

Московский государственный университет им М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Явный метод частиц для двумерной задачи диффузии

выполнила: Горелова М.А.

научный руководитель: Богомолов С.В.

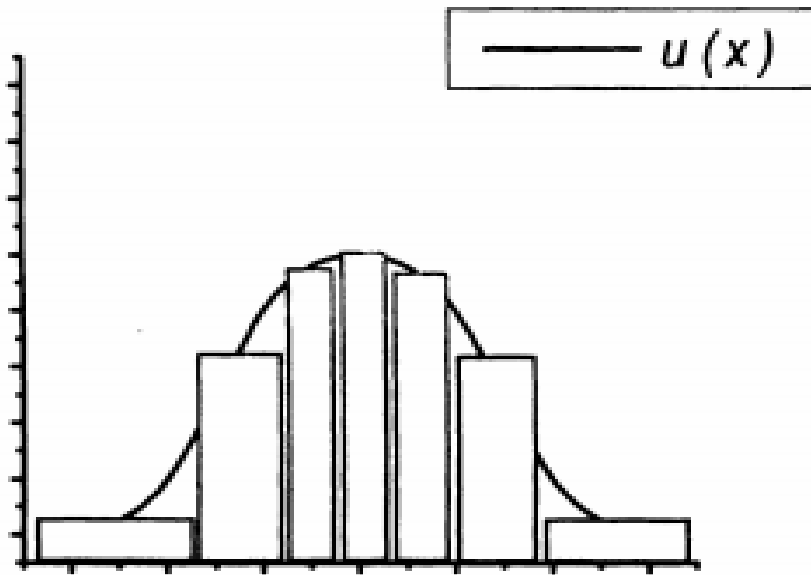
Цель работы

Продемонстрировать явный метод решения задачи диффузии, который:

- 1) Сохраняет приемлемую точность при свободном варьировании шага по времени
- 2) Имеет хорошую погрешность с точным решением
- 3) Масштабируем на двумерный случай

Описание метода

Метод частиц представляет собой слабую аппроксимацию исходной функции, то есть замену её конечной суммой дельта – функций Дирака:



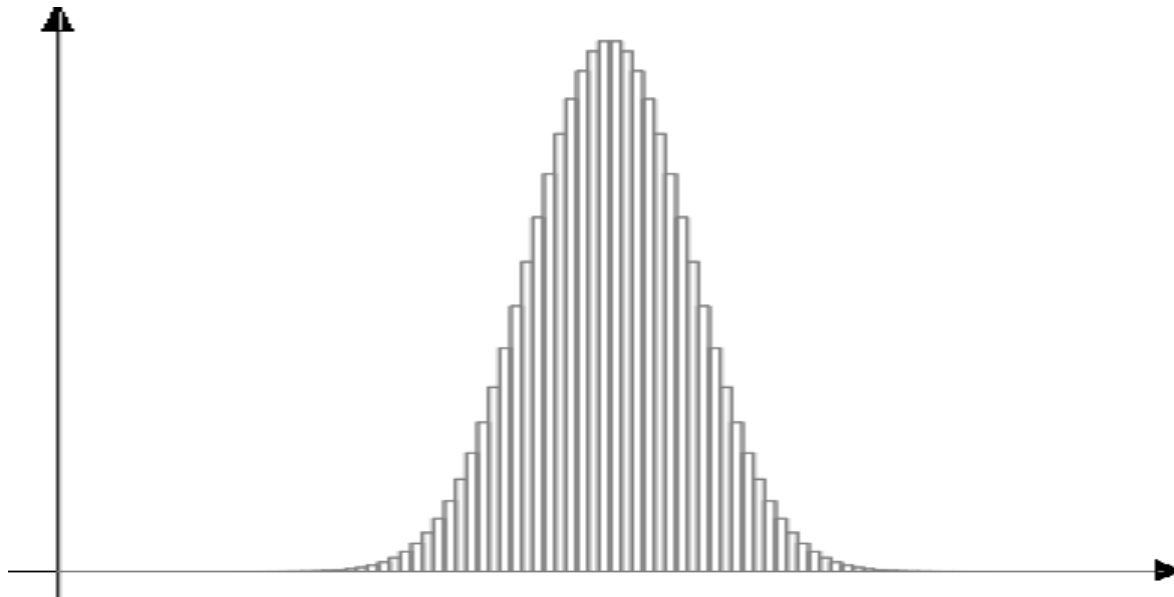
$$u(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$$

$$\delta(x - x_i) \approx \Pi_i(x - x_i)$$

Постановка задачи : одномерный случай

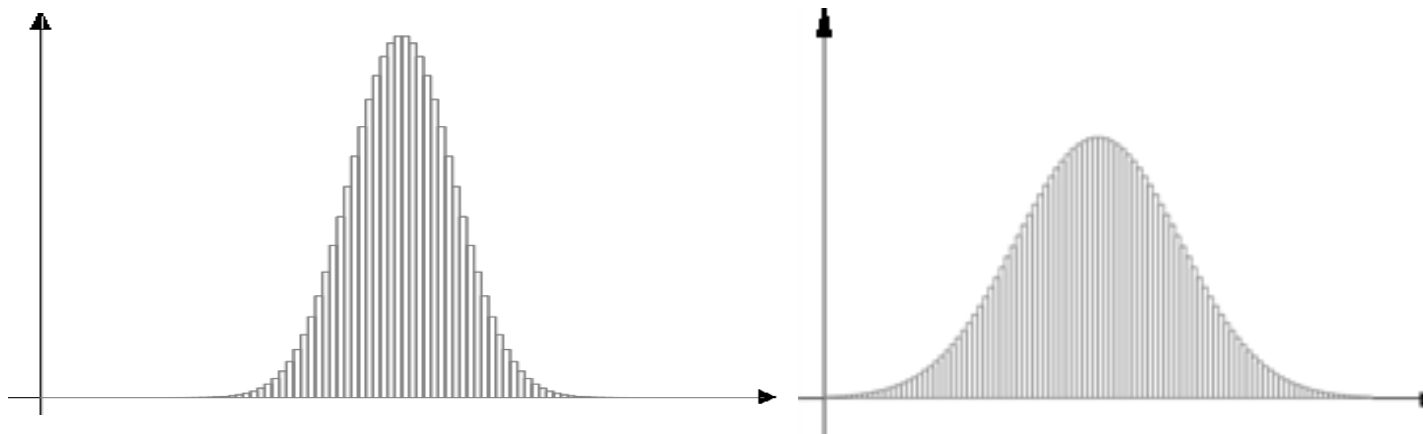
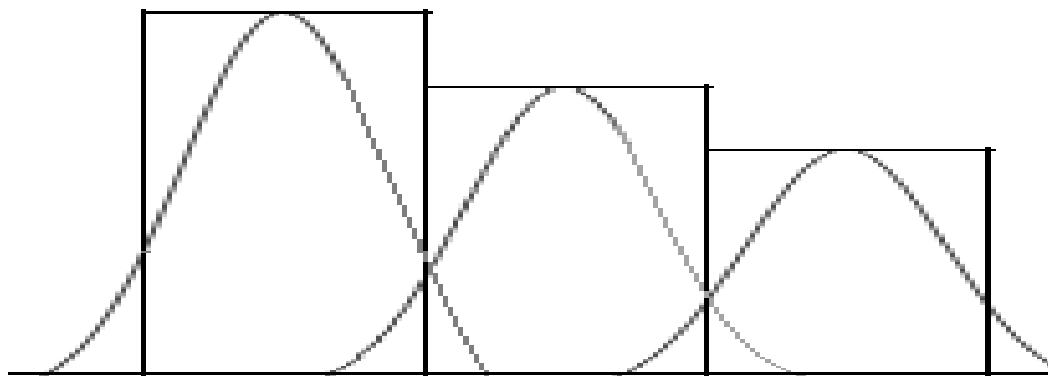
Будем рассматривать следующую задачу Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 20e^{-\frac{(100x-50)^2}{100}} \end{array} \right.$$



Алгоритм

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x_i, 0) e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-t_0)a^2}} dy$$



Результаты вычислений

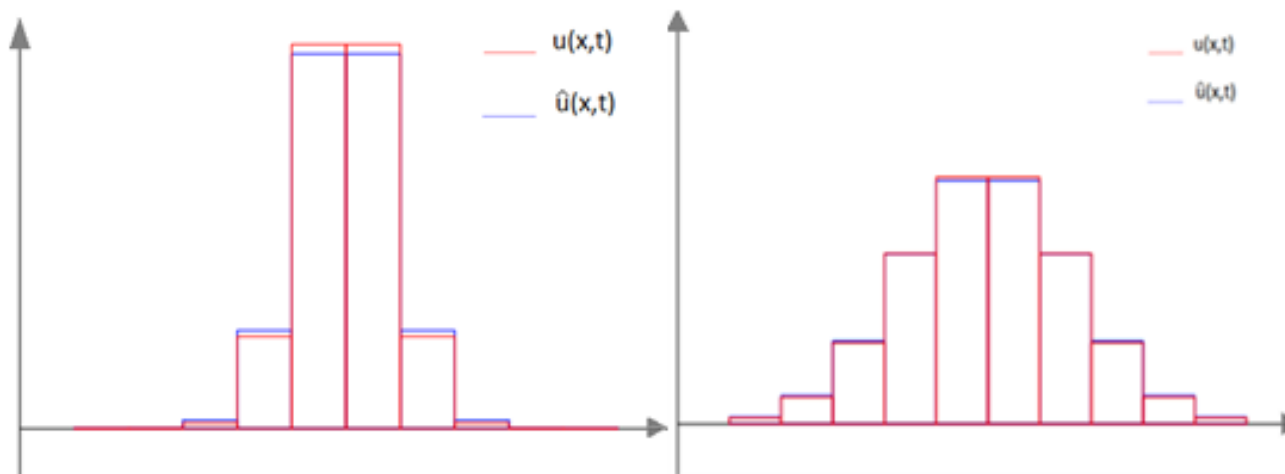


Рис.5.1, $\tau = 0.1$

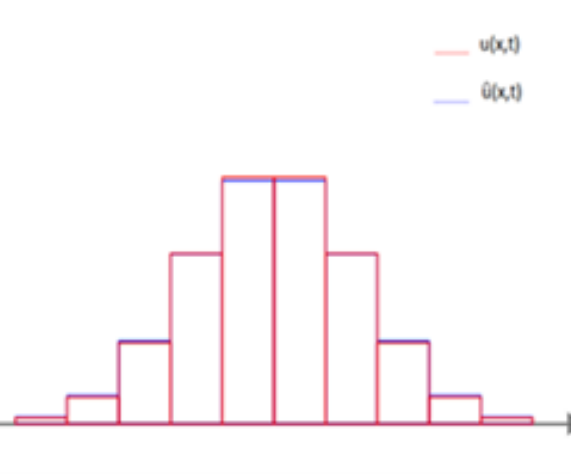


Рис. 5.2, $\tau = 0.1$

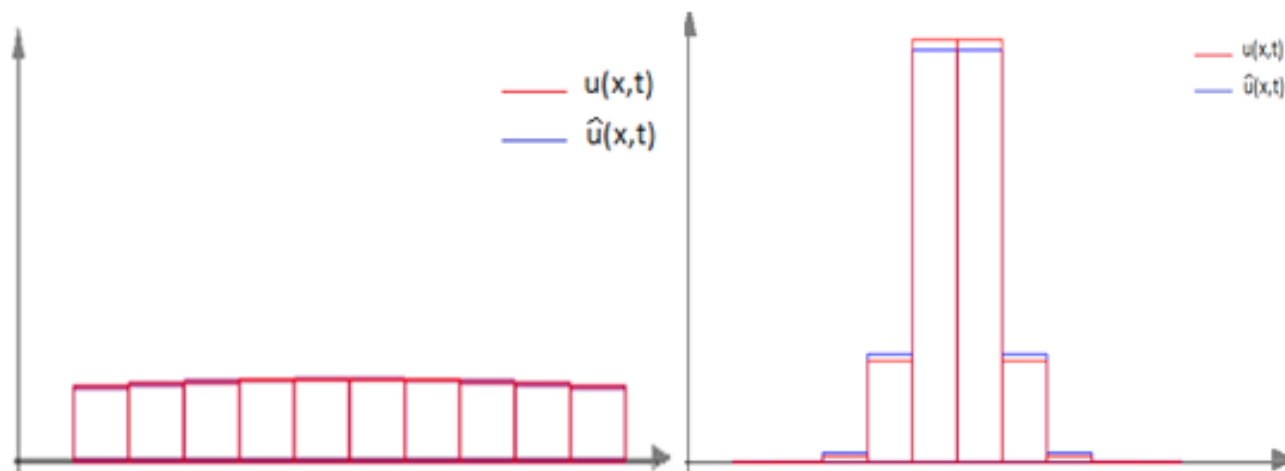


Рис.6.1, $\tau = 0.5$

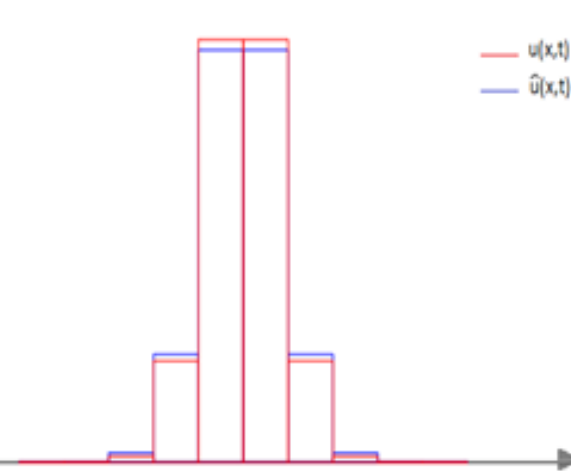


Рис.6.2, $\tau = 0.001$

Результаты вычислений

| Значение τ | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 0.2$ | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 1.0$ |
|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0.1 | 0.0025 | 0.00031 |
| 0.5 | - | 0.00031 |
| 0.001 | 0.0025 | 0.00031 |

Таблица 1. Сравнение с точным решением при разных шагах по времени

Сравнение с явной схемой

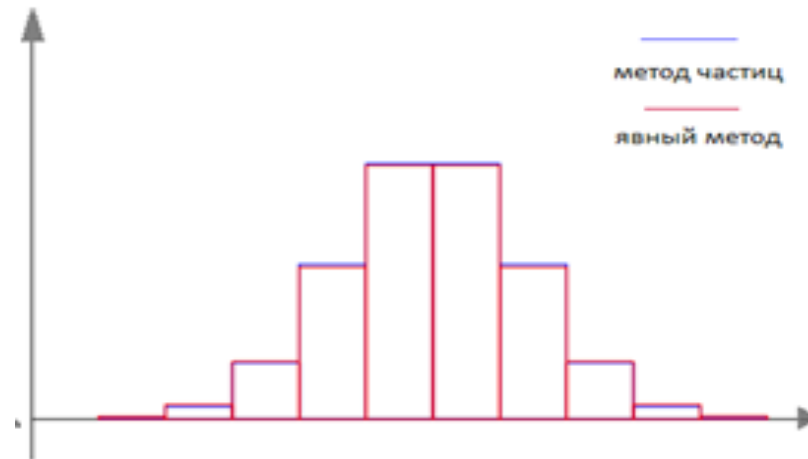


Рис.8 $u(x,t)$

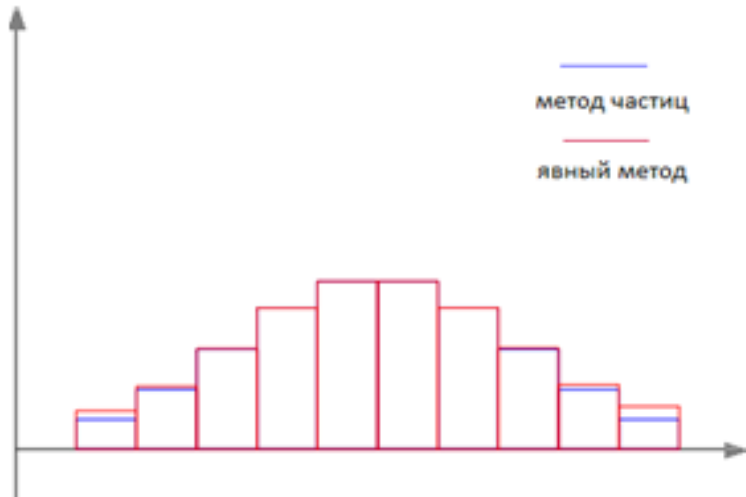


Рис. 9 $u(x,t)$

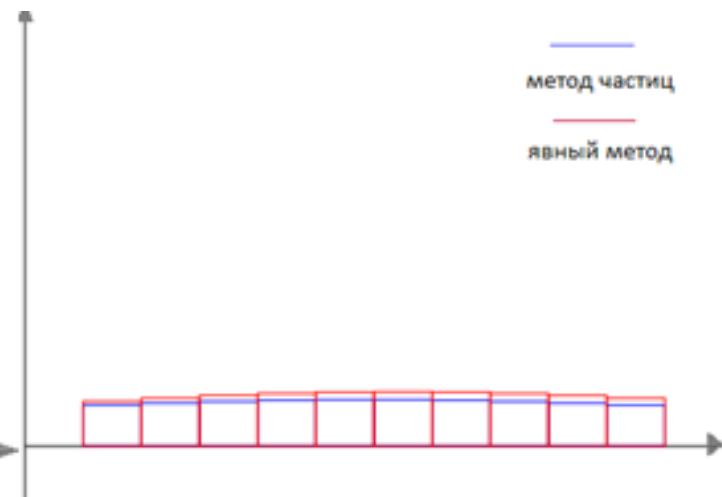


Рис.10 $u(x,t)$

Трудоёмкость

| Значение ε | Трудоёмкость | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 0.2$ | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 1.0$ |
|------------------------|--------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 10^{-4} | 6N | 0.0025 | 0.00031 |
| 10^{-3} | 6N | 0.0025 | 0.0012 |
| 10^{-2} | 4N | 0.007 | 0.0024 |

Таблица 2 . Исследование Трудоёмкости

Трудоёмкость

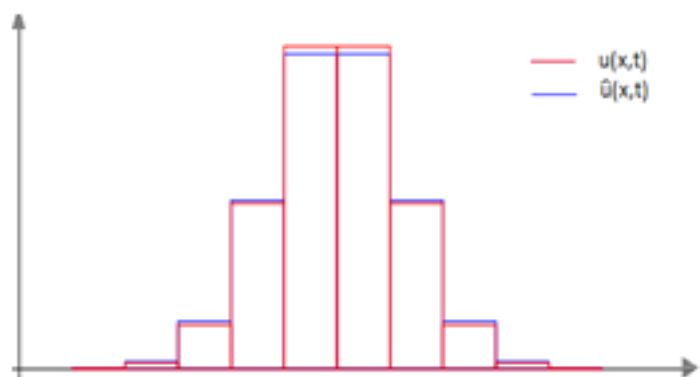


Рис 14.1, $N = 7$

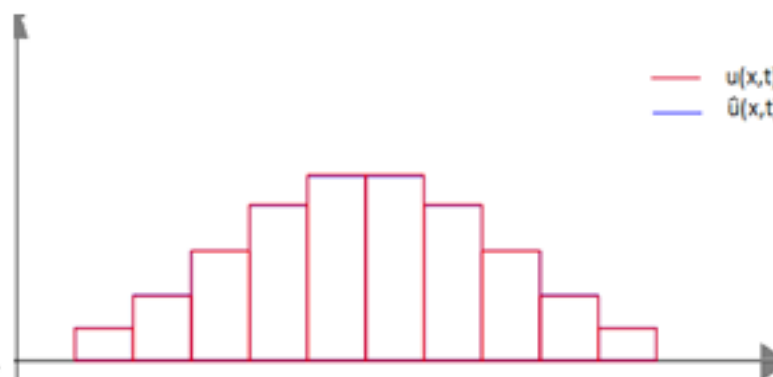


Рис 14.2, $N = 7$

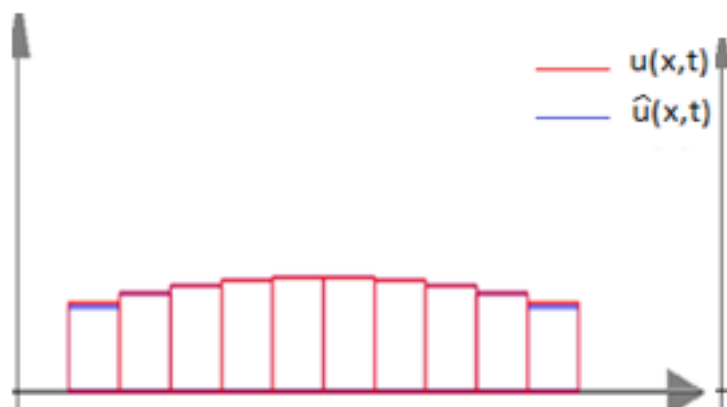


Рис 15.1 $N = 5$

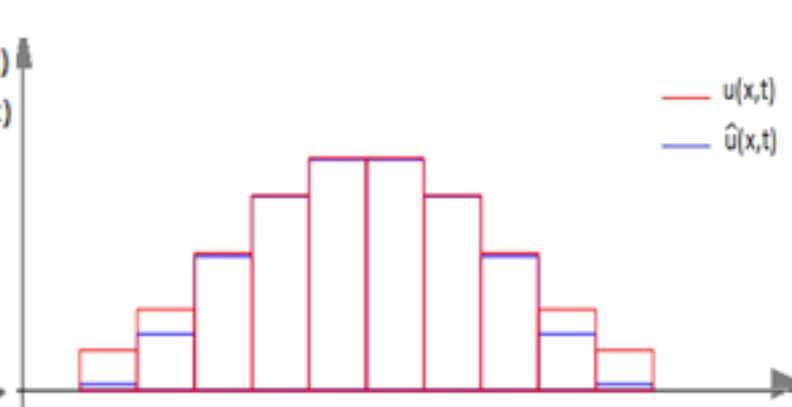


Рис 15.2 $N = 3$

| Число соседей-частиц N | Трудоёмкость | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 0.2$ | $\ r\ _{\infty}$ при $t = 1.0$ |
|-----------------------------|--------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 7 | $6N$ | 0.0025 | 0.00031 |
| 5 | $5N$ | 0.08 | 0.05 |
| 3 | $4N$ | 0,97 | 0.89 |

Таблица 3. Уменьшение число соседей – ячеек и погрешность решения

Постановка задачи : двумерный случай

Будем рассматривать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & -\infty < x < +\infty, & -\infty < y < +\infty, & t > 0 \\ u(x, y, 0) = e^{-\frac{(10x-5)^2 - 0.36(10x-5)(10y-5) + (10y-5)^2}{1.28}} \end{cases}$$

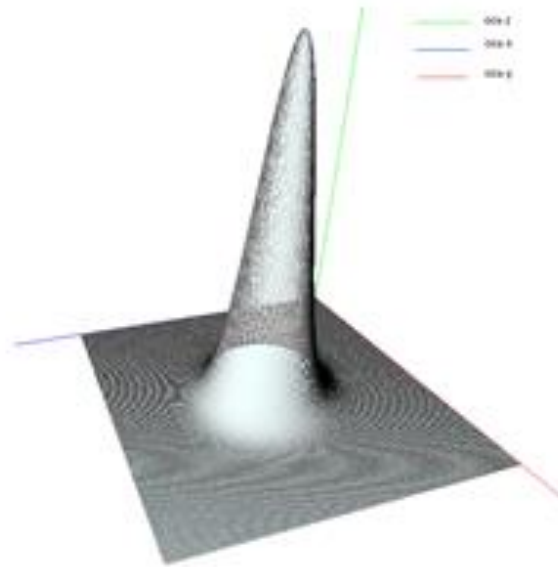
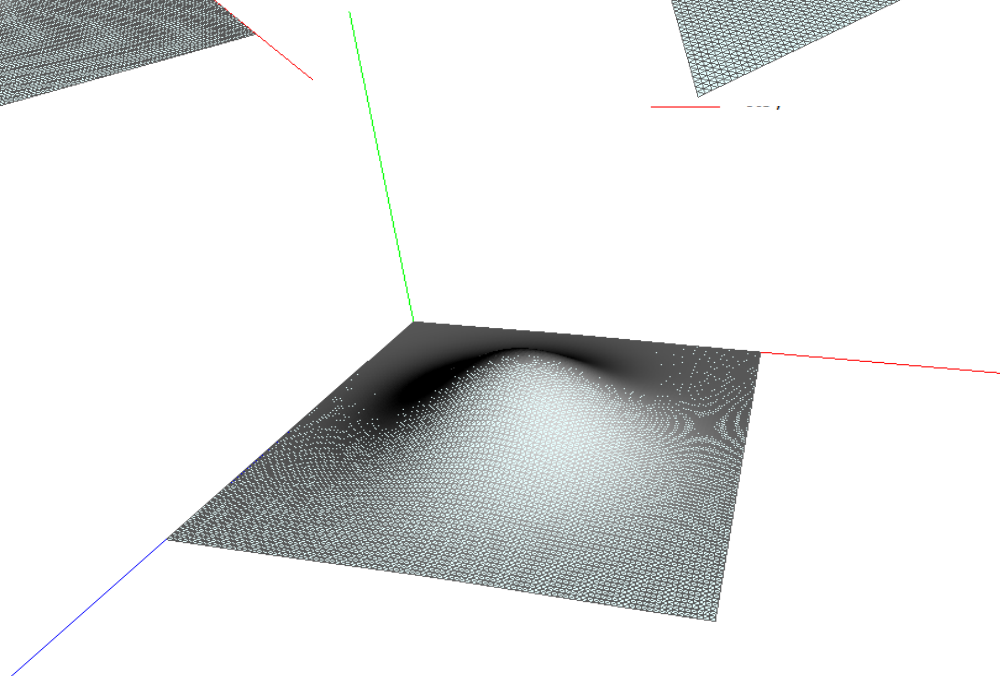
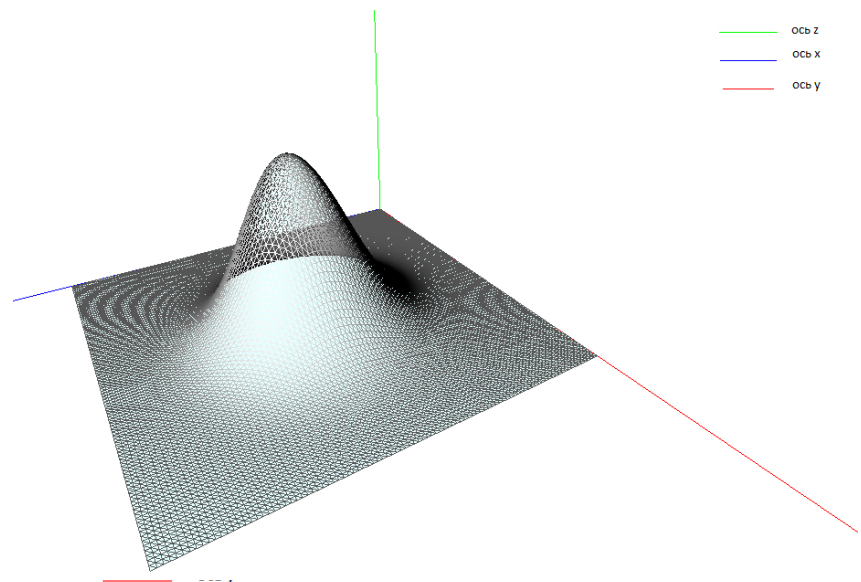
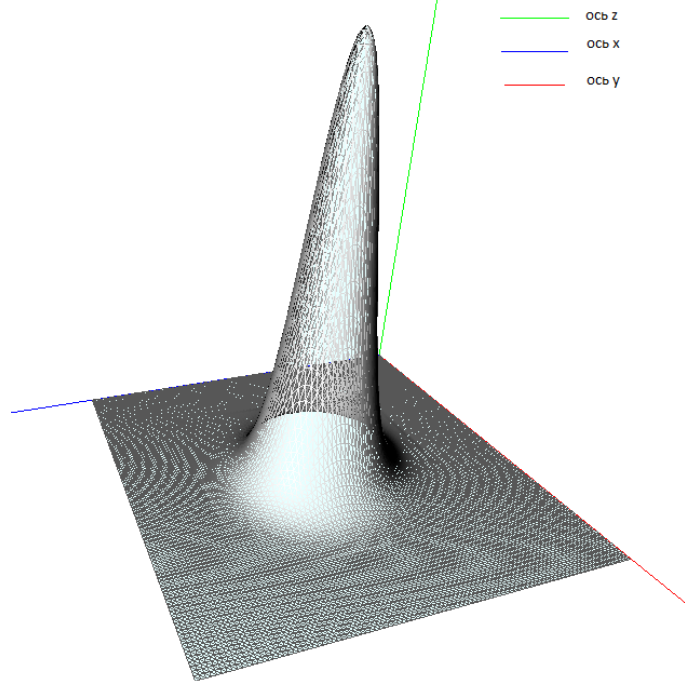


Рис. 16 График $u(x, y, 0)$ при $t = 0$ в двумерном случае

Алгоритм

- $$u_i(x, y, t) = \frac{1}{4a^2\pi(t-t_0)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y_i, 0) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)a^2}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(t-t_0)a^2}} d\xi d\eta$$
- Уменьшение трудоёмкости
- Суммирование
- Перестройка

Результаты вычислений



Заключение

Итак, в ходе моей работы был описан и применен к уравнению диффузии явный абсолютно устойчивый метод частиц. На модельной задаче в одномерном случае была продемонстрирована хорошая точность метода, исследована его наилучшая трудоёмкость. В отличие от явной схемы, метод частиц безусловно устойчив и сохраняет хорошую точность решения при любом шаге по времени, в том числе и при $\tau \sim h$. В двумерном случае проиллюстрирована масштабируемость метода и на основании результатов одномерного случая улучшена трудоёмкость.

Спасибо
за внимание!