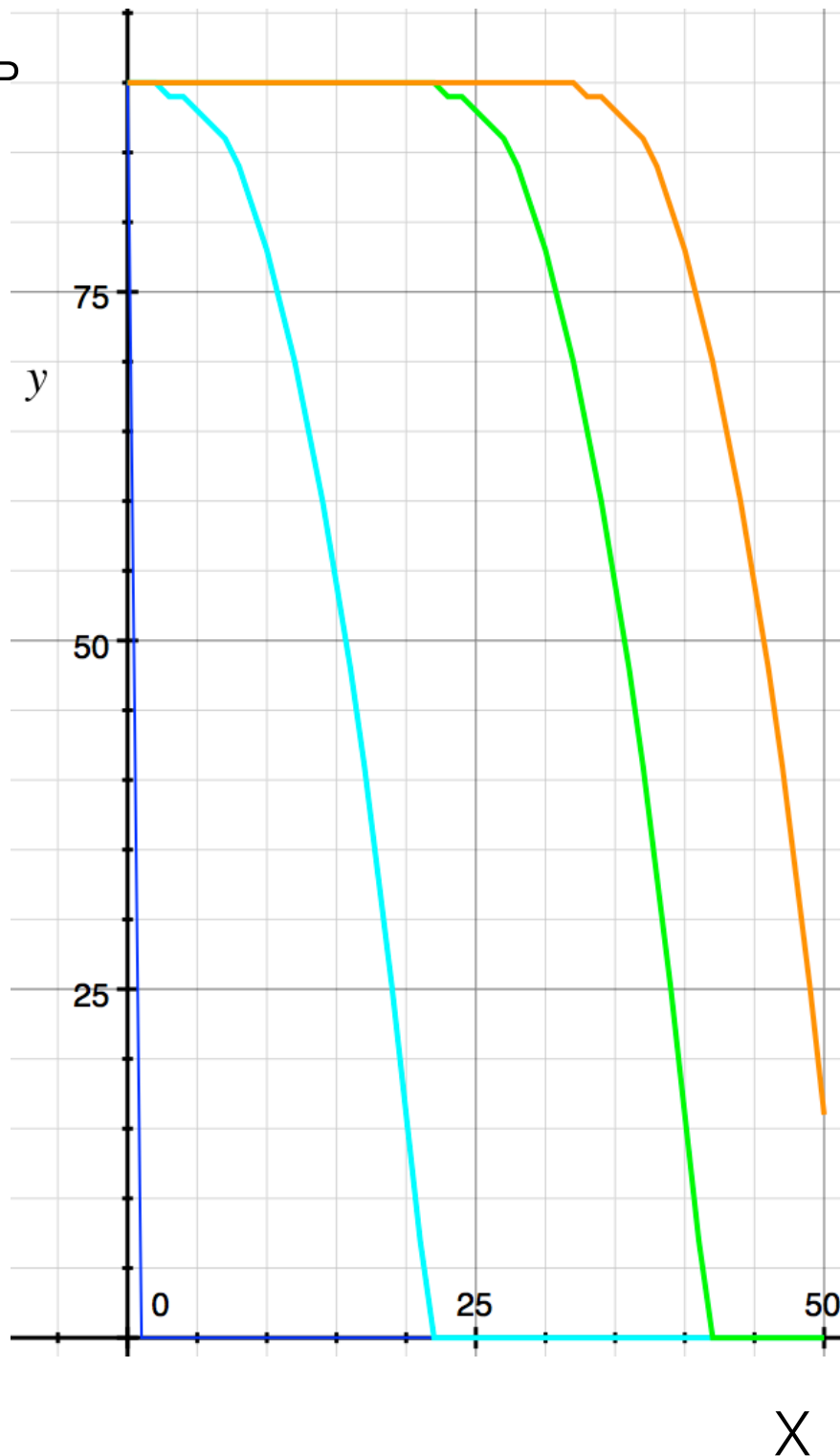
$$\frac{\hat{\rho}_i^{j+1} \hat{e}_{*i}^{j+1} - \hat{\rho}_i^j \hat{e}_{*i}^j}{\tau} + \frac{\hat{\rho}_{i+1}^j \hat{u}_{i+1}^j \hat{e}_{*i+1}^j - \hat{\rho}_i^j \hat{u}_i^j \hat{e}_{*i}^j}{h} = -\frac{\hat{p}_{i+1}^j \hat{u}_{i+1}^j - \hat{p}_i^j \hat{u}_i^j}{h}$$

Были проведены расчеты для двух случаев

В первом случае граничное условие формально можно записать в следующем виде

$$\bar{u}|_r = \bar{U}_r = \text{const}.$$

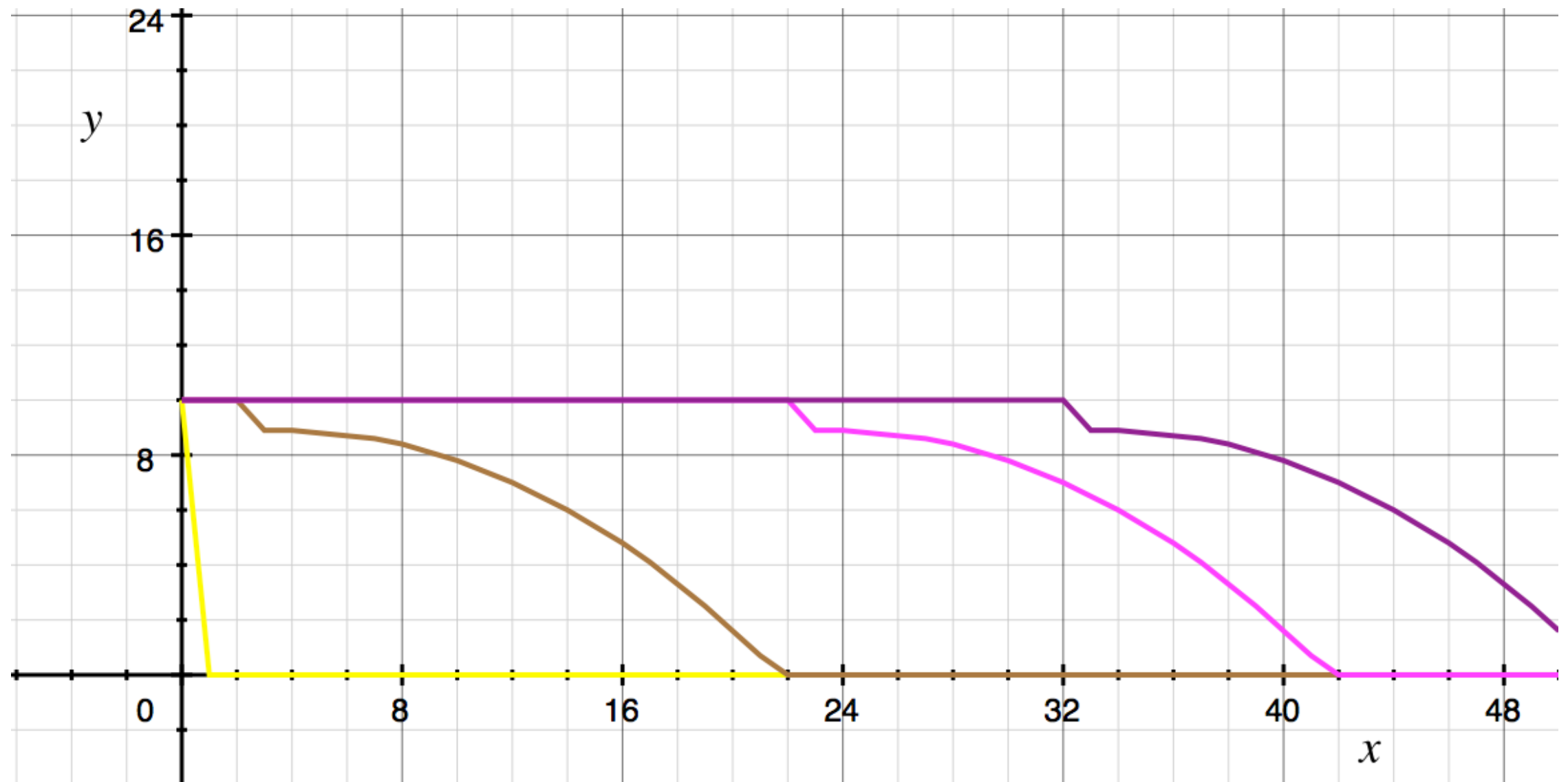
Плотность



Данный график изображает изменение относительной плотности жидкой фазы с течением времени

Данный график изображает
изменение относительной
плотности твердой фазы с
течением времени

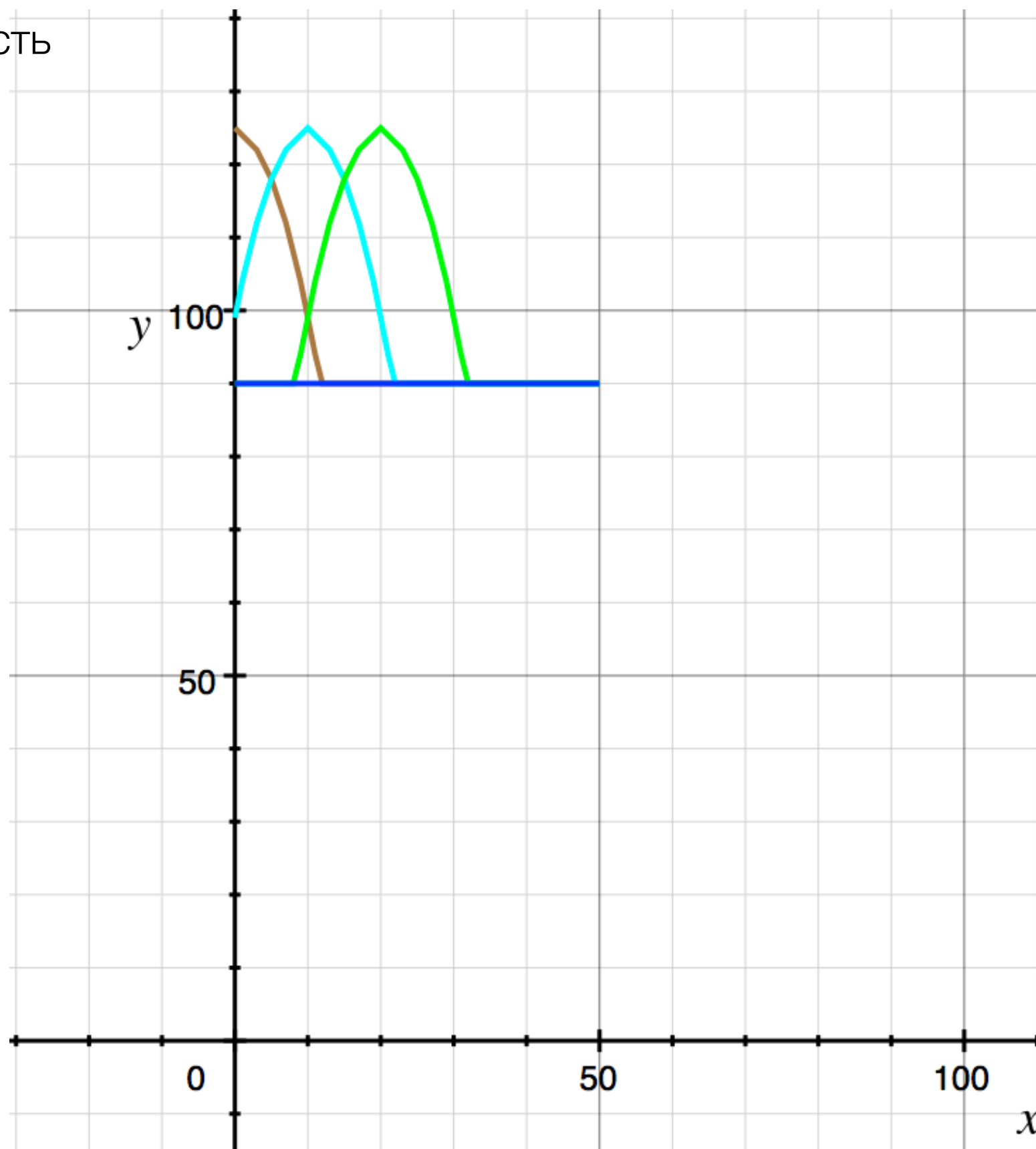
Плотность



x

Во втором случае с одной из сторон подавался импульс конечной продолжительности t

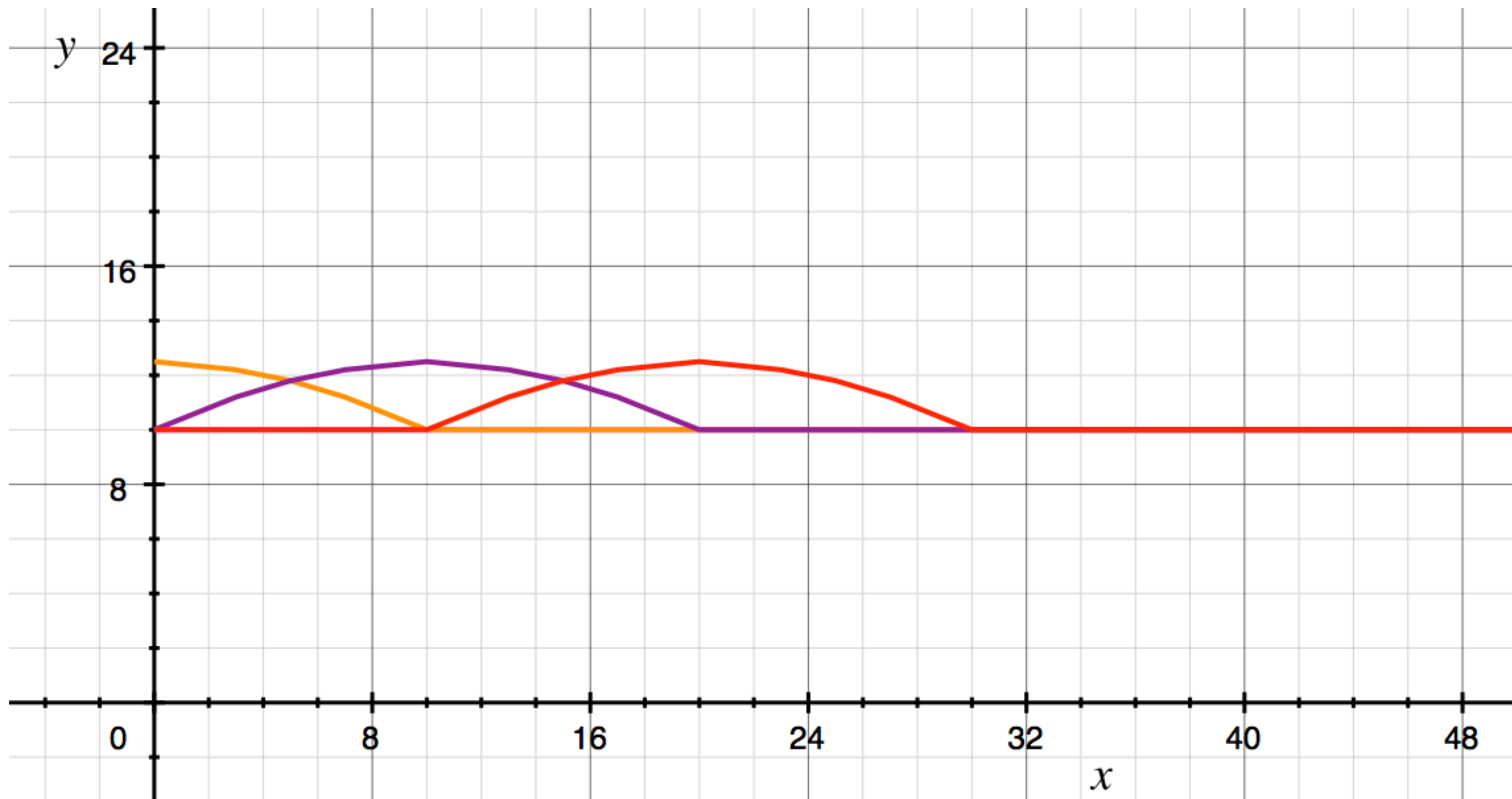
Плотность



Данный график изображает изменение относительной плотности жидкой фазы с течением времени

Данный график изображает
изменение относительной
плотности твердой фазы с
течением времени

Плотность



x

Заключение

В данной работе было рассмотрено течение двухфазной среды - «жидкость-твердые частицы» . Для этого общие уравнения были редуцированы, для них была построена расчетная схема, реализованная в виде программы.

Для проверки работоспособности алгоритма был проведен ряд тестовых расчетов.

Спасибо за
внимание!