



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных методов

Горбачев Даниил Юрьевич

Математическое моделирование многocomпонентных течений по схеме Кабаре

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

В. М. Головизнин

Москва, 2016

Цель.

Математическое моделирование с помощью схемы КАБАРЕ неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, возникающей, например, при прохождении ударной волны через газовые неоднородности в двухкомпонентной смеси газов. Газовые компоненты смеси - идеальные газы с различными показателями адиабаты и удельной теплоемкости, нет проскальзывания между компонентами смеси, нет внешних сил, диффузии, вязкости, смесь находится в термодинамическом равновесии и течение смеси газов дозвуковое.

Постановка задачи.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v}{\partial y} = 0, \quad s = \overline{1, N} \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial P_{uv}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial P_{uv}}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + P)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u (\rho E + P)}{\partial x} + \frac{\partial v (\rho E + P)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$



ρ_s - плотность s -ой компоненты. ρ - плотность газовой смеси.
 u - скорость смеси вдоль оси x . v - скорость смеси вдоль оси y .
 P - давление смеси. E - полная энергия смеси.

Одномерный случай. Первая и третья фаза.

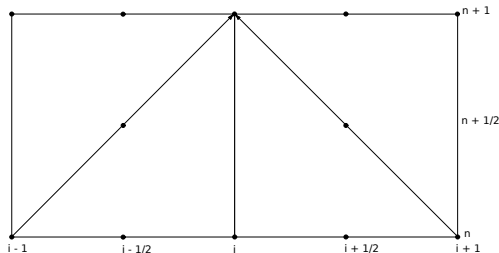
Первая фаза:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\rho_s)_c^{n+1/2} - (\rho_s)_c^n}{\tau/2} + \frac{(\rho_s u)_R^n - (\rho_s u)_L^n}{h_x} = 0, \quad s = \overline{1, N} \\ \frac{(\rho u)_c^{n+1/2} - (\rho u)_c^n}{\tau/2} + \frac{(\rho u^2 + P)_R^n - (\rho u^2 + P)_L^n}{h_x} = 0 \\ \frac{(\rho E)_c^{n+1/2} - (\rho E)_c^n}{\tau/2} + \frac{(u(\rho E + P))_R^n - (u(\rho E + P))_L^n}{h_x} = 0 \end{array} \right.$$

Третья фаза:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\rho_s)_c^{n+1} - (\rho_s)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho_s u)_R^{n+1} - (\rho_s u)_L^{n+1}}{h_x} = 0, \quad s = \overline{1, N} \\ \frac{(\rho u)_c^{n+1} - (\rho u)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho u^2 + P)_R^{n+1} - (\rho u^2 + P)_L^{n+1}}{h_x} = 0 \\ \frac{(\rho E)_c^{n+1} - (\rho E)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(u(\rho E + P))_R^{n+1} - (u(\rho E + P))_L^{n+1}}{h_x} = 0 \end{array} \right.$$

Одномерный случай. Вторая фаза схемы КАБАРЕ.



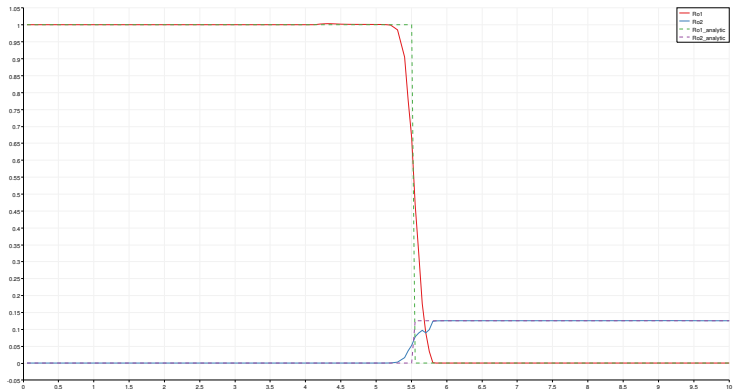
Вторая фаза:

$$I_i^{n+1} = \begin{cases} 2I_{i-1/2}^{n+1/2} - I_{i-1}^n, & \lambda_{i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{i+1/2}^{n+1/2} > 0 \\ 2I_{i+1/2}^{n+1/2} - I_{i+1}^n, & \lambda_{i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0 \end{cases}$$

$$I_i^{n+1} = \begin{cases} \max\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\}, & I_i^{n+1} \geq \max\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\} \\ \min\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\}, & I_i^{n+1} \leq \min\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\} \\ I_i^{n+1}, & \min\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\} \leq I_i^{n+1} \leq \max\{I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^n, I_i^n\} \end{cases}$$

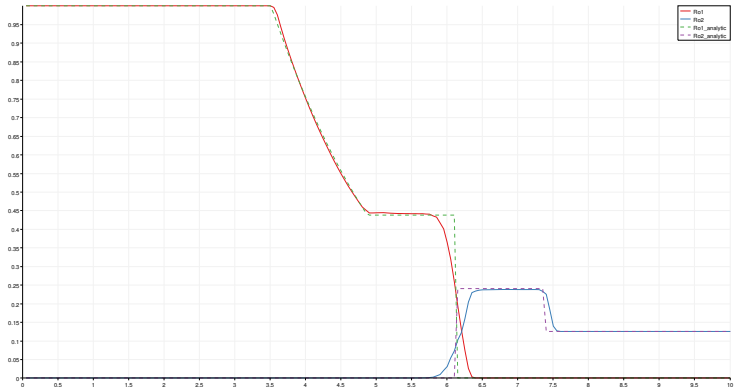
Одномерный случай. Перенос контактного разрыва. Профиль плотности.

$\rho = 1$	$\rho = 0.125$
$P = 1$	$P = 1$
$u = 0.5$	$u = 0.5$
$\gamma = 1.4$	$\gamma = 1.667$
$C = 0.72$	$C = 3.12$



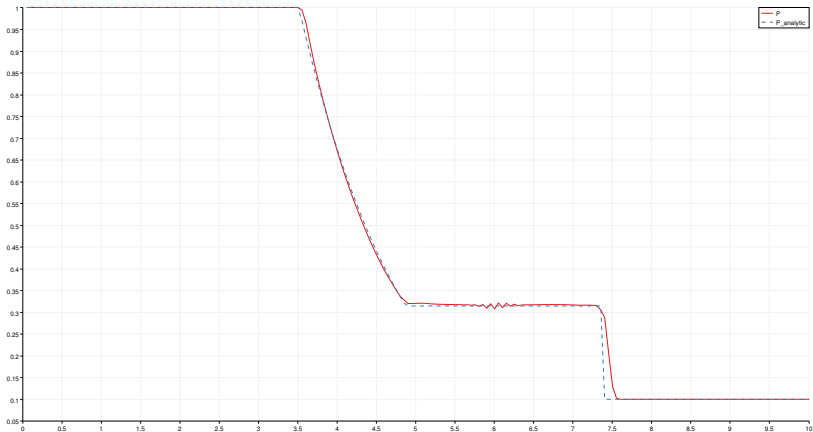
Одномерный случай. Задача Сода. Профиль плотности. Изоэнтропическая форма инвариантов.

$\rho = 1$	$\rho = 0.125$
$P = 1$	$P = 0.1$
$u = 0$	$u = 0$
$\gamma = 1.4$	$\gamma = 1.667$
$C = 0.72$	$C = 3.12$

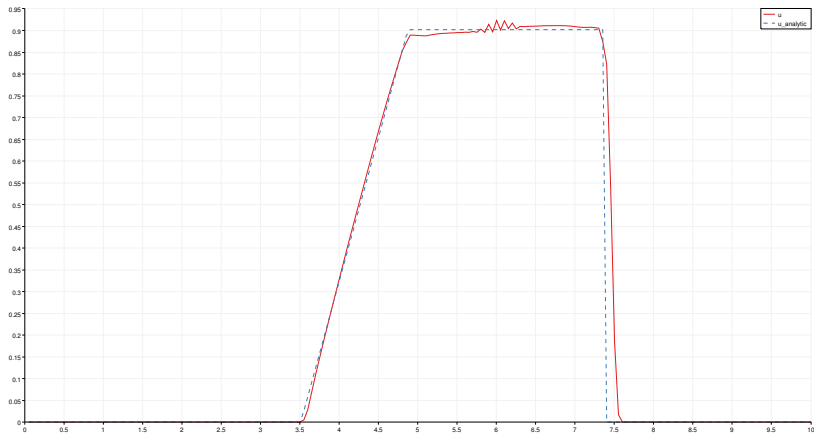


Одномерный случай. Задача Сода. Профиль давления.

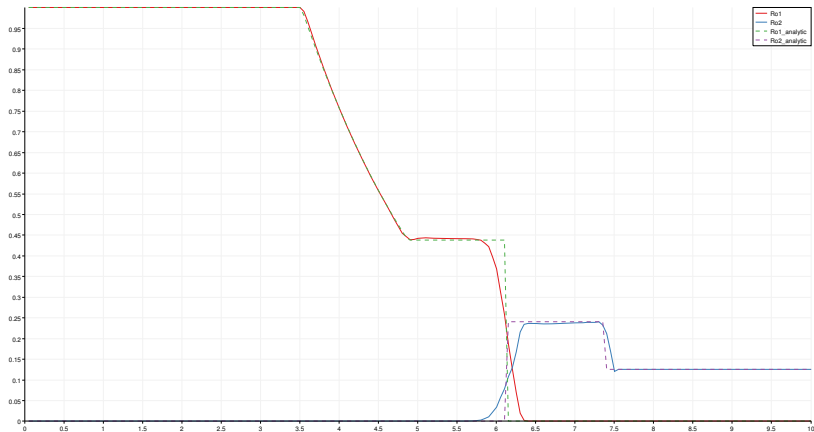
Изоэнтروпическая форма инвариантов.



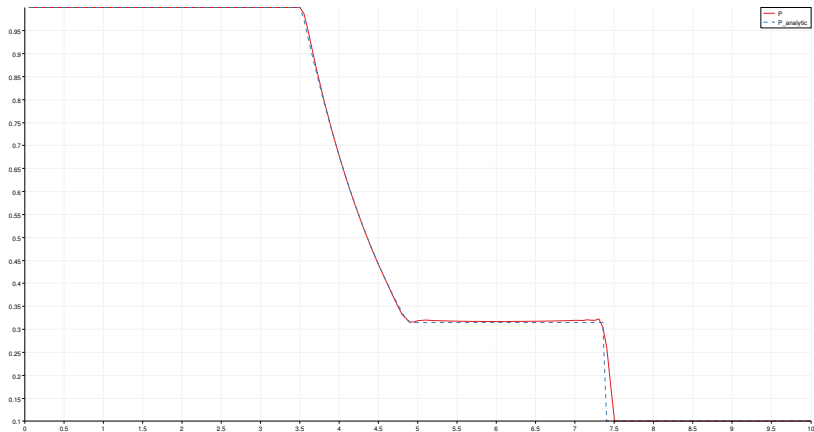
Одномерный случай. Задача Сода. Профиль скорости. Изоэнтропическая форма инвариантов.



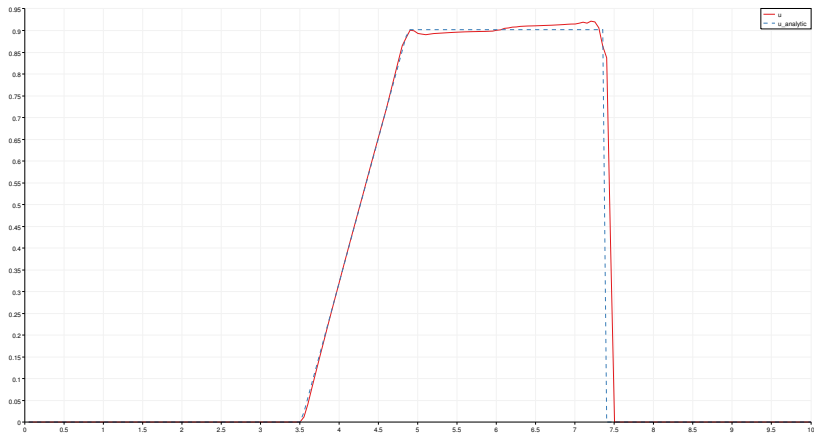
Одномерный случай. Задача Сода. Профиль плотности. Линейная форма инвариантов.



Одномерный случай. Задача Сода. Профиль давления. Линейная форма инвариантов.



Одномерный случай. Задача Сода. Профиль скорости. Линейная форма инвариантов.



Двумерный случай. Вторая фаза схемы КАБАРЕ.

Нелинейная коррекция в двумерном случае выглядит следующим образом:

$$I_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \max(I), & I_{i,j+1/2}^{n+1} \geq \max(I) \\ \min(I), & I_{i,j+1/2}^{n+1} \leq \min(I) \\ I_{i,j+1/2}^{n+1}, & \min(I) \leq I_{i,j+1/2}^{n+1} \leq \max(I) \end{cases}$$

Здесь

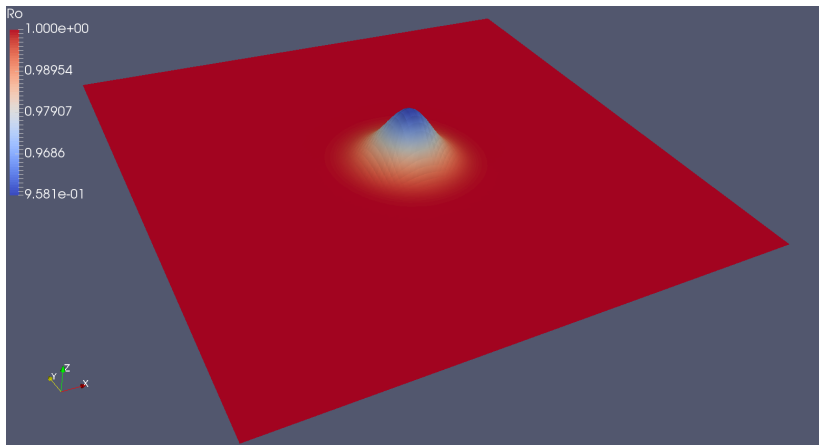
$$\max(I) = \max\{I_{i-1,j+1/2}^n, I_{i-1/2,j+1/2}^n, I_{i,j+1/2}^n\} + \tau * Q,$$

$$\min(I) = \min\{I_{i-1,j+1/2}^n, I_{i-1/2,j+1/2}^n, I_{i,j+1/2}^n\} + \tau * Q,$$

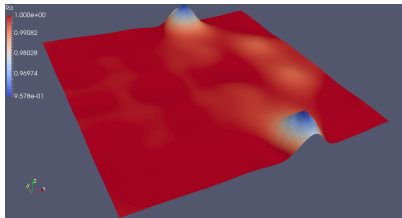
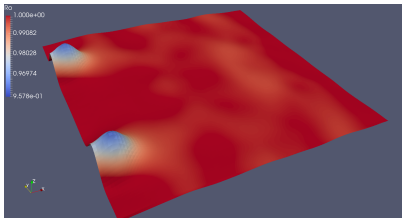
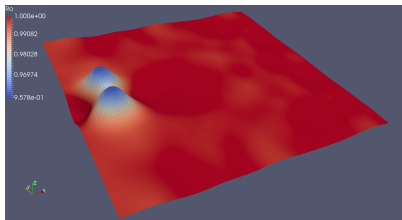
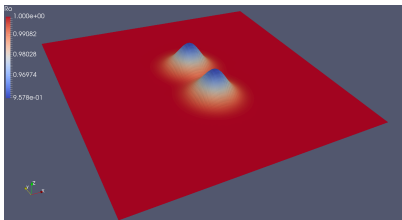
где Q :

$$Q = \frac{I_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - I_{i-1/2,j+1/2}^n}{\tau/2} + \lambda_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \frac{I_{i,j+1/2}^n - I_{i-1,j+1/2}^n}{h_x}$$

Двумерный случай. Изоэнтропический вихрь. Профиль плотности.

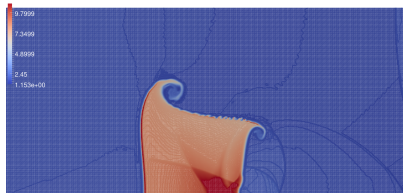
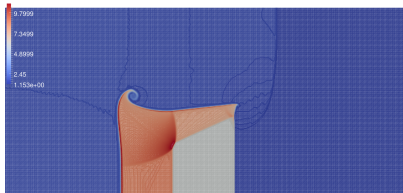
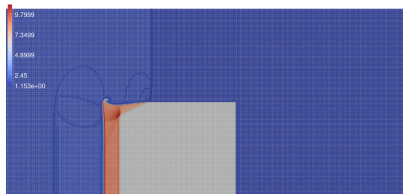
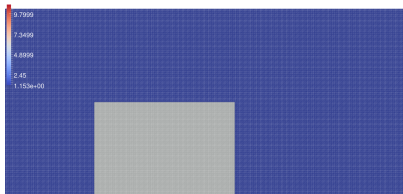


Двумерный случай. Вихревой диполь. Профиль плотности.

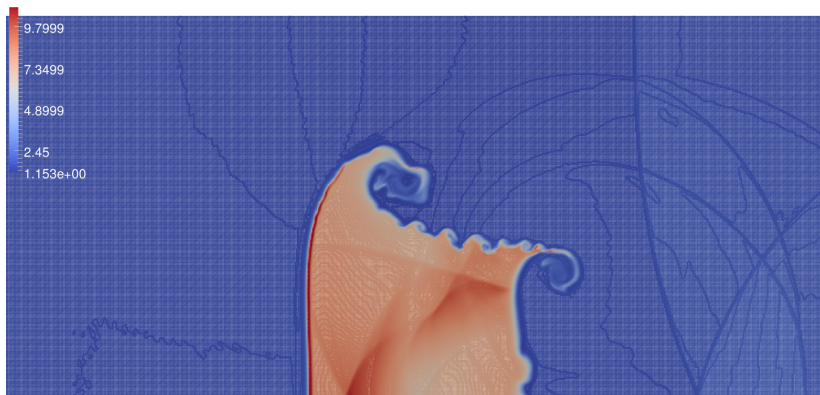


Двумерный случай. Прохождение ударной волны через прямоугольную неоднородность.

$N_x = 720, N_y = 320, \gamma_1 = 1.4$ (воздух), $\gamma_2 = 1.076$ (фторид серы).

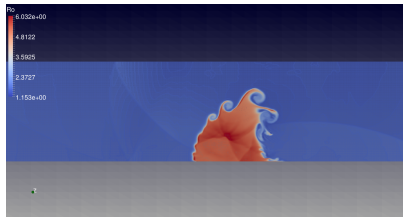
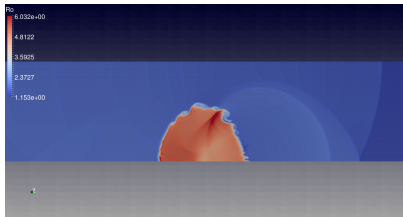
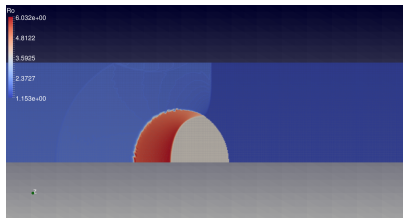
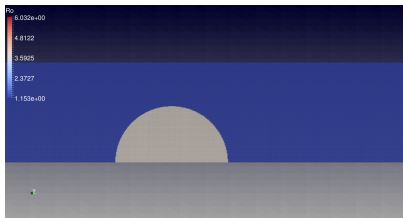


Двумерный случай. Прохождение ударной волны через прямоугольную неоднородность.

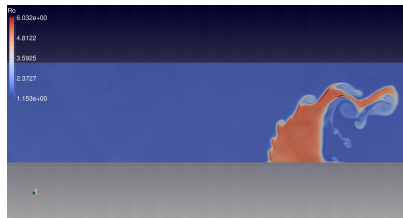
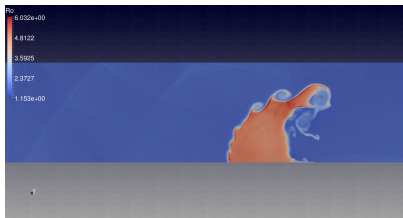


Двумерный случай. Прохождение ударной волны через сферическую неоднородность.

$N_x = 1450, N_y = 215, \gamma_1 = 1.4$ (воздух), $\gamma_2 = 1.249$ (дифторхлорметан).



Двумерный случай. Прохождение ударной волны через сферическую неоднородность.



Заключение

Была написана, отлажена и протестирована на верификационных тестах программа, реализующая схему КАБАРЕ для расчета течения многокомпонентной смеси газов. Проведено численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова при прохождении ударной волны через газовые неоднородности разной формы.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!