



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Бутаков Олег Борисович

**Исследование явных методов численного решения системы уравнений
Навье-Стокса**
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
С.И. Мухин

Москва, 2018

Цель работы

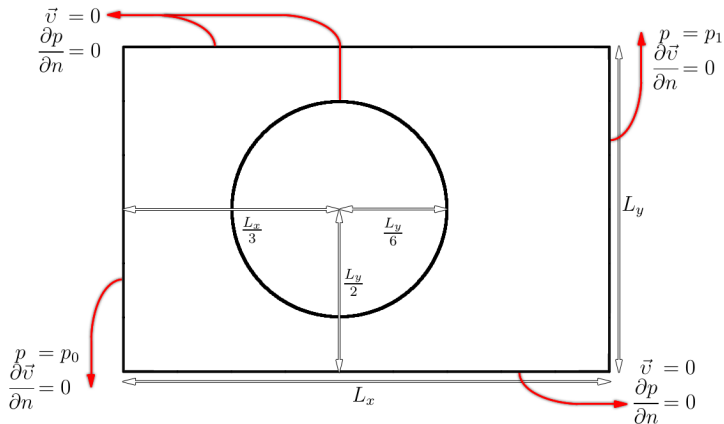
Система уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + \vec{g}, \\ (\nabla, \vec{v}) = 0. \end{cases}$$

Целью работы является построение, реализация и модификация известных явных методов решения этой системы уравнений, а также их сравнение на примере задачи обтекания и установление влияния различных аппроксимаций операторов на качественное поведение решения.

Постановка модельной задачи

Рис.: Область решения задачи.



Явная техника расщепления операторов

Техника расщепления на основе аппроксимации уравнения движения в явном виде:

$$\vec{v}^{l+1} = \vec{v}^l - \tau(\vec{v}^l, \nabla)\vec{v}^l - \tau\nabla p^{l+1} + \frac{\tau}{Re} \Delta \vec{v}^l.$$

Алгоритм явной техники.

1. Вычисляем промежуточное поле скоростей:

$$\vec{v}^* = \vec{v}^l - \tau(\vec{v}^l, \nabla)\vec{v}^l - \tau\beta\nabla p^l + \frac{\tau}{Re} \Delta \vec{v}^l;$$

2. Решаем уравнение Пуассона:

$$\Delta \phi = \frac{1}{\tau}(\nabla, \vec{v}^*);$$

3. Находим значения скорости и давления на следующем шаге по времени:

$$\begin{aligned}\vec{v}^{l+1} &= \vec{v}^* - \frac{\tau}{\rho} \nabla \phi, \\ p^{l+1} &= \phi + \beta p^l.\end{aligned}$$

«Почти» явная техника

Техника расщепления на основе аппроксимации уравнения движения в неявном виде:

$$\vec{v}^{l+1} = \vec{v}^l - \tau(\vec{v}^{l+1}, \nabla)\vec{v}^{l+1} - \tau\nabla p^{l+1} + \frac{\tau}{Re} \Delta \vec{v}^{l+1}.$$

Для вычисления скорости и давление на следующем временном построим итерационный процесс, каждую итерацию которого будет осуществлять по явной схеме:

$$\begin{cases} \vec{v}^{(s+1)} = \vec{v}^l - \tau(\vec{v}^{(s)}, \nabla)\vec{v}^{(s)} - \tau\nabla p^{(s+1)} + \frac{\tau}{Re} \Delta \vec{v}^{(s)}, \\ (\nabla, \vec{v}^{(s+1)}) = 0, \\ \vec{v}^{(0)} = \vec{v}^l, p^{(0)} = p^l. \end{cases}$$

Естественным условием остановки итерационного процесса будет следующее выражение:

$$\max\{\|p^{(s)} - p^{(s+1)}\|_C, \|\vec{v}^{(s)} - \vec{v}^{(s+1)}\|_C\} < \varepsilon.$$

«Почти» явная техника, ускорение сходимости

Построенный итерационный процесс можно интерпретировать как решение нелинейного уравнения $u = f(u)$ методом простой итерации:

$$u^{(s+1)} = f(u^{(s)}), u^{(s)} = (\vec{v}^{(s)}, p^{(s)}), f \text{ определяется алгоритмом.}$$

Применим метод секущих:

$$u^{(s+1)} = u^{(s)} - \frac{\delta u^{(s+1)}(u^{(s)} - u^{(s-1)})}{\delta u^{(s+1)} - \delta u^{(s)}},$$

$$u^{(1)} = f(u^{(0)}),$$

$$\text{где } \delta u^{(s+1)} = f(u^{(s)}) - u^{(s)}.$$

Практически, применение метода секущих дает уменьшение общего количества итераций в два раза.

Техники высших порядков по времени

Выпишем один из методов Рунге-Кутты второго порядка для системы ОДУ $\dot{u} = g(u)$:

$$u^{(1)} = f(\tau, u), u^{(2)} = f(\tau, u^{(1)}), \\ \hat{u} = \frac{u + u^{(2)}}{2}.$$

Здесь $f(\tau, u) = u + \tau g(u)$ – выражение, которое вычисляет искомую функцию с первым порядком.

Пусть теперь $u = (\vec{v}, p)$, f определяется алгоритмом выбранной техники расщепления.

Совершим два последовательных шага по времени, в качестве неизвестной функции на новом слое берется средняя величина текущего и последнего рассчитанного слоя.

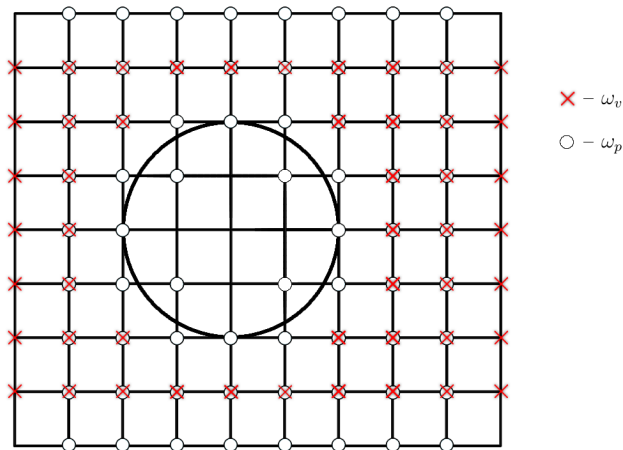
Аппроксимация методом конечных разностей. Расчетная сетка

Пусть ω_f – множество узлов, в которых значение поля f определяется решением уравнений, то есть узлов, лежащих внутри области, и на границах, которым предписаны краевые условия Неймана.

Пусть γ_f – множество узлов, в которых задано краевое условие первого рода.

Аппроксимация методом конечных разностей. Расчетная сетка

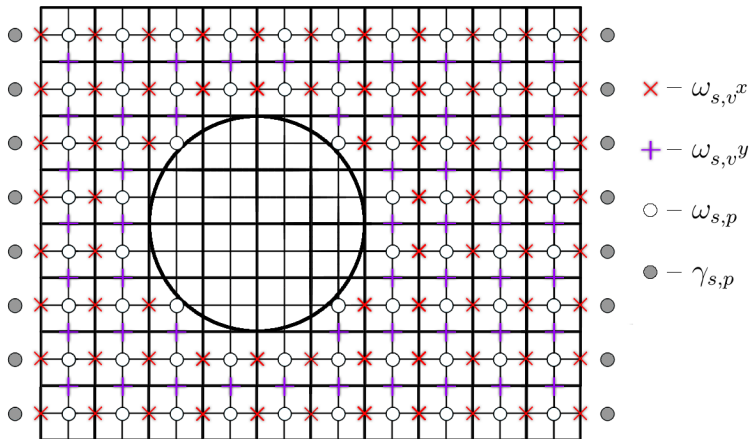
Рис.: Пример расчетной сетки.



Аппроксимация методом конечных разностей.

Разнесенная сетка

Рис.: Пример разнесенной расчетной сетки.



Аппроксимация методом конечных разностей.

Разностная схема

Определим разностные операторы ∇_h и Δ_h как аппроксимацию соответствующих дифференциальных операторов формулами центральной разности, направленных трехточечных разностей (на границе) и второй разностной производной. Разностная схема первого порядка по времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{i,j}^* = \vec{v}_{i,j}^l - \tau(\vec{v}_{i,j}^l, \nabla_h)\vec{v}_{i,j}^l - \tau\beta\nabla_h p_{i,j}^l + \tau\frac{1}{Re} \Delta_h \vec{v}_{i,j}^l, \vec{r}_{i,j} \in \omega_v, \\ \vec{v}_{i,j}^* = \vec{v}_{i,j}^l = 0, \vec{r}_{i,j} \in \gamma_v, p_{0,j}^l = p_0, p_{N,j}^l = p_1, j \in \overline{0, M}, \\ \vec{v}_{i,j}^0 = 0, \vec{r}_{i,j} \in \omega_v, p_{i,j}^0 = p_1, \vec{r}_{i,j} \in \omega_p; \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_h \phi_{i,j} = \frac{1}{\tau}(\nabla_h, \vec{v}_{i,j}^*), \vec{r}_{i,j} \in \omega_p, \\ \phi_{0,j} = (1 - \beta)p_0, \phi_{N,j} = (1 - \beta)p_1, j \in \overline{0, M}; \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{i,j}^{l+1} = \vec{v}_{i,j}^* - \tau\nabla_h \phi_{i,j}, \vec{r}_{i,j} \in \omega_v, \\ p_{i,j}^{l+1} = \phi_{i,j} + \beta p_{i,j}^l, \vec{r}_{i,j} \in \omega_p. \end{array} \right.$$

Аппроксимация методом конечных разностей.

Монотонность схемы

Разностная схема не будет являться монотонной при любом выборе шаге по времени. Добавим в разностную схему монотонизирующую коррекцию.

$$\begin{aligned}u_{i,j}^{(1)} &= C_x u_{i,j}, i = \overline{1, N-1}, \\u_{i,j}^{(2)} &= C_y u_{i,j}^{(1)}, j = \overline{1, M-1}.\end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}C_x u_i &= \textit{ClampMinMax}(u_i, u_{i-1}, u_{i+1}), i = \overline{1, N-1}, \text{ где} \\ \textit{ClampMinMax}(u, a, b) &= \begin{cases} \min(a, b), & u < \min(a, b); \\ \max(a, b), & u > \max(a, b); \\ u, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

Аппроксимация методом конечных разностей.

Результаты расчетов

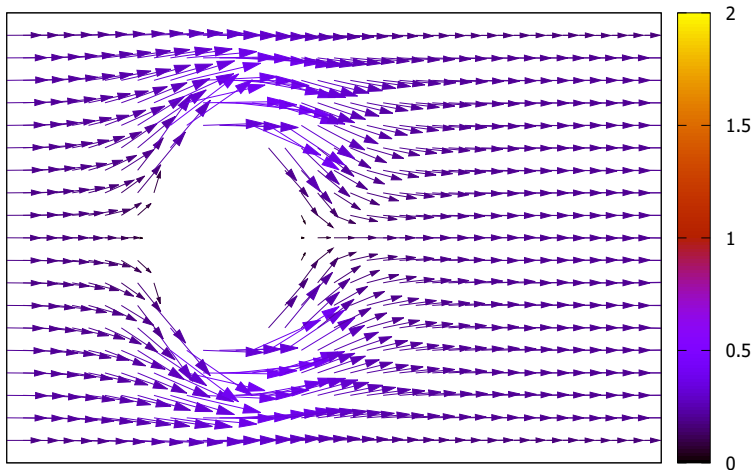
Параметры сетки:

$$L_x = 4, L_y = 2, N = 40, M = 20, \tau = \frac{h_x}{10}.$$

Аппроксимация методом конечных разностей.

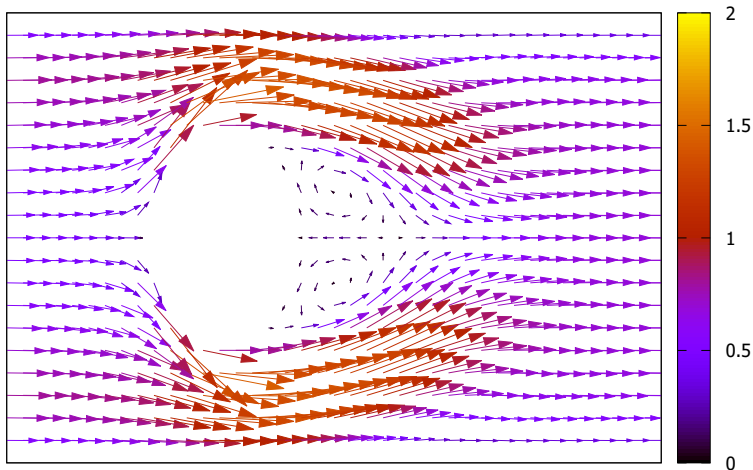
Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 100\tau$, $Re = 200$.



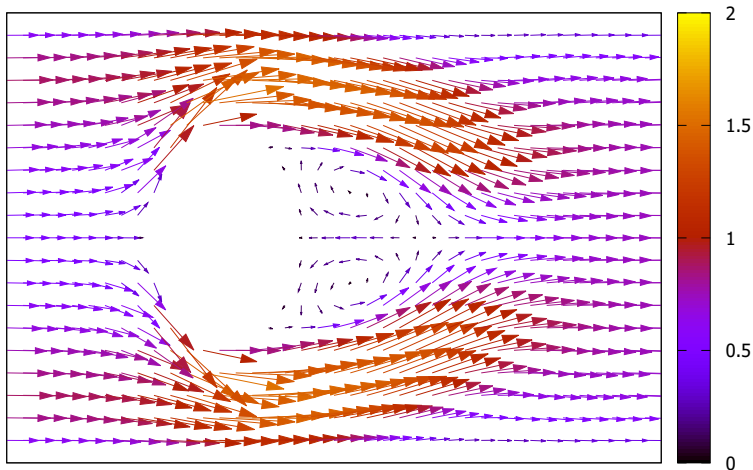
Аппроксимация методом конечных разностей. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 400\tau$, $Re = 200$.



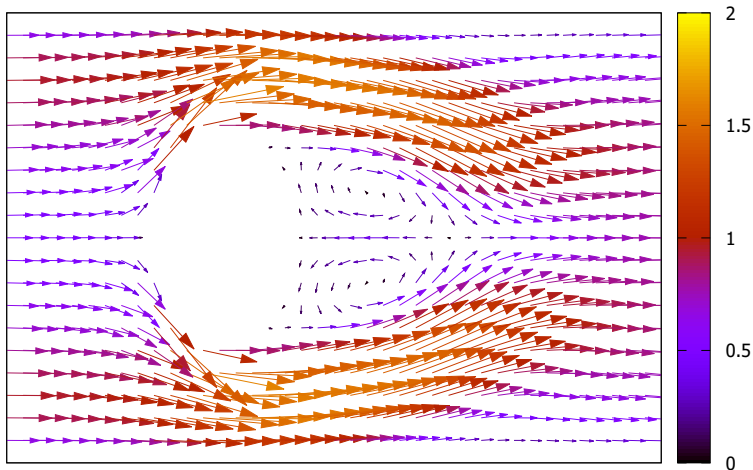
Аппроксимация методом конечных разностей. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 450\tau$, $Re = 200$.



Аппроксимация методом конечных разностей. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 500\tau$, $Re = 200$.



Аппроксимация методом конечных объемов.

Используем интегральный вид системы уравнений Навье-Стокса для получения консервативной разностной схемы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_S \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} dS = - \oint_{\partial S} \left[\vec{v}_x^2 dy - \vec{v}_x \vec{v}_y dx + p dy - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} dy - \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} dx \right] \right], \\ \iint_S \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial t} dS = - \oint_{\partial S} \left[\vec{v}_x \vec{v}_y dy - \vec{v}_y^2 dx - p dx - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} dy - \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} dx \right] \right], \\ \oint_{\partial S} (\vec{v}_x dy - \vec{v}_y dx) = 0. \end{array} \right.$$

Введем следующие операторы:

$$\frac{Qf}{Q_x} = \frac{1}{S} \oint_{\partial S} f dy, \quad \frac{Qf}{Q_y} = -\frac{1}{S} \oint_{\partial S} f dx,$$

$$QRAD_S p = \left[\frac{Qp_x}{Q_x}, \frac{Qp_y}{Q_y} \right]^T, \quad QIV_S \vec{v} = \frac{Q\vec{v}_x}{Q_x} + \frac{Q\vec{v}_y}{Q_y},$$

$$QDQ_S \vec{v} = \frac{Q\vec{v}_x \vec{v}}{Q_x} + \frac{Q\vec{v}_y \vec{v}}{Q_y}, \quad QAP_S \vec{v} = \frac{Q}{Q_x} \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{Q}{Q_y} \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y}.$$

Аппроксимация методом конечных объемов. Разностные операторы

Аппроксимируем операторы следующим образом:

$$\left\langle \frac{Qf}{Qx} \right\rangle_{i,j}^{\Omega_f} = \sum_{k=j-1}^{j+1} \alpha_k \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_{i,k}^{\Omega_f},$$

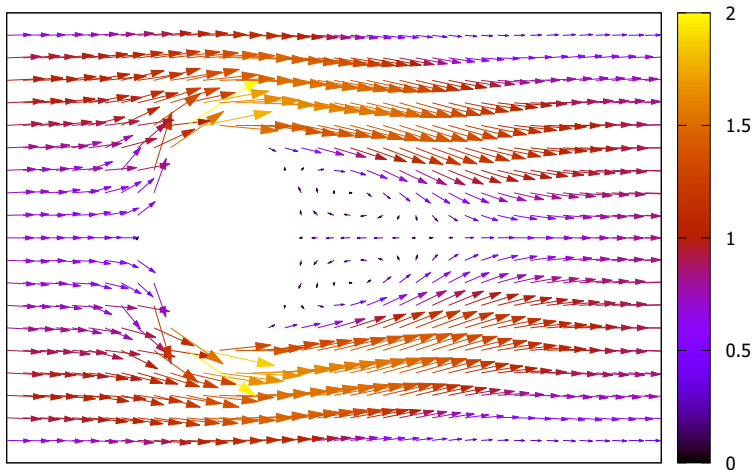
$$\left\langle \frac{Qf}{Qy} \right\rangle_{i,j}^{\Omega_f} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \alpha_k \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_{k,i}^{\Omega_f}.$$

$$\left\langle \frac{Q}{Qx} \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_{i,j}^{\Omega_f} = \sum_{k=j-1}^{j+1} \alpha_k \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\rangle_{i,k}^{\Omega_f},$$

$$\left\langle \frac{Q}{Qy} \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_{i,j}^{\Omega_f} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \alpha_k \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\rangle_{k,j}^{\Omega_f};$$

Аппроксимация методом конечных объемов. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 500\tau$, $Re = 200$.



Метод дробного шага

Метод дробного шага подразумевает дальнейшее расщепление уравнения Бюргерса на уравнения Хопфа и теплопроводности:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{v}^{**} - \vec{v}^l}{\tau} &= -(\vec{v}^l, \nabla)\vec{v}^l, \\ \frac{\vec{v}^* - \vec{v}^{**}}{\tau} &= \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}^*, \\ \frac{\vec{v}^{l+1} - \vec{v}^*}{\tau} &= \nabla p^{l+1}, \\ (\nabla, \vec{v}^{l+1}) &= 0.\end{aligned}$$

Метод дробного шага. Уравнение Хопфа

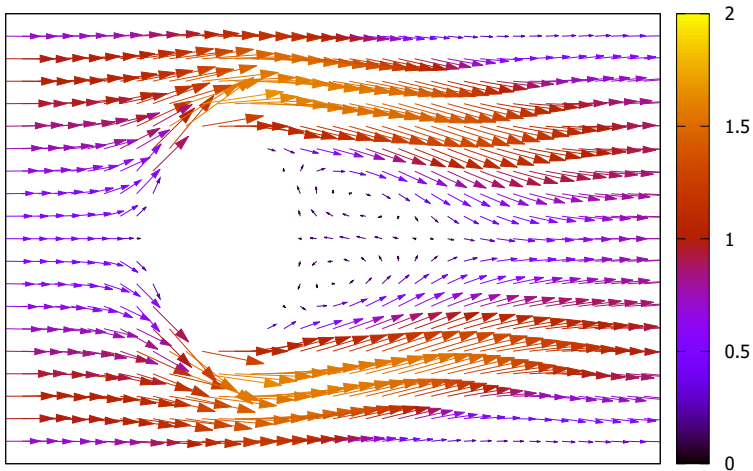
С учетом уравнения неразрывности, квазилинейное уравнение переноса может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\vec{v}^{**} - \vec{v}^I}{\tau} + \frac{\partial \vec{\Phi}_1^I}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_2^I}{\partial y} = 0, \text{ где:}$$
$$\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_1(\vec{v}^x, \vec{v}^y) = \left\{ \begin{array}{c} (\vec{v}^x)^2 \\ \vec{v}^x \vec{v}^y \end{array} \right\}, \vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_2(\vec{v}^x, \vec{v}^y) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^x \vec{v}^y \\ (\vec{v}^y)^2 \end{array} \right\}.$$

Будем использовать схему Лакса-Фридрихса второго порядка.

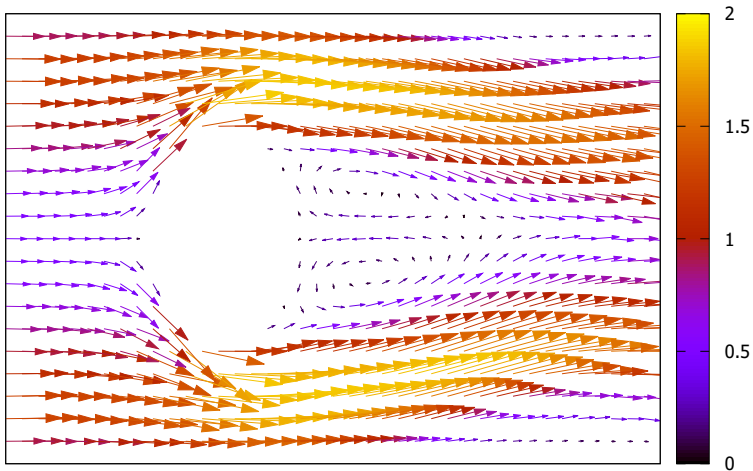
Метод дробного шага. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 500\tau$, $Re = 200$.



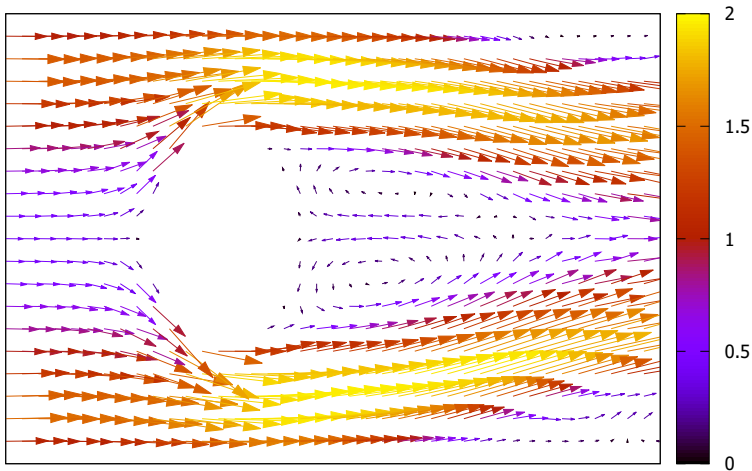
Метод дробного шага. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 670\tau$, $Re = 200$.



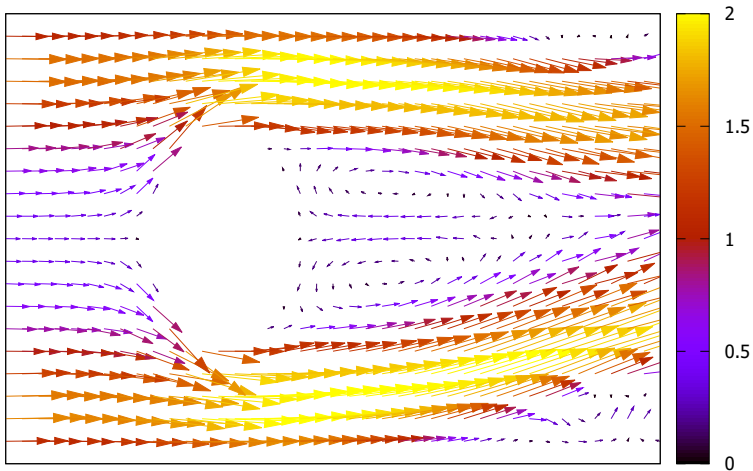
Метод дробного шага. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 830\tau$, $Re = 200$.



Метод дробного шага. Результаты расчетов

Рис.: Скорость течения при $t = 1000\tau$, $Re = 200$.



Заключение

Результаты расчетов показали, что на данной задаче обтекания выбор построенной конечно-разностной или конечно-объемной аппроксимации диффузионных членов, расчет по явным или неявным схемам, выбор сеток не несет существенных отличий в поведении решения.

Качественно наилучшее решение было получено применением метода дробного шага, который предполагает дальнейшее расщепление конвективных и диффузионных членов, что позволяет применять численные методы решения гиперболических уравнений. То есть главным фактором получения наилучшего решения выступает именно аппроксимация $(\vec{v}, \nabla)\vec{v}$.

Спасибо за внимание!