Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Афанасьев Никита Александрович

Применение метода опорных операторов для расчета течений в сложных областях

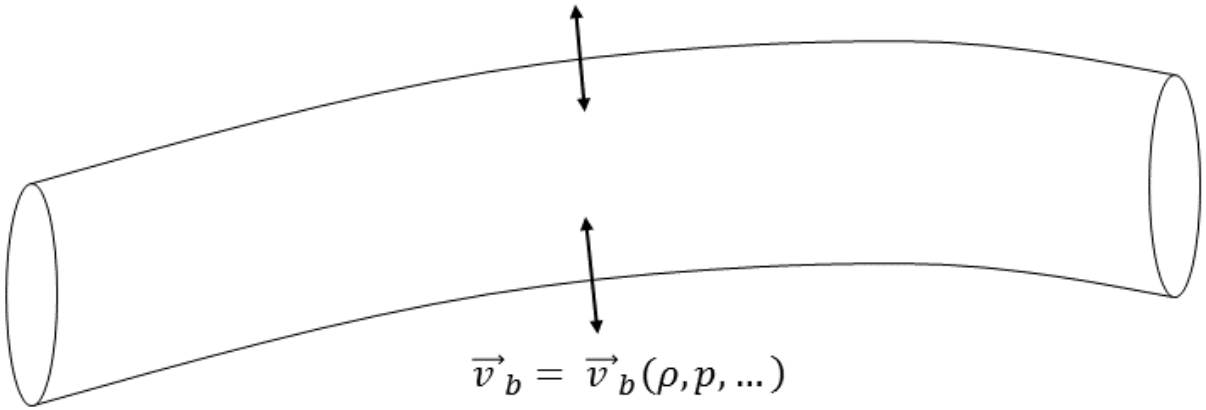
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. С.И. Мухин

Москва, 2016

Цель работы

Построить и реализовать консервативный метод расчета многомерного течения вязкой несжимаемой жидкости для областей сложной формы с подвижными границами на неструктурированных сетках на основе метода опорных операторов. Построенные методы планируется использовать для проведения гемодинамических расчетов, когда граница области, в которой проводятся расчеты, является подвижной, причем движение границ зависит от течения внутри области (стенки сосудов расширяются или сужаются в зависимости от давления внутри).



Одними из актуальных задач гемодинамики являются: расчет течения крови в кровеносном сосуде с аневризмой, в поврежденном сосуде, в сосуде, в который вставлен катетер и многие другие.

Математическая постановка задачи

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса. В эйлеровых координатах эти уравнения выглядят следующим образом:

$$div\,\mathbf{v} = 0,$$

$$\rho\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} + grad\,p = \mu\,\Delta\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r} \in S, t > 0.$$

Рассматривается случай двумерных течений.

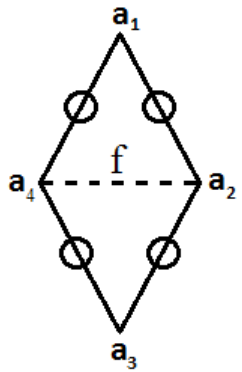
Основная идея метода опорных операторов заключается в том, что дифференциальные операторы дивергенции и ротора аппроксимируются исходя из их инвариантных определений, а сеточный оператор градиента строится как кососопряжённый к сеточному оператору дивергенции в пространствах сеточных скалярных и векторных функций. Такой подход позволяет строить консервативные методы, сохраняющие ряд свойств интегральных и дифференциальных уравнений, описывающих течение несжимаемой жидкости.

Основные принципы метода опорных операторов был сформулированы в работах А.П. Фаворского, М.Ю. Шашкова., В.Ф. Тишкина, В.М. Головизнина и других.

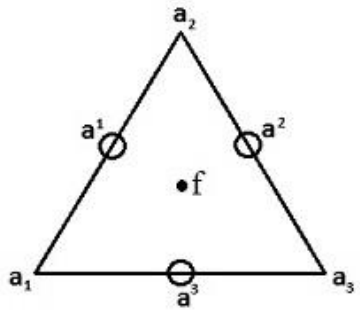
$$\left[\begin{array}{l} div\,\mathbf{a} = \lim\limits_{|S'|\to 0} \dfrac{1}{|S'|} \oint\limits_{\partial S'} (\mathbf{a},\mathbf{n})dl \;\Rightarrow\; DIV \\ grad\,f = \lim\limits_{|S'|\to 0} \dfrac{1}{|S'|} \oint\limits_{\partial S'} f\mathbf{n}\,dl \;\Rightarrow\; GRAD \end{array}\right. \Rightarrow\; GRAD = -(DIV)^*$$

Варианты аппроксимации операторов

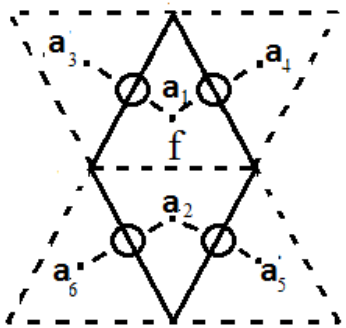
Для того, чтобы построить сеточные аналоги дифференциальных операторов, надо аппроксимировать контурные интегралы в инвариантных определениях. Для этого надо определиться, к каким элементам сетки относить неизвестные-скаляры (давление *p*) и неизвестные-векторы (скорость ***v***). Ниже указаны несколько вариантов шаблонов сеточных операторов дивергенции и ротора, действующих в различных пространствах сеточных функций. Жирным выделены контуры, по которым аппроксимируются операторы. Кружком обведены точки, в которые интерполируется значение той или иной функции для аппроксимации контурного интеграла.



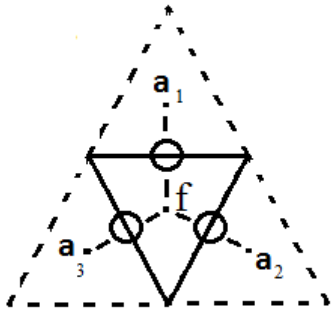
Скаляры → ребра
Векторы → узлы



Скаляры → ячейки
Векторы → узлы

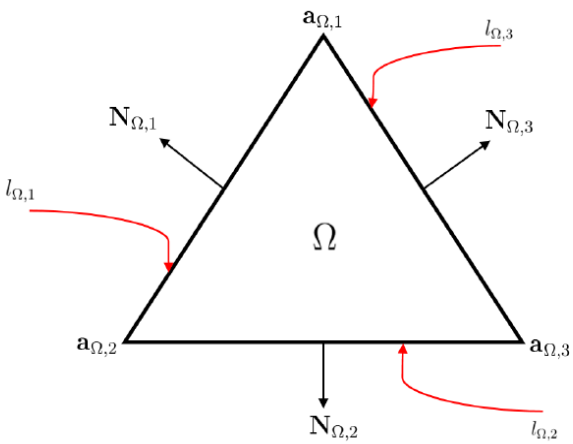


Скаляры → ребра
Векторы → ячейки

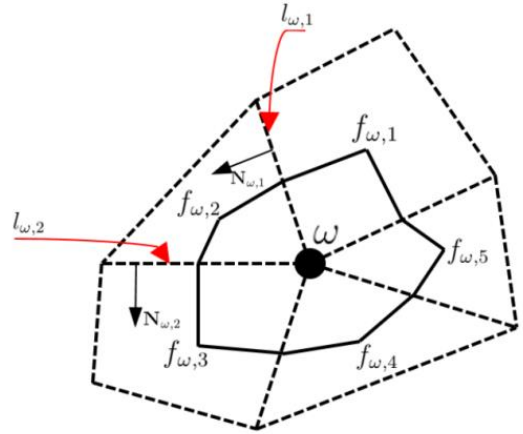


Скаляры → ячейки
Векторы → ячейки

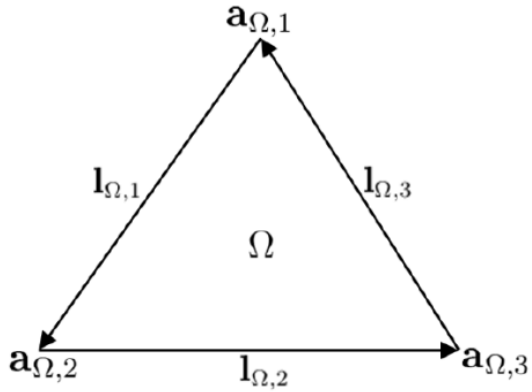
Выбранные аппроксимации



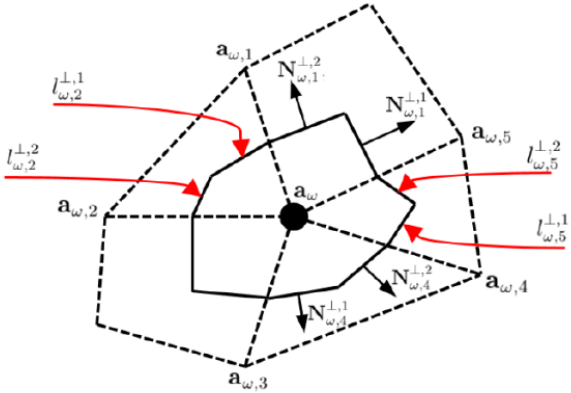
$$(DIV\,\mathbf{a})_\Omega = \frac{1}{S_\Omega}\sum_{i=1}^{m_\Omega}\left(\frac{\mathbf{a}_{\Omega,i}+\mathbf{a}_{\Omega,i+1}}{2},\mathbf{N}_{\Omega,i}\right)l_{\Omega,i}$$



$$(GRAD\,f)_\omega = \frac{1}{S_\omega}\sum_{i=1}^{m_\omega} f_{\omega,i}\frac{1}{2}\left(l_{\omega,i-1}\mathbf{N}_{\omega,i-1} - l_{\omega,i}\mathbf{N}_{\omega,i}\right)$$



$$(ROD\,\mathbf{a})_\Omega = \frac{1}{S_\Omega}\sum_{i=1}^{m_\Omega}\left(\frac{\mathbf{a}_{\Omega,i}+\mathbf{a}_{\Omega,i+1}}{2},\mathbf{l}_{\Omega,i}\right)$$



$$(ROG\,g)_\omega = \frac{1}{S_\omega}\sum_{i=1} g_{\omega,i}\{w_{2,i},-w_{1,i}\}$$

$$\mathbf{w}_i = \{w_{1,i},w_{2,i}\} = l^{\perp,1}_{\omega,i}\mathbf{N}^{\perp,1}_{\omega,i} + l^{\perp,2}_{\omega,i}\mathbf{N}^{\perp,2}_{\omega,i}$$

Свойства построенных операторов

- $GRAD = -(DIV)^*$ в пространствах скалярных и векторных сеточных функций (с учетом однородных условий первого рода для функций на границе области).
- $\Delta_h = DIV\, GRAD \leq 0$
- $DIV,\ ROD,\ ROG$ аппроксимируют соответствующие дифференциальные операторы с первым порядком точности.
- $GRAD$, вообще говоря, аппроксимирует дифференциальный оператор градиента только в слабом смысле с первым порядком точности.

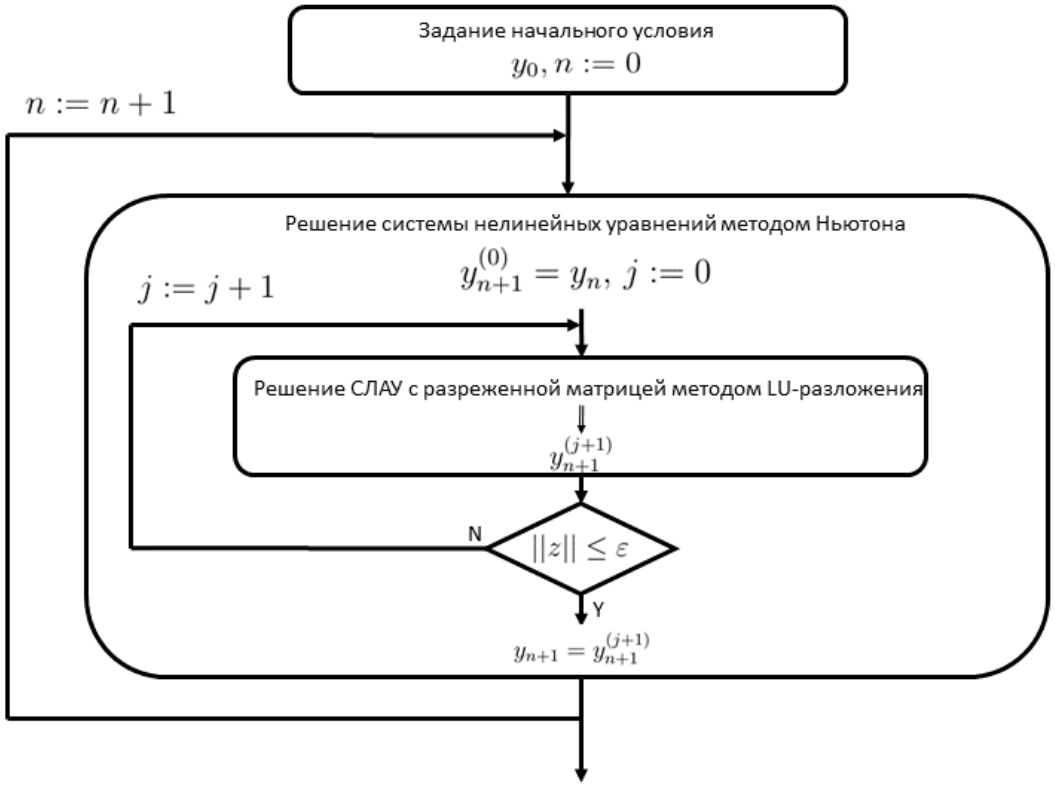
Данный набор операторов позволяет построить семейство консервативных схем для решения уравнений Навье-Стокса:

$$(DIV\, \mathbf{v}^{n+1})_\Omega = 0, \quad \forall \Omega \in \Omega_h,$$

$$\rho \frac{(\mathbf{v}_\omega^{n+1})_i - (\mathbf{v}_\omega^n)_i}{\tau} + \rho (DIV'\, (v_i \mathbf{v})^{(\sigma_1)})_\omega + \left((GRAD\, p^{(\sigma_2)})_\omega \right)_i = -\mu \left((ROG\, ROD\, \mathbf{v}^{(\sigma_3)})_\omega \right)_i,$$

$$\forall\, \omega \in \omega_h,\ i = 1, 2.$$

Алгоритм решения



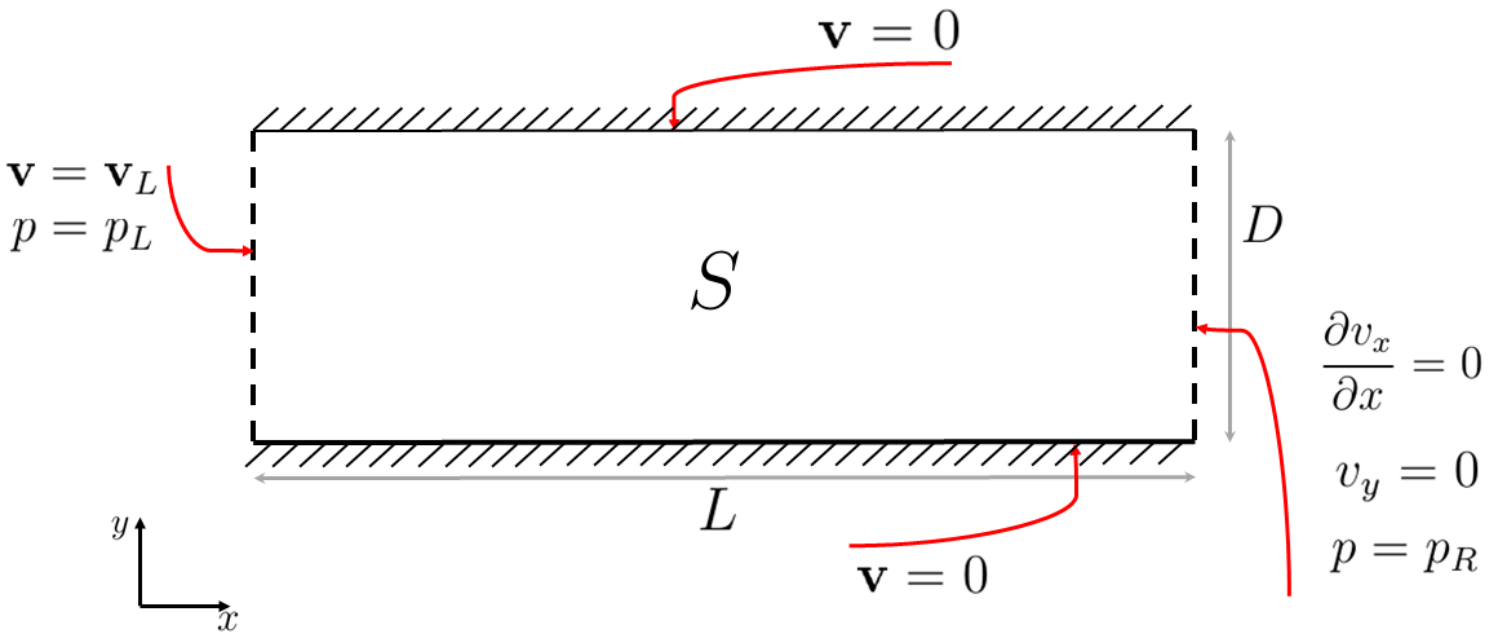
Вообще говоря, схема представляет из себя систему нелинейных уравнений, которая на каждом шаге по времени решается с помощью метода Ньютона.

После линеаризации при разумной нумерации неизвестных и уравнений можно получить СЛАУ с ленточной матрицей с некоторой шириной ленты *p*, зависящей от типа используемой сетки и формы области задачи. Для решения системы используется один из прямых методов решения СЛАУ, основанный на LU-разложении матрицы.

Некоторые тестовые и модельные расчеты

Для тестирования построенного метода (а именно чисто-неявного из семейства построенных методов) были произведены тестовые расчеты. Далее представлены расчеты в 3 различных областях: течение между плоско-параллельными пластинами (“прямая труба”), “ступенька вверх” и “ступенька вниз”. Для каждой из областей расчеты проводились для течений с разными числами Рейнольдса. Расчеты проводились на прямоугольных сетках.

Начальные условия внутри области выбирались однородными: *p=0,* ***v****=0.* Граничные условия для “прямой трубы” представлены на рисунке. Для остальных областей граничные условия ставились аналогично.

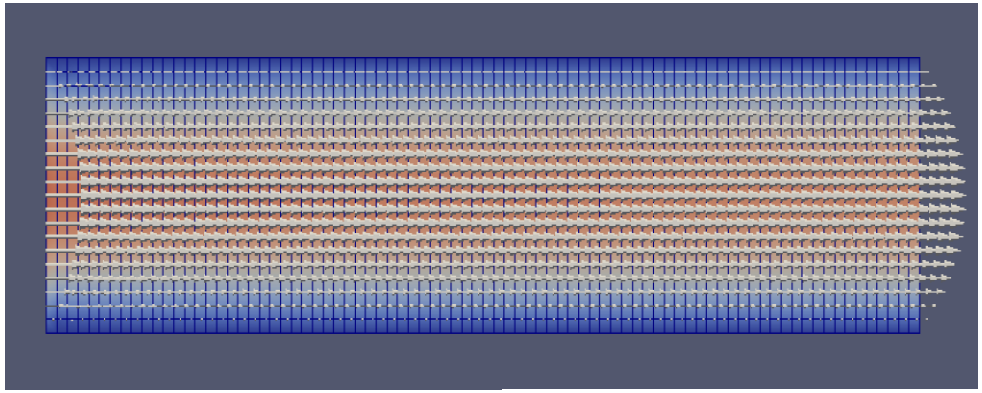


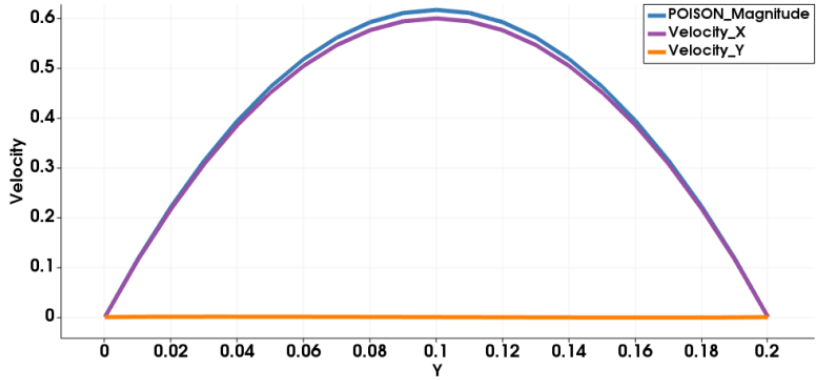
Результаты для “прямой трубы”

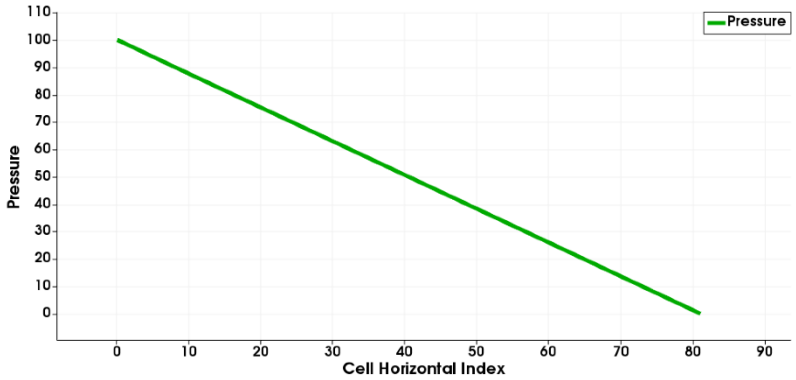
Для “прямой трубы” известно аналитическое решение в виде ламинарного течения:

$$\mathbf{v} = \{v, 0\},\ v = v(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} y(2R - y),\ p = p(x) = p_L - \frac{\Delta p}{L} x \qquad (1)$$

Ниже представлены результаты для случая, когда на левой границе задана скорость, соответствующая (1) при определенном перепаде давления на левой и правой границах при Re ~ 100.



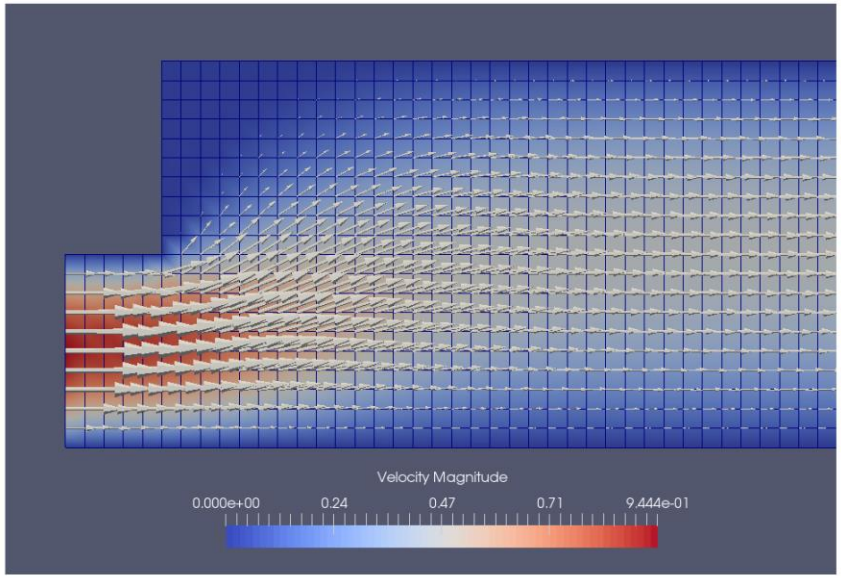


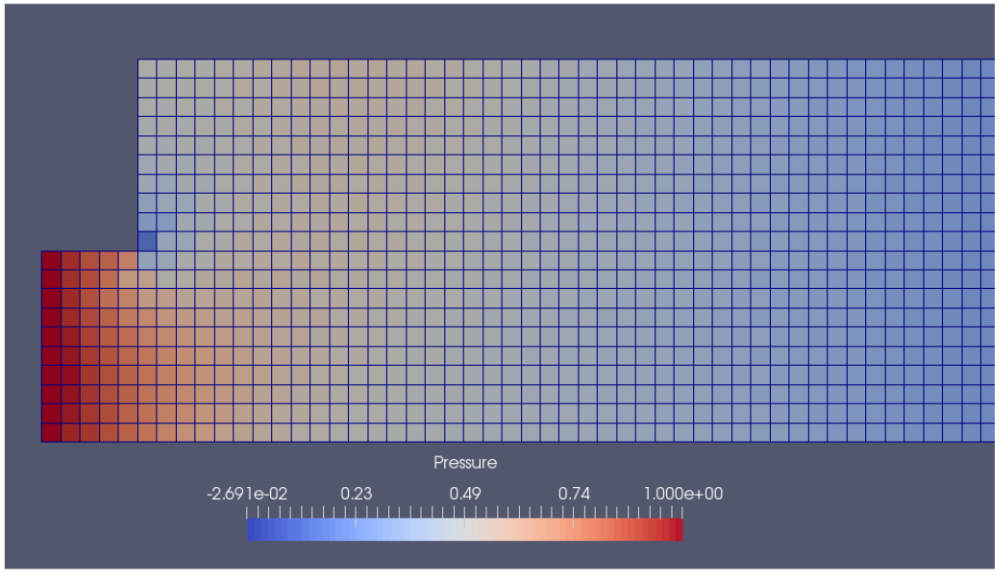


Результаты расчетов показали, что время установления зависит от числа Рейнольдса: чем оно больше, тем дольше течение устанавливается.

Результаты для “ступеньки вверх”

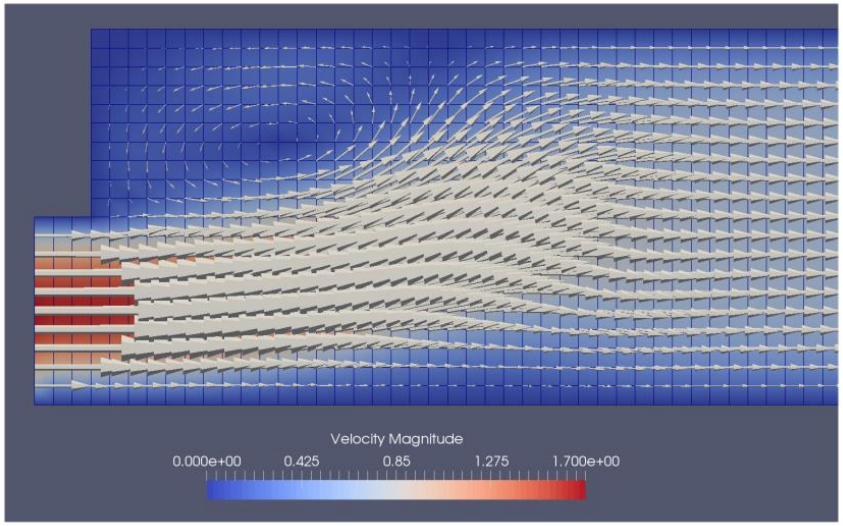
Как и в случае с “прямой трубой”, в качестве граничного условия на левой границе задавалась скорость, соответствующая (1) при определенном перепаде давления. Ниже приведены результаты для трех течений, имеющих различные числа Рейнольдса: Re1 = 10, Re2 = 170, Re3 = 1000.

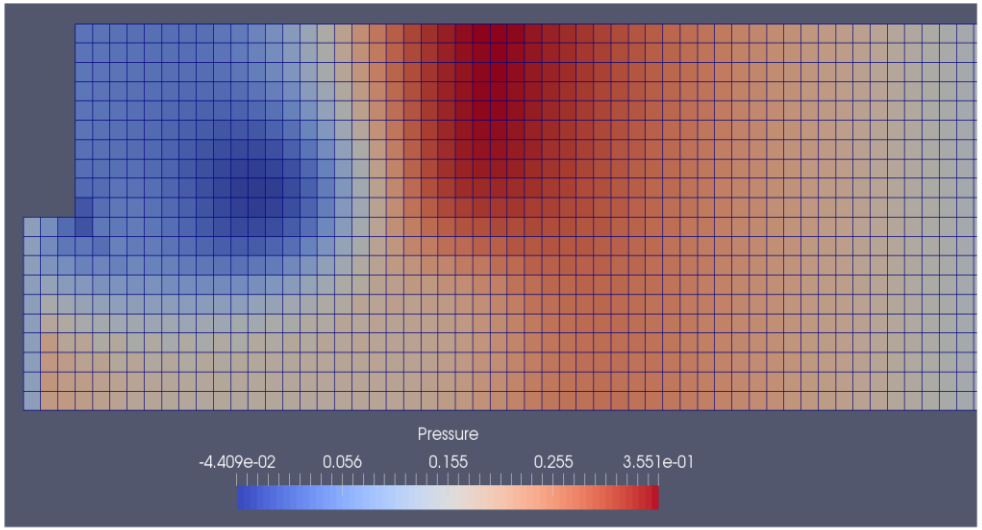




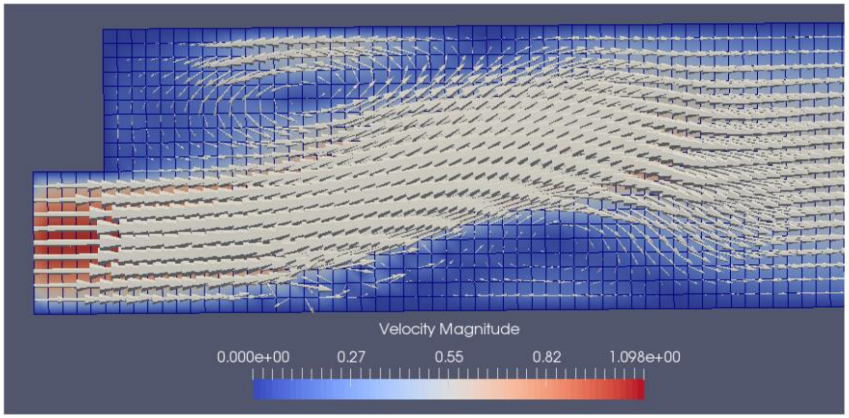
Re1 = 10

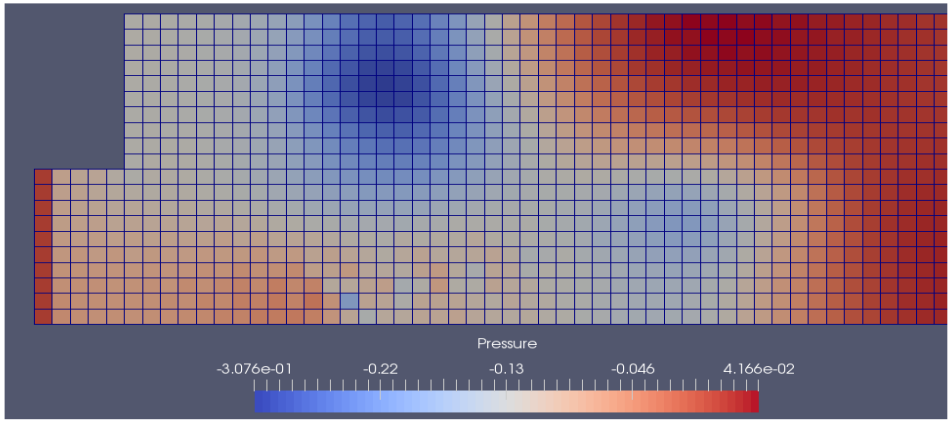
Результаты для “ступеньки вверх”





Re2 = 170

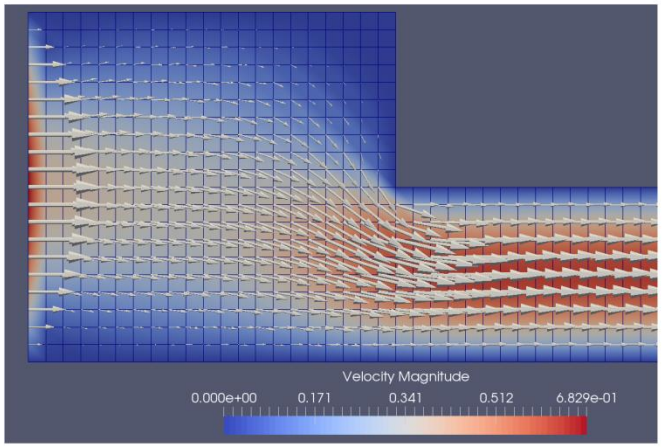




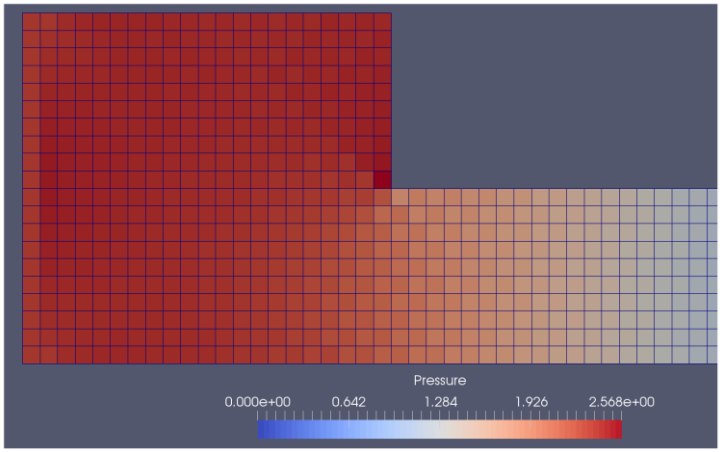
Re3 = 1000

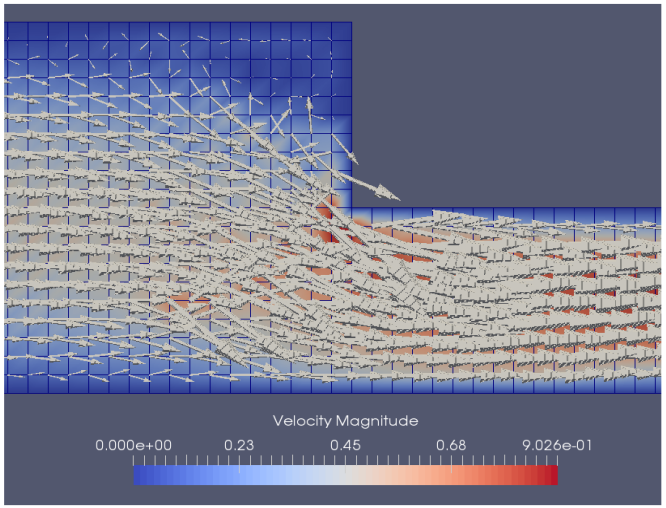
Результаты для “ступеньки вниз”

Как и в случае с “прямой трубой”, в качестве граничного условия на левой границе задавалась скорость, соответствующая (1) при определенном перепаде давления. Ниже приведены результаты для двух течений, имеющих различные числа Рейнольдса: Re1 = 10, Re2 = 1000.

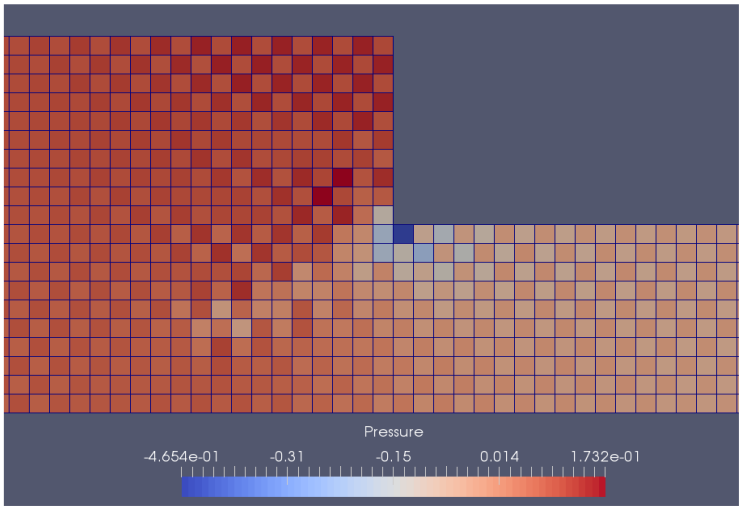


Re1 = 10





Re2 = 1000



Заключение

С помощью метода опорных операторов и инвариантных определений дифференциальных операторов были построены аппроксимирующие их сеточные операторы. Сконструировано трёхпараметрическое семейство консервативных схем для двумерных уравнений Навье-Стокса.

Для одной из построенных схем были проведены тестовые и модельные расчеты в областях нескольких типов. Результаты расчетов показали, что схема адекватно воспроизводит течения с различными числами Рейнольдса.

Спасибо за внимание!