Н.В. Соснин

КОНСПЕКТ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА – 2023

УДК 517
ББК 22.161
С664

Рецензенты:
И.С.Ломов – доктор физико-математических наук, профессор (факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова);
С.И.Мухин – доктор физико-математических наук, профессор (факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова)

Соснин Н.В.

С664 Конспект занятий по математическому анализу : учебно-методическое пособие / Н.В.Соснин. — М.: Издательский проект «Рукопись», 2023. — 507с.

ISBN 978-5-9216-2440-5

Учебно-методическое пособие отражает содержание практических занятий по курсу «Математического анализа», читаемого студентам второго курса факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Структурно пособие состоит из пятидесяти отдельных занятий, в которых приводятся необходимые теоретические материалы, используемые для решения задач на семинарских занятиях и самостоятельно. В пособии содержатся формулировки задач, подробные указания по их решению и ответы.

В первой главе данного пособия представлены четырнадцать занятий по «Теории рядов». Вторая глава содержит двадцать два занятия по «Теории интегралов». Третья глава объединяет четырнадцать занятий по «Теории функций комплексного переменного».

Книга может быть использована в качестве учебного пособия студентами математических и физических факультетов университетов.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9216-2440-5

© Соснин Н.В., 2023

Оглавление

Предисловие **6**

1 Ряды **7**

1.1 Числовые ряды 7

1.1.1 Занятие 1 7

1.1.2 Занятие 2 15

1.1.3 Занятие 3 24

1.1.4 Занятие 4 34

1.1.5 Занятие 5 45

1.1.6 Занятие 6 55

1.2 Бесконечные произведения 64

1.2.1 Занятие 7 64

1.3 Функциональные последовательности и ряды 70

1.3.1 Занятие 8 70

1.3.2 Занятие 9 84

1.3.3 Занятие 10 93

1.3.4 Занятие 11 100

1.3.5 Занятие 12 113

1.3.6 Занятие 13 121

1.4 Обобщённые методы суммирования расходящихся рядов 126

1.4.1 Занятие 14 126

2 Интегралы **131**

2.1 Двойные собственные интегралы 131

2.1.1 Занятие 15 131

2.1.2 Занятие 16 143

2.1.3 Занятие 17 153

2.1.4 Занятие 18 162

2.1.5 Занятие 19 169
2.2 Тройные собственные интегралы 175
2.2.1 Занятие 20 175
2.2.2 Занятие 21 187
2.3 Кратные собственные интегралы 196
2.3.1 Занятие 22 196
2.4 Кратные несобственные интегралы 202
2.4.1 Занятие 23 202
2.5 Поверхностные интегралы 214
2.5.1 Занятие 24 214
2.6 Криволинейные интегралы 229
2.6.1 Занятие 25 229
2.7 Формулы Грина, Стокса, Остроградского 245
2.7.1 Занятие 26 245
2.7.2 Занятие 27 252
2.8 Элементы теории поля 263
2.8.1 Занятие 28 263
2.9 Собственные интегралы, зависящие от параметра 272
2.9.1 Занятие 29 272
2.9.2 Занятие 30 279
2.10 Несобственные интегралы, зависящие от параметра 289
2.10.1 Занятие 31 289
2.10.2 Занятие 32 297
2.10.3 Занятие 33 308
2.10.4 Занятие 34 323
2.11 Тригонометрический ряд Фурье 333
2.11.1 Занятие 35 333
2.12 Интегральная формула Фурье 350
2.12.1 Занятие 36 350

3 Функции комплексного переменного 357
3.1 Комплексные числа 357
3.1.1 Занятие 37 357
3.2 Непрерывность функции комплексного переменного 370
3.2.1 Занятие 38 370
3.3 Дифференцирование функции комплексного переменного 380

3.3.1 Занятие 39 380
3.4 Конформные отображения 393
3.4.1 Занятие 40 393
3.4.2 Занятие 41 403
3.4.3 Занятие 42 415
3.5 Интегрирование функции комплексного переменного 420
3.5.1 Занятие 43 420
3.5.2 Занятие 44 430
3.6 Степенные ряды 442
3.6.1 Занятие 45 442
3.7 Ряды Лорана 454
3.7.1 Занятие 46 454
3.8 Классификация особых точек и вычет функции 462
3.8.1 Занятие 47 462
3.9 Вычисление интегралов с помощью вычетов 474
3.9.1 Занятие 48 474
3.9.2 Занятие 49 484
3.10 Преобразование Лапласа 495
3.10.1 Занятие 50 495

Предисловие

В основу учебного пособия положены материалы практических занятий по математическому анализу, которые автор проводил для студентов второго курса факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Структурно пособие состоит из пятидесяти отдельных занятий, в которых приводятся необходимые теоретические материалы, используемые для решения задач на семинарских занятиях и самостоятельно. Содержатся формулировки задач, подробные указания по их решению и ответы. В пособии использованы задачи из книг:

1) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу;

2) Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного;

3) Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению.

В первой главе пособия представлены четырнадцать занятий по «Теории рядов». Рассмотрены вопросы, связанные с такими понятиями, как числовые ряды, бесконечные произведения, функциональные последовательности и ряды, обобщённые методы суммирования расходящихся рядов.

Вторая глава содержит двадцать два занятия по «Теории интегралов». Учебные материалы представлены в следующем поряке: двойные и тройные собственные интегралы; кратные собственные и несобственные интегралы; поверхностные интегралы; криволинейные интегралы; формулы Грина, Стокса и Остроградского; элементы теории поля; собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра; интегральная формула и ряды Фурье.

Третья глава объединяет четырнадцать занятий по «Теории функций комплексного переменного». Последовательно обсуждаются понятия: непрерывности и дифференцирования функции комплексного переменного; конформные отображения; интегрирование функции комплексного переменного; степенные ряды и ряды Лорана; классификация особых точек и вычет функции; вычисление интегралов с помощью вычетов; преобразование Лапласа.

Книга может быть использована в качестве учебного пособия студентами математических и физических факультетов университетов.

Н.В. Соснин

Глава 1

Ряды

1.1 Числовые ряды

1.1.1 Занятие 1

u_1, $u_2, \ldots$, $u_k, \ldots$ – числовая последовательность $\{u_k\}$

Определение. $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ – числовой ряд (1) .

При последовательном суммировании элементов ряда возникает новая последовательность с элементами $s_1 = u_1$ – 1-ая частичная сумма, $s_2 = s_1 + u_2$ – 2-ая частичная сумма, $s_3 = s_2 + u_3$ – 3-ья частичная сумма, $\ldots, s_n = s_{n-1} + u_n$ – n-ая частичная сумма, $\ldots$.

Определение. $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ – n-ая частичная сумма ряда (1) .

Определение. Ряд (1) называется сходящимся (по Коши), если сходится последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм этого ряда. Предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ последовательности частичных сумм называется суммой (по Коши) ряда (1) $(\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд (1) называется расходящимся.

Теорема (критерий Коши). Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и для любого натурального p выполнялось неравенство $|s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.

Следствие (необходимое условие сходимости числового ряда). Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} u_k \neq 0$, то ряд (1) является расходящимся рядом.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, в котором все $p_k > 0$, называется числовым рядом с положительными членами.

Последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей числовой последовательностью.

Теорема. Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограниченной.

Теорема (признак сравнения). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{'}$ – ряды с положительными членами. Пусть для всех номеров $k \geq k_0$ справедливо неравенство $p_k \leq p_k^{'}$. Тогда, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{'}$ влечет сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, а расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{'}$.

- -

Задача 1.1 (№2549 [1]). Исследовать на сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Р е ш е н и е: $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)} \to \lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$

О т в е т: Ряд сходится и его сумма равна 1 (по определению сходимости числового ряда).

- -

Задача 1.2 (№2554 [1]). Доказать, что если ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$– заданные целые числа), полученный в результате группировки членов ряда (1) без нарушения порядка их следования, также сходится и имеет ту же сумму. Обратное неверно, привести пример.

Р е ш е н и е: $\{s_n\}$– последовательность частичных сумм ряда (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сумма ряда (1)

$\left\{s_n^{'}\right\}$– последовательность частичных сумм ряда (2)

$$s_n^{'} = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i \right) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{p_{n+1}-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} a_k = s_{p_{n+1}-1}$$

– элемент числовой последовательности $\{s_n\}$

$s_n^{'}$ является подпоследовательностью числовой последовательности s_n, которая сходится.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{'} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$.

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$. Ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$– расходится (нарушено необходимое условие сходимости). Пусть $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$, $p_k = 2k - 1$, $\ldots$. Тогда $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = \ldots = 0$ и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ является сходящимся.

- -

Задача 1.3 (№2557 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{0,001}.$$

Р е ш е н и е: $u_k = \sqrt[k]{0,001} = \dfrac{1}{10^{3/k}} \to \lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} 10^{-3/k} = 1 \neq 0$ – нарушено необходимое условие сходимости

О т в е т: Ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости числового ряда).

- -

Задача 1.4 (№2558 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Р е ш е н и е: $u_n = \dfrac{1}{n!} \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено

Для любого $n \geq 1$ верно неравенство $n! \geq 2^{n-1}$.

Тогда, $0 < u_n = \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} = u_n^{'}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ – сходится, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем равным $\dfrac{1}{2}$.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}$ – ряды с положительными членами и $u_n \leqslant u_n^{'}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ является сходящимся рядом (по признаку сравнения) .

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится (по признаку сравнения).

Задача 1.5 (№2559 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Р е ш е н и е: $u_n = \dfrac{1}{2n-1} \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено

Используя критерий Коши, докажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$. Проверяем выполнение отрицания критерия Коши:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k-1}\right| = \frac{1}{2(n+1)-1} + \ldots + \frac{1}{2(n+p)-1} >$$

$$> \frac{p}{2(n+p)-1} > \frac{p}{2(n+p)} = \{\text{выберем } p = n\} = \frac{1}{4} > \varepsilon_0 = \frac{1}{8}$$

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$ расходится (по критерию Коши).

Задача 1.6 (№2575.2 [1]). Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}.$$

У к а з а н и е: использовать неравенство $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Р е ш е н и е: Для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального p верны неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\left|\cos x^k\right|}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

если $n \geq N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$ сходится (по критерию Коши).

- -

Задача 1.7 (№2552 [1]). Исследовать на сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right).$$

Р е ш е н и е:

$$u_k=\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=0$ – необходимое условие сходимости выполнено

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2}$$

О т в е т: Ряд сходится и его сумма равна $1-\sqrt{2}$ (по определению сходимости числового ряда).

- -

Задача 1.8 (№2560 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}.$$

Р е ш е н и е: $u_n = \dfrac{1}{1000n+1} \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1000n+1} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено

Для любого $n \geq 1$ верно неравенство $u_n = \dfrac{1}{1000n+1} > \dfrac{1}{1000(n+1)} = u_n^{'}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1000(n+1)} = \dfrac{1}{1000} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ – расходится (гармонический ряд).

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}$ – ряды с положительными членами и $u_n > u_n^{'}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1000n+1}$ является расходящимся рядом (по признаку сравнения).

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1000n+1}$ расходится (по признаку сравнения).

Задача 1.9 (№2562 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Р е ш е н и е: $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)^2} \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено

Используя критерий Коши, докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

Верны неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(2k-1)^2} < \sum_{m=2n+1}^{2(n+p)-1} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=2n+1}^{2(n+p)-1} \frac{1}{m(m-1)} =$$

$$= \sum_{m=2n+1}^{2(n+p)-1} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2(n+p)-3} - \frac{1}{2(n+p)-2}\right) + \left(\frac{1}{2(n+p)-2} - \frac{1}{2(n+p)-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+p)-1} < \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

если $n \geq N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ сходится (по критерию Коши).

Задача 1.10 (№2566 [1]). Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и $a_n \le c_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ также сходится.

Р е ш е н и е: Так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то выполнены неравенства $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ и $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$ (критерий Коши).

Так как $a_n \le c_n \le b_n$, то верны неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \le \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k.$$

Следовательно, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| \le \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|, \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|\right\} < \varepsilon$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится (по критерию Коши).

Задача 1.11 (№2569 [1]). Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

Р е ш е н и е:

а) Так как $u_n = |a_n b_n| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = u_n^{'}$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ (по признаку сравнения).

б) Так как $u_n = (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 \le a_n^2 + 2|a_n b_n| + b_n^2 = u_n^{'}$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ (по признаку сравнения).

в) Пусть $u_n = |a_n b_n|$, где $b_n = \frac{1}{n}$ (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится). Тогда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ сходится (см. пункт а)).

Задача 1.12 (№2575.1 [1]). Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

Р е ш е н и е: Верны неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{k}\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p}\right| =$$
$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \cos(n+2)x\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \ldots\right.$$

$$+\cos(n+p)x\left(-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p}\right)-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\Bigg|\leq$$
$$\leq\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}\right|+$$
$$+\left|\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+$$
$$+\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)+\frac{1}{n+p}=\frac{2}{n+1}<\varepsilon,$$

если $n\geq N(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$.

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ сходится (по критерию Коши).

Задача 1.13 (№2576 [1]). Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е: $u_n=\frac{1}{n}\to\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ – необходимое условие сходимости выполнено

Проверяем выполнение отрицания критерия Коши:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}=$$
$$=\{\text{выберем } p=n\}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0=\frac{1}{4}.$$

О т в е т: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (по критерию Коши).

1.1.2 Занятие 2

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – числовой ряд с положительными членами ($p_k > 0$)

Теорема (признак Даламбера). Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорема (признак Коши). Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорема (интегральный признак Коши-Маклорена). Пусть функция $f(x) \geq 0$ и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq m$, где m – фиксированное целое число.

Тогда числовой ряд $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots$ сходится в том и только в том случае, когда существует предел при $n \to \infty$ последовательности $a_n = \int_m^n f(x)dx$.

Теорема (признак Гаусса). Если $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $|\Theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то при $\lambda > 1$ ряд сходится, при $\lambda < 1$ ряд расходится и при $\lambda = 1$ ряд сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leq 1$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Если $p_n = O^*\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, то при $\alpha > 1$ ряд сходится и при $\alpha \leq 1$ расходится .

- -

Задача 2.1 (№2581 [1]). Исследовать сходимость ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Р е ш е н и е:

а)

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n} = \left\{\text{ф-ла Стирлинга: } n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{2\pi n}\, 2^n \exp\left(-n + \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty$$

– необходимое условие сходимости выполнено.

$u_n > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$$

– числовой ряд сходится.

б)

$$u_n=\frac{3^n n!}{n^n}=\left\{\text{ф-ла Стирлинга: } n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n\exp\left(-n+\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}=$$

$$=\sqrt{2\pi n}\,3^n\,\exp\left(-n+\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\;\longrightarrow\infty\text{ при }n\to\infty$$

– нарушено необходимое условие сходимости. Ряд расходится.

О т в е т:

а) Ряд сходится (по признаку Даламбера);

б) Ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

- -

Задача 2.2 (№2586 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}}=0$$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$u_n=\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}>0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{(2/n)}}{2+\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$ – ряд сходится.

О т в е т: Числовой ряд сходится (по признаку Коши).

- -

Задача 2.3. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ (\alpha - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$, если $\alpha \leq 0$. Нарушено необходимое условие сходимости и обобщенный гармонический ряд при $\alpha \leq 0$ расходится.

Пусть $\alpha > 0$. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем интегральный признак Коши-Маклорена. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}} > 0$ и монотонно убывает на полупрямой $x \geq 1 = m$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится или расходится вместе с числовой последовательностью

$$a_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \ln x\big|_{x=1}^{x=n}, & \text{если } \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\big|_{x=1}^{x=n}, & \text{если } \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right), & \text{если } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Конечный предел последовательности $\{a_n\}$ существует при $\alpha > 1$.

О т в е т: Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$ (интегральный признак Коши-Маклорена).

- -

Задача 2.4 (№2598 [1]). Пользуясь признаком Гаусса, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \ (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \neq 0$, если $p \leq 0$. Нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд при $p \leq 0$ расходится.

Пусть $p > 0$. $u_n = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Гаусса.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p}{\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p =$$

$$= \left\{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \underline{O}(x^2) \text{ при } x << 1\right\} = \{\text{при } n >> 1\} =$$

$$= 1+\frac{p}{2n+1}+\underline{O}(\frac{1}{n^2}) = 1+\frac{p}{2n}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n}}+\underline{O}(\frac{1}{n^2}) = 1+\frac{p}{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}+$$

$$+\underline{O}(\frac{1}{n^2}) = 1+\frac{p}{2n}\left(1-\frac{1}{2n}+\underline{O}(\frac{1}{n^2})\right)+\underline{O}(\frac{1}{n^2}) = 1+\frac{p}{2n}+\underline{O}(\frac{1}{n^2})$$

То есть, $\lambda = 1$ и $\mu = \dfrac{p}{2}$.

О т в е т: Ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \le 2$ (по признаку Гаусса).

- -

Задача 2.5 (№2600 [1]). Пользуясь признаком Гаусса, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}} \ (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)} e^n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\underline{O}(1)}}{n^{p-0,5}} \neq 0,$$

если $p - 0,5 \le 0$. Нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд при $p \le \dfrac{1}{2}$ расходится.

Пусть $p > \dfrac{1}{2}$. $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Гаусса.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+1}(n+1)^p}{n^n n^p (n+1)! e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \{\text{при } n >> 1\} = 1+\frac{p}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \ln a_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 =$$

$$= \left\{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underline{O}(x^3) \text{ при } x = \frac{1}{n} << 1\right\} =$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = -\frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда,

$$a_n = e^{-\frac{1}{2n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left\{e^{-x} = 1 - x + \underline{O}(x^2) \text{ при } x = \frac{1}{2n} << 1\right\} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a_n b_n = \left(1 - \frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{p - 0,5}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

То есть, $\lambda = 1$ и $\mu = p - \frac{1}{2}$.

О т в е т: Ряд сходится при $p > \frac{3}{2}$ и расходится при $p \leq \frac{3}{2}$ (по признаку Гаусса).

- -

Задача 2.6 (№2609 [1]). Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\frac{n-1}{n+1} \ \ (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\frac{n-1}{n+1} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак сравнения в предельной форме.

$$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln\frac{n-1}{n+1} = n^{p/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)^p \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) =$$
$$= n^{p/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)^p \ln\left(1 - \frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) =$$
$$= \left\{(1+x)^\beta = 1 + \beta x + \underline{O}(x^2) \text{ при } x = \frac{1}{n} << 1\right\} =$$

$$= n^{p/2}\left(1+\frac{1}{2n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)^p \ln\left(1-\frac{2}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \left\{\ln(1-x) = -x+\underline{O}(x^2) \text{ при } x=\frac{2}{n} << 1\right\} =$$

$$= n^{p/2}\left(\frac{1}{2^p n^p}+\ldots\right)\left(-\frac{2}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{-n^{p/2}}{2^{p-1}n^{p+1}}+\ldots = O^*\left(\frac{1}{n^{p/2+1}}\right)$$

То есть, $\alpha = \frac{p}{2}+1$.

О т в е т: Ряд сходится при $p > 0$ и расходится при $p \le 0$ (по признаку сравнения в предельной форме).

- -

Задача 2.7 (№2583 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3\,(10^3+1)\,\ldots\,(10^3+n-1)}{(2n-1)!!}.$$

Р е ш е н и е:

$p_n = \dfrac{10^3\,(10^3+1)\,\ldots\,(10^3+n-1)}{(2n-1)!!} > 0$ – ряд с положительными членами.

Используем признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^3+n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$ – числовой ряд сходится.

О т в е т: Ряд сходится (по признаку Даламбера).

- -

Задача 2.8 (№2589(в) [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \{m = n-1\} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+2}\right)^{m} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1+2/m)^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left((1+2/m)^{m/2}\right)^2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

– ряд сходится.

О т в е т: Числовой ряд сходится (по признаку Коши).

- -

Задача 2.9 (№2597(б) [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}.$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$u_n = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n} > 0$ – ряд с положительными членами.

$$\frac{1+\cos n}{2+\cos n} = \{x = \cos n,\ -1 \le x \le 1\} = \frac{1+x}{2+x} = f(x) \ \to$$
$$\to f'(x) = \frac{1}{(2+x)^2} > 0 \ \to 0 \le f(x) \le \frac{2}{3}$$

Следовательно, $u_n = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n} = u_n'$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ сходится, так как

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n'} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1$ (по признаку Коши).

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится (по признаку сравнения).

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ сходится (по признаку сравнения).

- -

Задача 2.10 (№2602 [1]). Пользуясь признаком Гаусса, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)} \ \ (q > 0,\ p - \text{параметры}).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Гаусса.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \frac{n+1+q}{n+1} = \{\text{при } n >> 1\} =$$
$$= \left(1+\frac{p}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{q}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\frac{p+q}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

То есть, $\lambda = 1$ и $\mu = p+q$.

О т в е т: Ряд сходится при $p+q>1$ и расходится при $p+q \le 1$ (по признаку Гаусса).

- -

Задача 2.11 (№2608 [1]). Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n} \quad (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n} \neq 0$, если $p<0$. Нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд при $p<0$ расходится.

Пусть $p \geqslant 0$. $a_n = \dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак сравнения в предельной форме.

$$a_n = \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n} = \left\{\sin x = x+\underline{O}(x^3) \text{ при } x=\frac{\pi}{n} << 1\right\} =$$
$$= \frac{1}{n^p}\left(\frac{\pi}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

То есть, $\alpha = p+1$.

О т в е т: Ряд сходится при $p>0$ и расходится при $p \le 0$ (по признаку сравнения в предельной форме).

- -

Задача 2.12 (№2612 [1]). Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p \quad (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак сравнения в предельной форме.

$$a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p = e^p \left(1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p =$$

$$= \left\{\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ (см. Задача 2.5)}\right\} =$$

$$= e^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^p = \frac{e^p}{2^p n^p} + \ldots = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

То есть, $\alpha = p$.

О т в е т: Ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ (по признаку сравнения в предельной форме).

- -

1.1.3 Занятие 3

Задача 3.1 (№2587 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{(1+1/n^2)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\left((1+1/n^2)^{n^2}\right)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

– нарушено необходимое условие сходимости. Ряд расходится.

О т в е т: Ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Задача 3.2 (№2619(а) [1]). Пользуясь интегральным признаком Коши-Маклорена, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \ \ (p - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено при любом p.

$u_n = \dfrac{1}{n \ln^p n} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем интегральный признак Коши-Маклорена. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^p x} > 0$ монотонно убывает на полупрямой $x \geq 2 = m$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$ сходится или расходится вместе с числовой последовательностью

$$a_n = \int_2^n f(x)dx = \int_2^n \frac{dx}{x \ln^p x} = \left\{ y = \ln x, \ dy = \frac{dx}{x} \right\} =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dy}{y^p} = \begin{cases} \ln y \big|_{y=\ln 2}^{y=\ln n}, & \text{если } p = 1; \\ \dfrac{1}{1-p}\, y^{1-\alpha}\big|_{y=\ln 2}^{y=\ln n}, & \text{если } p \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \ln\ln n - \ln\ln 2, & \text{если } p = 1; \\ \dfrac{1}{1-p}\left((\ln n)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}\right), & \text{если } p \neq 1. \end{cases}$$

Конечный предел последовательности $\{a_n\}$ существует при $p > 1$.

О т в е т: Ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ (по интегральному признаку Коши-Маклорена).

- -

Задача 3.3 (№2626 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha} \ (\alpha - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{\alpha+0,5}\left(\sqrt{1+2/n} + \sqrt{1-2/n}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha + 0,5 > 0; \\ \neq 0, & \text{при } \alpha + 0,5 \leq 0. \end{cases}$$

То есть, при $\alpha \leq -\dfrac{1}{2}$ нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд расходится.

Пусть $\alpha > -\dfrac{1}{2}$. Используем признак сравнения в предельной форме.

$$u_n = \frac{4}{n^{\alpha+0,5}\left(\sqrt{1+2/n} + \sqrt{1-2/n}\right)} =$$

$$= \left\{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underline{O}(x^2) \text{ при } |x| << 1\right\} =$$

$$= \frac{4}{n^{\alpha+0,5}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + 1 - \dfrac{1}{n} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{4}{n^{\alpha+0,5}\left(2 + \underline{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)} = O^*\left(\frac{1}{n^{\alpha+0,5}}\right) \text{ при } n >> 1$$

О т в е т: Ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$ и расходится при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ (по признаку сравнения в предельной форме).

- -

Задача 3.4 (№2642 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right) \quad (\alpha - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \neq 0$ при $\alpha \leq 0$. При $\alpha \leq 0$ нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд расходится.

Пусть $\alpha > 0$.

$a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n}{n^{\alpha}}$

Тогда $b_n = \dfrac{(n-1)\ln 2}{n^{\alpha}} < a_n < \dfrac{n \ln n}{n^{\alpha}} = c_n$.

Так как $b_n = \dfrac{(n-1)\ln 2}{n^{\alpha}} = \left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha}} \right) \ln 2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится при $\alpha - 1 \leq 1$ (по признаку сравнения в предельной форме). Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $\alpha \leq 2$ расходится (по признаку сравнения).

Так как $c_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}} < \dfrac{n^{\varepsilon}}{n^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}$, $\forall \varepsilon > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится при $\alpha - 1 - \varepsilon > 1$ $(\alpha > 2 + \varepsilon)$ (по признаку сравнения). Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $\alpha > 2$ сходится (по признаку сравнения).

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leq 2$ (по признаку сравнения).

- -

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) – знакопеременный числовой ряд $(u_n \leqslant 0$ или $u_n \geqslant 0)$.

Сопоставим ряду (1) знакопостоянный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (2).

Пусть ряд (2) сходится. Тогда (критерий Коши): для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполнено неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$.

Верны неравенства $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$. То есть, выполнены условия критерия Коши для ряда (1). Следовательно, сходимость ряда (2) гарантирует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если ряд (1) сходится, а ряд из модулей (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Определение. Будем называть ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходящимся, если сходится ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Теорема (Коши). Если ряд (1) сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из ряда (1) посредством произвольной перестановки членов ряда (1), также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и ряд (1).

Теорема (Римана). Если ряд (1) сходится условно, то для любого числа L можно так переставить члены ряда (1), что преобразованный ряд будет сходиться к числу L.

Определение. Знакопеременный ряд вида

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n-1} p_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n,$$

где $p_n > 0$, называется знакочередующимся рядом (рядом Лейбница).

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда, взятые по модулю, образуют невозрастающую и бесконечно малую последовательность, то этот знакочередующийся ряд сходится.

- -

Задача 3.5 (№2660 [1]). Доказать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots \ (1).$$

Найти его сумму S.

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и сходится (по признаку Коши). Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно. Тогда (по теореме Коши), верны преобразования

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots = \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \ldots\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\right) -$$
$$- \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8^k} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{7}.$$

О т в е т: Ряд сходится абсолютно и его сумма $S = \dfrac{10}{7}$.

Задача 3.6 (№2661 [1]). Доказать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad (1)$$

и найти его сумму S.

У к а з а н и е. Использовать формулу $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, где $C - const$ и $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (2) и расходится (гармонический ряд).

Ряд (1) знакочередующийся $\left(p_n = \dfrac{1}{n}\right)$. Используем признак Лейбница:

1. $p_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = p_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница). Так как, ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Вычислим сумму ряда (1) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$.

S_n– элемент последовательности частичных сумм ряда (1).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, & n = 2l(\text{четное}); \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2l-1(\text{нечетное}) \end{cases} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}, & n = 2l; \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2l-1 \end{cases} -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2l; \\ \dfrac{1}{n-1}, & n = 2l-1 \end{cases} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} -$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\begin{cases}\frac{1}{n}, & n=2l;\\ \frac{1}{n-1}, & n=2l-1\end{cases}\right)=C+\ln n+\varepsilon_n-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\begin{cases}\frac{2}{n}, & n=2l;\\ \frac{2}{n-1}, & n=2l-1\end{cases}\right)=C+\ln n+\varepsilon_n-$$

$$-\left(C+\varepsilon_n^{'}+\begin{cases}\ln\frac{n}{2}, & n=2l;\\ \ln\frac{n-1}{2}, & n=2l-1\end{cases}\right)=\varepsilon_n^{''}+$$

$$+\begin{cases}\ln 2, & n=2l;\\ \ln\frac{2n}{n-1}, & n=2l-1\end{cases}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln 2=S$$

О т в е т: Ряд сходится условно и его сумма $S=\ln 2$.

Задача 3.7 (№2664 [1]). Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}\ (1).$$

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (2) и сходится (по признаку Коши).

О т в е т: Ряд сходится абсолютно.

Задача 3.8 (№2629 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right).$$

Р е ш е н и е:

Используем признак сравнения в предельной форме.

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\{\text{ при } n>>1\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2n}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + \ldots\right) = \frac{1}{4n^{3/2}} + \ldots = \underline{O}^*\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

То есть, $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ – ряд сходится.

О т в е т: Ряд сходится (по признаку сравнения в предельной форме).

Задача 3.9 (№2630 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} \quad (\alpha - \text{параметр}).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha} \neq 0$ при $\alpha \leq 0$. То есть, при $\alpha \leq 0$ нарушено необходимое условие сходимости и заданный ряд расходится.

Пусть $\alpha > 0$.

$a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha} = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n}{n^\alpha}$

Тогда $b_n = \dfrac{(n-1)\ln 2}{n^\alpha} < a_n < \dfrac{n \ln n}{n^\alpha} = c_n$.

Так как $b_n = \dfrac{(n-1)\ln 2}{n^\alpha} = \left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)\ln 2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится при $\alpha - 1 \leq 1$ (по признаку сравнения в предельной форме). Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $\alpha \leq 2$ расходится (по признаку сравнения).

Так как $c_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}} < \dfrac{n^\varepsilon}{n^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}$, $\forall \varepsilon > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится при $\alpha - 1 - \varepsilon > 1$ $(\alpha > 2 + \varepsilon)$ (по признаку сравнения). Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $\alpha > 2$ сходится (по признаку сравнения).

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leq 2$ (по признаку сравнения).

Задача 3.10 (№2632 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Р е ш е н и е:

Так как $e^{\sqrt{n}} > n^4$ при $n \geq 900$, то $u_n = \dfrac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} < \dfrac{1}{n^2} = u_n'$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ сходится (по признаку сравнения).

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ сходится (по признаку сравнения).

- -

Задача 3.11 (№2635 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

Р е ш е н и е:

Так как, при $\varepsilon > 0$ предел $\lim\limits_{x \to 0} x^{\varepsilon} \ln^2 x = 0$, то $\ln^2 x < \frac{1}{x^{\varepsilon}}$.

Пусть $x = \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \underline{O} \left(\frac{1}{n^3} \right)$. Тогда, верно неравенство $\ln^2 \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{1/n^{\varepsilon}} = n^{\varepsilon}$. Следовательно, $u_n = \dfrac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} > \dfrac{1}{n^{\varepsilon}} = u_n'$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$ расходится при $0 < \varepsilon < 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}$ расходится (по признаку сравнения).

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}$ расходится (по признаку сравнения).

- -

Задача 3.12 (№2639 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} > 0$ – ряд с положительными членами. Используем признак Коши:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\left(\frac{\ln n}{n} \right)}}{\ln n} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\left(\frac{\ln^2 n}{n} \right)}}{\ln n} = 0 < 1$$ – ряд сходится.

О т в е т: Числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ сходится (по признаку Коши).

Задача 3.13 (№2657 [1]). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если:

1. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ – сходится, где $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots)$;
3. $\max_i(p_{i+1} - p_i) = m$.

Р е ш е н и е:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i = \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

$$|S_n - S| = \left|S_n - \bar{S}_n + \bar{S}_n - S\right| \leqslant \left|S_n - \bar{S}_n\right| + \left|\bar{S}_n - S\right| <$$
$$< \left|S_n - \bar{S}_n\right| + \frac{\varepsilon}{2} = \left|\sum_{k=n+1}^{p_{n+1}-1} a_k\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p_{n+1}-1} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=p_l}^{p_{n+1}-1} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} <$$
$$< \{p_{n+1} - p_l = qm\} < \max_{k\in[p_l,\, p_{n+1}]} |a_k| \cdot qm + \frac{\varepsilon}{2} <$$
$$< \left\{ \max_{k\in[p_l,\, p_{n+1}]} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2qm} \right\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

О т в е т: Ряд сходится (по критерию Коши).

Задача 3.14 (№2659 [1]). Доказать сходимость ряда $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$ (1). Найти его сумму S.

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ и сходится (по признаку Коши). Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно. Тогда (по теореме Коши), верны преобразования

$$\frac{3}{2}S = S + \frac{1}{2}S = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + \dots\right) =$$
$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

О т в е т: Ряд сходится абсолютно и его сумма $S = \frac{2}{9}$.

- -

Задача 3.15 (№2665(а) [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ (2) и сходится (по признаку Коши).

О т в е т: Ряд сходится абсолютно.

- -

1.1.4 Занятие 4

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k$ – сходящийся ряд Лейбница.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = S_n + R_n,$$

где $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k$– остаток ряда Лейбница.

Верна оценка $|R_n| \leqslant p_{n+1}$.

Теорема (признак Дирихле-Абеля). Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$. Этот ряд сходится, если выполнены следующие условия:

1. Последовательность $\{v_k\}$ является невозрастающей и бесконечно малой;
2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм.

Задача 4.1 (№2673(а) [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$– не существует.

О т в е т: Ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Задача 4.2 (№2675 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ (p - \text{параметр})\ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p} \neq 0$ при $p \leqslant 0$.

При $p \leqslant 0$ ряд (1) расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$– обобщенный гармонический ряд. Сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

При $p > 1$ ряд (1) сходится абсолютно.

Пусть $0 < p \leqslant 1$. Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница: $b_n = \dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{(n+1)^p} = b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$. Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

При $0 < p \leqslant 1$ ряд (1) сходится условно.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

- -

Задача 4.3 (№2703(а) [1]). Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} \quad (1)$$

следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$.

Р е ш е н и е:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 0-$ необходимое условие сходимости выполнено.

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}-$ расходится (по признаку сравнения в предельной форме: при $n >> 1$ $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$).

Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница: $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$. Следовательно, ряд (1) сходится условно и существует конечная сумма

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Определим n, при котором $|S - S_n| < 10^{-6} = \varepsilon$, где $S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^2+1}}$.

Верно неравенство $|S - S_n| < b_{n+1}$. Потребуем выполнения неравенства $b_{n+1} < \varepsilon = 10^{-6}$, которое решим относительно n :

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < 10^{-6} \to 10^{12} < (n+1)^2 + 1 \to n > \sqrt{10^{12}-1} - 1 \approx 10^6.$$

О т в е т: Частичная сумма S_n, содержащая 10^6 слагаемых, приближает S с заданной точностью ε.

- -

Задача 4.4 (№2665(б) [1]). Исследовать сходимость знакопеременного ряда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}-\dots$ (1).

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости для ряда (1) выполнено. Ряд (1) является знакопеременным рядом. Ему соответствует ряд из модулей элементов ряда (1) вида $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, являющийся расходящимся рядом (гармонический ряд).

Исследуем ряд (1) на условную сходимость. Это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot v_n$, где $v_n=\dfrac{1}{n}$, а u_n равно $+1$ для нечетных троек слагаемых и равно -1 для четных троек слагаемых.

Используем признак Дирихле-Абеля:

1. $v_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=v_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}v_n=0;$

2. $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ |S_n|\leqslant 3.$

О т в е т: Ряд (1) сходится условно (по признаку Дирихле-Абеля) .

- -

Задача 4.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{\sqrt[10]{k}}\ (x\neq 2\pi m-\text{параметр})\ (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости для ряда (1) выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\cos(kx)|}{\sqrt[10]{k}}\ (2).$$

$$|U_k|=\frac{|\cos(kx)|}{\sqrt[10]{k}}\geqslant\frac{\cos^2(kx)}{\sqrt[10]{k}}=\frac{1+\cos(2kx)}{2\sqrt[10]{k}}=\frac{1}{2\sqrt[10]{k}}+\frac{\cos(2kx)}{2\sqrt[10]{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|U_k|\geqslant\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[10]{k}}}_{\to\infty\text{ при }n\to\infty}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx_1)}{\sqrt[10]{k}}}_{\text{частичная сумма ряда (1)}},\ \text{где } x_1=2x$$

Если последовательность частичных сумм ряда (1) имеет конечный предел (ряд (1) сходится), то последовательность частичных сумм ряда (2) не

имеет конечного предела, то есть ряд из модулей является расходящимся. Следовательно, ряд (1) если сходится, то сходится условно.

Используем признак Дирихле-Абеля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{\sqrt[10]{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\cos(kx)}_{=u_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[10]{k}}}_{=v_k}$$

1. $v_k = \dfrac{1}{\sqrt[10]{k}} > \dfrac{1}{\sqrt[10]{k+1}} = v_{k+1},\ \lim_{k\to\infty} v_k = 0;$

2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{x}{2}\cos(kx) = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Дирихле-Абеля).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

Задача 4.6 (№2667 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} k}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости для ряда (1) выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} k}{k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right| \quad (2).$$

$$\frac{\ln^{100} k}{k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right| \geqslant \frac{\ln^{100} k}{k} \sin^2\left(\frac{\pi k}{4}\right) = \frac{\ln^{100} k}{2k} - \frac{\ln^{100} k}{2k} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{100} k}{k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{100} k}{k}}_{\to\infty \text{ при } n\to\infty} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{100} k}{k} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}_{\text{при } n\to\infty \text{ сходится условно}}$$

Следовательно, последовательность частичных сумм ряда (2) не имеет конечного предела, то есть ряд из модулей является расходящимся. Ряд (1) если сходится, то сходится условно.

Используем признак Дирихле-Абеля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} k}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln^{100} k}{k}}_{=v_k} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}_{=u_k}$$

1. $v_k = \dfrac{\ln^{100} k}{k} > \dfrac{\ln^{100}(k+1)}{k+1} = v_{k+1},\ \lim_{k\to\infty} v_k = 0;$

2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2} \sin(kx)\big|_{x=\frac{\pi}{4}} =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(-\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\left(-\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \left(-\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left. \frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right|_{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \left. \frac{\left|-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \left. \frac{\left|\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|+\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|}$$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Дирихле-Абеля).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

Задача 4.7 (№2669 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}\ (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}\ (2).$$

Ряд (2) расходится, так как $\dfrac{\sqrt{n}}{n+100} = O^*\left(\dfrac{1}{n^{0,5}}\right)$ при $n >> 1$ (признак сравнения в предельной форме).

Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница:

1. $p_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+100} > \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+101} = p_{n+1}$ при $n > 100$, так как для функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2+100}$ производная $f'(x) = \ldots = \dfrac{100-x^2}{(x^2+100)^2} < 0$ при $x > 10$;

2. $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+100} = 0.$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

- -

Задача 4.8 (№2676 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}} \ (p - \text{параметр}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}, \ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}} \neq 0$ при $p \leqslant 0$.

При $p \leqslant 0$ ряд (1) расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1/n}}.$$

Сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$

$$\left(\frac{1}{n^{p+1/n}} = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ при } n >> 1 \text{ (пр. сравнения в предельной форме)} \right).$$

При $p > 1$ ряд (1) сходится абсолютно.

Пусть $0 < p \leqslant 1$. Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница: $b_n = \dfrac{1}{n^{p+1/n}} > \dfrac{1}{(n+1)^{p+1/(n+1)}} = b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1/n}} = 0$. Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

При $0 < p \leqslant 1$ ряд (1) сходится условно.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

- -

Задача 4.9 (№2679 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; (x - \text{параметр, не равный целому отрицательному числу}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов ряда (1) имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x+n}$ и расходится, так как $\dfrac{1}{x+n} = O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n >> 1$ (признак сравнения в предельной форме).

Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница: $b_n = \dfrac{1}{x+n} > \dfrac{1}{x+n+1} = b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x+n} = 0$. Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

- -

Задача 4.10 (№2697 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p} \quad \text{и} \quad \frac{\sin(nx)}{n^p} \ (x, p - \text{параметры } (0 < x < \pi)).$$

Р е ш е н и е:

При $p \leqslant 0$ нарушено необходимое условие сходимости (ряды расходятся).

Пусть $p > 0$. Ряды знакопеременные. Ряды из модулей элементов исходных рядов имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^p} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^p}.$$

Так как,

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p} \ , \quad \frac{|\sin(nx)|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p} \ \text{ и можарантный ряд } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$, то при $p > 1$ исходные ряды сходятся абсолютно (по признаку сравнения).

Пусть $0 < p \leqslant 1$.

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^p} \geqslant \frac{\cos^2(nx)}{n^p} = \frac{1+\cos(2nx)}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos(2nx)}{2n^p}$$

$$\frac{|\sin(nx)|}{n^p} \geqslant \frac{\sin^2(nx)}{n^p} = \frac{1-\cos(2nx)}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos(2nx)}{2n^p}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(kx)|}{k^p} \geqslant \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}_{\to\infty \text{ при } n\to\infty} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx_1)}{k^p}}_{\text{частичная сумма исходного ряда}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|\sin(kx)|}{k^p}\geqslant\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}}_{\to\infty\text{ при }n\to\infty}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx_1)}{k^p}}_{\text{частичная сумма исходного ряда}}\qquad\text{где } x_1=2x$$

Если последовательности частичных сумм исходных рядов имеют конечный предел (исходные ряды сходятся), то последовательность частичных сумм рядов из модулей не имеют конечного предела, то есть ряды из модулей являются расходящимися. Следовательно, исходные ряды если сходятся, то сходятся условно.

Используем признак Дирихле-Абеля:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\cos(kx)}_{=u_k}\cdot\underbrace{\frac{1}{k^p}}_{=v_k}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sin(kx)}_{=u_k}\cdot\underbrace{\frac{1}{k^p}}_{=v_k}$$

1. $v_k=\dfrac{1}{k^p}>\dfrac{1}{(k+1)^p}=v_{k+1},\ \lim_{k\to\infty}v_k=0;$

2. $$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cos(kx)=\{\text{см. Задача 4.5}\}=$$
$$=\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\sin(kx)=\{\text{см. Задача 4.6}\}=$$
$$=\frac{-\cos\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)+\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}$$

Следовательно, исходные ряды сходятся (по признаку Дирихле-Абеля).

При $0 < p \leqslant 1$ исходные ряды сходятся условно.

О т в е т: Ряды сходятся абсолютно при $p > 1$, сходятся условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходятся при $p \leqslant 0$.

- -

Задача 4.11 (№2704 [1]). Доказать, что если члены ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \quad (1)$$

переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет $\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p}{q}$.

Р е ш е н и е:

Ряд (1) сходится условно и его сумма равна $\ln 2$ (см. Задача 3.6).

Пусть S_m есть частичная сумма модифицированного ряда:

$$S_m = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2q}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2p+1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 2q}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{(m-1)\cdot 2p+1} + \ldots + \frac{1}{m\cdot 2p-1}\right) - \left(\frac{1}{(m-1)\cdot 2q+2} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{m\cdot 2q}\right) = \{\text{пусть } p > q\} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{m\cdot 2q}\right)}_{=A_1} +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{m\cdot 2q+1} + \ldots + \frac{1}{m\cdot 2p-1}\right)}_{=A_2 - \text{сумма дробей с нечетными знаменателями}} =$$
$$= \{\text{в } A_2 \text{ добавим и вычтем дроби с четными знаменателями}\} =$$
$$= A_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{m\cdot 2q+1} + \frac{1}{m\cdot 2q+2} + \ldots + \frac{1}{m\cdot 2p-1}\right)}_{=A_3} -$$
$$- \underbrace{\left(\frac{1}{m\cdot 2q+2} + \frac{1}{m\cdot 2q+4} + \ldots + \frac{1}{m\cdot 2p-2}\right)}_{=A_4} = A_1 + A_3 + A_4 =$$
$$= \left\{A_3 = \left(\frac{1}{m\cdot 2q+1} + \frac{1}{m\cdot 2q+2} + \ldots + \frac{1}{m\cdot 2p-1}\right) =\right.$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m \cdot 2p - 1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m \cdot 2q}\right) =$$
$$= C + \ln(m \cdot 2p - 1) - C - \ln(m \cdot 2q) + \varepsilon = \ln \frac{m \cdot 2p - 1}{m \cdot 2q} + \varepsilon,$$
$$A_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m \cdot q + 1} + \frac{1}{m \cdot q + 2} + \ldots + \frac{1}{m \cdot p - 1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m \cdot p - 1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m \cdot q}\right)\right) =$$
$$\left.= \frac{1}{2}\left(C + \ln(m \cdot p - 1) - C - \ln(m \cdot q)\right) + \varepsilon' = \frac{1}{2} \ln \frac{m \cdot p - 1}{m \cdot q} + \varepsilon' \right\} =$$
$$= A_1 + \ln \frac{m \cdot 2p - 1}{m \cdot 2q} - \frac{1}{2} \ln \frac{m \cdot p - 1}{m \cdot q} + \varepsilon'' \xrightarrow[m \to \infty]{} \ln 2 + \ln \frac{p}{q} - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} =$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$$

О т в е т: Сумма модифицированного ряда равна $\ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{p}{q}$.

- -

1.1.5 Занятие 5

Задача 5.1 (№2670 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \ (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ и расходится, так как $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = O^*\left(\frac{1}{n^{0,5}}\right)$ при $n >> 1$ (признак сравнения в предельной форме).

Ряд (1) знакочередующийся (ряд Лейбница). Используем признак Лейбница: пусть $n = 2l-$ четное. Тогда $b_{2l} = \frac{1}{\sqrt{2l}+1}$ и $b_{2l+1} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}-1}$. Сравним дроби: $\frac{1}{\sqrt{2l}+1} \vee \frac{1}{\sqrt{2l+1}-1} \ \to \sqrt{2l+1}-1 \vee \sqrt{2l}+1 \ \to 2l+1 \vee 2l+4\sqrt{2l}+3 \ \to 0 < 4\sqrt{2l}+3$. Нет монотонного стремления b_n к 0. Признак Лейбница не применим.

Пребразуем общий член ряда (1):

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1} = \\ = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм преобразованного ряда (1):

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k-1}}_{\text{при } n\to\infty \text{ сходится условно(признак Лейбница)}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}}_{\text{при } n\to\infty \text{ расходится (гармонический ряд)}}$$

Следовательно, $\{S_n\}$ конечного предела при $n \to \infty$ не имеет.

О т в е т: Ряд (1) расходится.

Задача 5.2 (№2673(б) [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости для ряда (1) выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} \left|\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)\right| \ (2).$$

$$\frac{1}{\ln^2 k}\left|\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\ln^2 k}\cos^2\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) = \frac{1}{2\ln^2 k} + \frac{1}{2\ln^2 k}\cos\left(\frac{2\pi k^2}{k+1}\right)$$

S_n – частичная сумма ряда (2).

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln^2 k}\left|\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)\right| \geqslant \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln^2 k}}_{=A} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln^2 k}\cos\left(\frac{2\pi k^2}{k+1}\right)}_{=B}$$

$\lim_{n\to\infty} A = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}$ – расходится (по признаку сравнения), так как $\frac{1}{\ln^2 k} > \frac{1}{k^{\varepsilon}}$, $0 < \varepsilon < 1$.

$\lim_{n\to\infty} B = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}\cos\left(\frac{2\pi k^2}{k+1}\right)$ – совпадает по структуре с рядом (1). Если ряд (1) сходится, то $\{S_n\}$ не имеет конечного предела (ряд (2) расходится). Следовательно, ряд (1) если сходится, то сходится условно.

Используем признак Дирихле-Абеля:

$$u_k = \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) \quad , \quad v_k = \frac{1}{\ln^2 k}$$

1. $v_k = \frac{1}{\ln^2 k} > \frac{1}{\ln^2(k+1)} = v_{k+1}$, $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$;

2. $u_k = \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi k^2 - \pi + \pi}{k+1}\right) = \cos\left(\pi(k-1) + \frac{\pi}{k+1}\right) =$

$= (-1)^{k-1}\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) = (-1)^{k-1}\left(1 - \frac{\pi}{2k^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)$ при

$k \geqslant k_0 \gg 1$ (конечное число (k_0) первых слагаемых ряда на сходимость ряда не влияет)

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=k_0+1}^{n}\left((-1)^{k-1} + \frac{(-1)^k\pi}{2k^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\left|\sum_{k=k_0+1}^{n}(-1)^{k-1}\right|}_{\leqslant 1} + \underbrace{\left|\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{(-1)^k\pi}{2k^2}\right|}_{\text{при } n\to\infty \text{ сходится}} + \underbrace{\left|\sum_{k=k_0+1}^{n}\underline{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right|}_{\text{при } n\to\infty \text{ сходится абсолютно}} < M$$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Дирихле-Абеля).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

- -

Задача 5.3 (№2677 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\ (p-\text{параметр})\ (1).$$

Р е ш е н и е:

Слагаемое $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ определено при $p > 0$.

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k^p}\right)\right|\ (2).$$

$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k^p}\right)\right| = \left\{\ln(1+x) \underset{x\ll 1}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \ldots\ ,\right.$$

$$\left. x = \frac{(-1)^k}{k^p} \text{ при } k \gg 1\right\} = \left|\frac{(-1)^k}{k^p} - \frac{1}{2k^{2p}} + \frac{(-1)^k}{3k^{3p}} + \ldots\right| = O^*\left(\frac{1}{k^p}\right) -$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$ (признак сравнения в предельной форме).

То есть, при $p > 1$ ряд (1) сходится абсолютно.

Пусть $0 < p \leqslant 1$.

$$u_k \underset{k\geqslant k_0\gg 1}{=} \frac{(-1)^k}{k^p} - \frac{1}{2k^{2p}} + \frac{(-1)^k}{3k^{3p}} - \frac{1}{4k^{4p}} + \frac{(-1)^k}{5k^{5p}} - \frac{1}{6k^{6p}} + \bar{o}\left(\frac{1}{k^{6p}}\right)$$

S_n – частичная сумма ряда (1).

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{k_0} u_k + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^p}}_{=C_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k^{2p}}}_{=C_2} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{3p}}}_{=C_3} -$$

$$- \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k^{4p}}}_{=C_4} + \frac{1}{5}\underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{5p}}}_{=C_5} - \underbrace{\frac{1}{6}\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k^{6p}}}_{=C_6} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} \bar{o}\left(\frac{1}{k^{6p}}\right)}_{=C_7}$$

Слагаемые $C_1,\ C_3,\ C_5$ при $n \to \infty$ образуют ряды, сходящиеся при $p > 0$ (признак Лейбница). Слагаемые $C_2,\ C_4,\ C_6,\ C_7$ при $n \to \infty$ образуют обобщенные гармонические ряды, сходящиеся, соответственно, при

$2p > 1 \ \to \ \left(p > \frac{1}{2}\right),\ 4p > 1 \ \to \ \left(p > \frac{1}{4}\right),\ 6p > 1 \ \to \ \left(p > \frac{1}{6}\right).$

То есть, при $p > \frac{1}{2}$ последовательность $\{S_n\}$ имеет предел,

а при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ не имеет предела.

Следовательно, при $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ ряд (1) сходится условно.

О т в е т: Ряд (1) при $p > 1$ сходится абсолютно, при $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ сходится условно и при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ расходится.

- -

Задача 5.4 (№2683 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \ \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \ (2).$$

$$|u_n| = \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \underset{n\gg 1}{=} O^*\left(\frac{1}{n^{0,01}}\right)$$

Ряд (2) расходится (признак сравнения в предельной форме).

Ряд (1) знакочередующийся. Используем для исследования сходимости ряда (1) признак Лейбница:

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}} = 0$;

2. $\dfrac{n-1}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ монотонно стремится к нулю при $n > 200$, так как для функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{1}{\sqrt[100]{x}}$ производная

$$f'(x) = \ldots = \frac{0,01}{(x+1)^2 x^{1,01}}\left(200x - x^2 + 1\right) < 0$$

при $x > 200$.

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

- -

Задача 5.5 (№2671 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right) \ (m - \text{параметр}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\dfrac{m^2}{n^2}}\right) \to \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi n\sqrt{1+\dfrac{m^2}{n^2}}\right) = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}\right)\right| \quad (2).$$

$$u_n = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}\right) \underset{n>n_0\gg m}{=} \sin\left(\pi n\left(1+\frac{m^2}{2n^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\sin(\pi n)}_{=0}\cos\left(\frac{\pi m^2}{2n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi m^2}{2n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}_{=\sin x = x+\ldots} =$$

$$= (-1)^n\frac{\pi m^2}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$|u_n| \underset{n>>1}{=} O^*\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ряд (2) расходится (признак сравнения в предельной форме).

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ – частичная сумма ряда (1).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} (-1)^k \frac{\pi m^2}{2k}}_{=C_1} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} \underline{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)}_{=C_2}$$

Слагаемое C_1 при $n \to \infty$ образует сходящийся ряд (признак Лейбница). Слагаемое C_2 при $n \to \infty$ образует абсолютно сходящийся ряд (обобщенный гармонический ряд).

То есть, последовательность $\{S_n\}$ имеет предел.

Следовательно, ряд (1) сходится.

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

- -

Задача 5.6 (№2678 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n} \quad (x - \text{параметр}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n} \quad \to \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n} =$$

$$= \begin{cases} 0\,, & \text{при } \ 2\sin^2 x \leqslant 1; \\ \neq 0, & \text{при } \ 2\sin^2 x > 1 \end{cases}$$

Необходимое условие сходимости выполнено при $2\sin^2 x \leqslant 1 \ \to -\pi/4 + \pi k \leqslant x \leqslant \pi/4 + \pi k$.

Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n} \quad (2).$$

Ряд (2) сходится (признак Коши) при $-\pi/4 + \pi k < x < \pi/4 + \pi k$ и расходится (гармонический ряд) при $x = \pm\pi/4 + \pi k$.

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $-\pi/4 + \pi k < x < \pi/4 + \pi k$.

Пусть $x = \pm\pi/4 + \pi k$. Тогда ряд (1) имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot 1/n$ – сходится (признак Лейбница).

Следовательно, ряд (1) сходится условно при $x = \pm\pi/4 + \pi k$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $-\pi/4 + \pi k < x < \pi/4 + \pi k$, сходится условно при $x = \pm\pi/4 + \pi k$ и расходится при других значениях x.

- -

Задача 5.7 (№2680 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} \quad (p - \text{параметр}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} \quad \to \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = \begin{cases} 0\,, & \text{при } p > 0; \\ \neq 0, & \text{при } p \leqslant 0 \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $p \leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \ (2) \ \to \ |u_n| \underset{n>>1}{=} O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Ряд (2) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$ (признак сравнения в предельной форме).

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $p > 1$.

Пусть $0 < p \leqslant 1$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} \cdot \frac{(n-(-1)^n)^p}{(n-(-1)^n)^p} = (-1)^n \frac{(n-(-1)^n)^p}{(n^2-1)^p} =$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n^2-1}\right)^p = \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}\left(1 + \frac{1-(-1)^n}{n-1}\right)^p \underset{n>n_0>>1}{=}$$
$$\underset{n>n_0\gg 1}{=} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k -$ частичная сумма ряда (1).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^p}}_{=C_1} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} \underline{O}\left(\frac{1}{k^{p+1}}\right)}_{=C_2}$$

Слагаемое C_1 при $n \to \infty$ образует сходящийся ряд (признак Лейбница). Слагаемое C_2 при $n \to \infty$ образует абсолютно сходящийся ряд (обобщенный гармонический ряд).

То есть, последовательность $\{S_n\}$ имеет предел.

Следовательно, ряд (1) сходится условно при $0 < p \leqslant 1$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

- -

Задача 5.8 (№2686 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \sin\left(\frac{\pi k}{12}\right) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Необходимое условие сходимости для ряда (1) выполнено. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{12}\right)\right| \quad (2).$$

$$\frac{1}{\ln k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{12}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\ln k} \sin^2\left(\frac{\pi k}{12}\right) = \frac{1}{2\ln k} - \frac{1}{2\ln k} \cos\left(\frac{\pi k}{6}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln k} \left|\sin\left(\frac{\pi k}{12}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln k}}_{\to\infty \text{ при } n\to\infty} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln k} \cos\left(\frac{\pi k}{6}\right)}_{\text{при } n\to\infty \text{ сходится (см.Задача 4.5)}}$$

То есть, последовательность частичных сумм ряда (2) не имеет конечного предела (ряд из модулей является расходящимся). Следовательно, ряд (1) если сходится, то сходится условно.

Используем признак Дирихле-Абеля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \sin\left(\frac{\pi k}{12}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln k}}_{=v_k} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi k}{12}\right)}_{=u_k}$$

1. $v_k = \dfrac{1}{\ln k} > \dfrac{1}{\ln(k+1)} = v_{k+1}$, $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$;

2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\big|_{x=\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\sin(kx)\big|_{x=\frac{\pi}{12}} =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(-\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\left(-\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \left(-\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{12}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \frac{\left|-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{12}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{12}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{24}}$$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку Дирихле-Абеля).

О т в е т: Ряд (1) сходится условно.

Задача 5.9 (№2689 [1]). Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^p \quad (p - \text{параметр}) \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \quad \to \lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } p > 0; \\ \neq 0, & \text{при } p \leqslant 0 \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $p \leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \quad (2).$$

Ряд (2) сходится при $p > 2$ и расходится при $0 < p \leqslant 2$ (см. Задача 2.4).

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $p > 2$.

Пусть $0 < p \leqslant 2$. Ряд (1) знакочередующийся. Используем для исследования сходимости ряда (1) признак Лейбница:

1. $b_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p > \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = b_{n+1}$;

2. $0 < b_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \underset{\text{см. №9(б) ([1])}}{<} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^p \underset{n \to \infty}{\to} 0$

Ряд (1) сходится (по признаку Лейбница).

Следовательно, ряд (1) сходится условно при $0 < p \leqslant 2$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $p > 2$, сходится условно при $0 < p \leqslant 2$ и расходится при $p \leqslant 0$.

- -

1.1.6 Занятие 6

Задача 6.1 (№2615 [1]). Доказать, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ (1) сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\ln(1/a_n)/\ln n \geqslant 1+\alpha$, при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\ln(1/a_n)/\ln n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (логарифмический признак).

Р е ш е н и е:

Решим относительно a_n неравенство $\ln(1/a_n)/\ln n \geqslant 1+\alpha$:

$$\ln\frac{1}{a_n} \geqslant (1+\alpha)\ln n \;\to\; \frac{1}{a_n} \geqslant n^{1+\alpha} \;\to\; a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}} \;\to$$

$$\to \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \text{ (обобщенный гармонический ряд)}$$

Следовательно, ряд (1) сходится (по признаку сравнения).

Решим относительно a_n неравенство $\ln(1/a_n)/\ln n \leqslant 1$:

$$\ln\frac{1}{a_n} \leqslant \ln n \;\to\; \frac{1}{a_n} \leqslant n \;\to\; a_n \geqslant \frac{1}{n} \;\to$$

$$\to \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (гармонический ряд)}$$

Следовательно, ряд (1) расходится (по признаку сравнения).

Задача 6.2 (№2618 [1]). Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} \quad (n > 1).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

Используем логарифмический признак:

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{\ln\left((\ln n)^{\ln\ln n}\right)}{\ln n} = \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = \{x = \ln n\} = \frac{\ln^2 x}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0 < 1$$

Следовательно, ряд расходится (по логарифмическому признаку).

О т в е т: Ряд из a_n расходится.

- -

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (1) \ \text{ и } \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ (2) \ - \ \text{числовые ряды.}$$

Определение. Суммой (разностью) двух рядов называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \pm \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n \pm b_n)}_{=c_n}.$$

Равенство имеет неформальный смысл, если ряд (1) и ряд (2) сходятся.

Определение. Произведением двух рядов называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \cdot \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \ \text{где } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Равенство имеет неформальный смысл, если ряды (1), (2) сходятся и хотя бы один из этих рядов сходится абсолютно.

- -

Задача 6.3 (№2708 [1]). Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) .$$

Р е ш е н и е:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (признак Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ сходится абсолютно (признак Коши). Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

О т в е т: Сумма ряда равна $\frac{3}{4}$.

- -

Задача 6.4 (№2712 [1]). Показать, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n, \ \text{ где } |q| < 1 .$$

Р е ш е н и е:

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится абсолютно (признак Коши). Следовательно:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{=q^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n}_{=q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ ,$$

где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^n = q^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\, q^n \ .$

Задача 6.5 (№2713 [1]). Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \quad \text{есть ряд расходящийся .}$$

Р е ш е н и е:

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится условно (признак Лейбница).

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n}_{=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ ,$$

$$\text{где } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{k\,(n-k+1)}} = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}}$$

Используя критерий Коши, докажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i\right| = \{p=1\} = |c_{n+1}| = \left|(-1)^n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+2)}}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+2)}}}_{\text{знаменатель дроби максимален при } k=\frac{n+2}{2}} >$$

$$> (n+1)\cdot \left.\frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+2)}}\right|_{k=\frac{n+2}{2}} = 2\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= 2\cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}_{>\frac{1}{2}} > 1 = \varepsilon$$

О т в е т: Квадрат заданного условно сходящегося ряда является расходящимся рядом.

- -

Задача 6.6 (№2617 [1]). Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$a_n = \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1).$$

Р е ш е н и е:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

Используем логарифмический признак:

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln\ln\ln n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \to \frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} > 1+\alpha\ (\alpha>0).$$

Следовательно, ряд сходится (по логарифмическому признаку).

О т в е т: Ряд из a_n сходится.

- -

Задача 6.7 (№2633 [1]). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right) = 0 \ -$$ необходимое условие

сходимости выполнено.

$$u_n = \exp\left(\ln\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}\right)\right) - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right) - 1 =$$
$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n^2}\left(\frac{1}{1+1/n^2}\right)\right) - 1 \underset{n\gg 1}{=} \exp\left(\frac{\ln n}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \dots\right)\right) - 1 =$$
$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n^2} + \dots\right) - 1 = \left(1 + \frac{\ln n}{n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 =$$
$$= \frac{\ln n}{n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{0<\varepsilon<1}{<} \frac{n^\varepsilon}{n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^{2-\varepsilon}} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \text{ сходится.}$$

О т в е т: Ряд (1) сходится (по признаку сравнения).

Задача 6.8 (№2698 [1]). Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$ (1); б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}$ (2); в) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$ (3).

Р е ш е н и е:

(а): $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$$|u_n| = \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{\exp\left(\ln\left(n^{1/n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n}\exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\gg 1}{=}$$
$$\underset{n\gg 1}{=} \frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + \dots\right) = \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{2n^2} + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} |u_k| = \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln k} + \frac{1}{k}\right)}_{=C_1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\ln k}{2k^2} + \dots\right)}_{=C_2}$$

Слагаемое C_1 при $n \to \infty$ образует расходящийся ряд. Слагаемое C_2 при $n \to \infty$ образует абсолютно сходящийся ряд.

То есть, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет конечного предела. Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Для исследования исходного ряда на условную сходимость используем признак Лейбница. Так как, $\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ при $n \geqslant 3$ монотонно стремится к нулю, то ряд (1) сходится условно (по признаку Лейбница).

(б): $u_n = \dfrac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$$u_n = \frac{1}{\ln\ln n}\left(\sin n \cdot \cos(1/n) + \cos n \cdot \sin(1/n)\right) \underset{n\gg 1}{=}$$
$$\underset{n\gg 1}{=} \frac{1}{\ln\ln n}\left(\sin n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \cos n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \frac{\sin n}{\ln\ln n} + \frac{\cos n}{n\ln\ln n} +$$
$$+ \frac{\sin n}{\ln\ln n} \cdot \left(-\frac{1}{2n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\cos n}{n\ln\ln n} \cdot \left(-\frac{1}{6n^3} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n} \underset{n_0\gg 1}{=} \underbrace{\sum_{n=2}^{n_0} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}}_{=C-const} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n}}_{\text{Ряд сходится условно.}} +$$
$$+ \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\ln\ln n}}_{\text{Ряд сходится условно.}} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n} \cdot \left(-\frac{1}{2n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\text{Ряд сходится абсолютно.}} +$$
$$+ \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\ln\ln n} \cdot \left(-\frac{1}{6n^3} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}_{\text{Ряд сходится абсолютно.}}$$

Следовательно, ряд (2), как сумма рядов, сходится условно.

(в): $u_n = \dfrac{\sin n}{n + 10\sin n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ – необходимое условие

сходимости выполнено.

$$u_n = \frac{\sin n}{n} \cdot \frac{1}{1 + 10\dfrac{\sin n}{n}} \underset{n \gg 1}{=} \frac{\sin n}{n}\left(1 - 10\frac{\sin n}{n} + \underset{-}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin n}{n} - 10\frac{\sin^2 n}{n^2} + \underset{-}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n} \underset{n_0 >> 1}{=} \underbrace{\sum_{n=10}^{n_0} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}}_{=C-const} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}}_{\text{Ряд сходится условно.}} -$$

$$- 10 \cdot \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}}_{\text{Ряд сходится абсолютно.}} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \underset{-}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{Ряд сходится абсолютно.}}$$

Следовательно, ряд (3), как сумма рядов, сходится условно.
О т в е т: Ряды (1), (2), (3) сходятся условно.

Задача 6.9 (№2707 [1]). Найти сумму двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right).$$

Р е ш е н и е:
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится (признак Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ сходится абсолютно (признак Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$ сходится (признак Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ сходится абсолютно (признак Коши). Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} +$$

$$+ \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

О т в е т: Сумма ряда равна $\frac{2}{3}$.

Задача 6.10 (№2709 [1]). Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{2^n} \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ – необходимое условие сходимости выполнено.

$$|u_n| = \frac{\left|\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится. Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно.

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \begin{cases} -1/2 & , \ n = 1,\ 4,\ 7, \ldots \\ -1/2 & , \ n = 2,\ 5,\ 8, \ldots \\ 1 & , \ n = 3,\ 6,\ 9, \ldots \end{cases}$$

Тогда, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{2^n} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{1+3(n-1)}} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2+3(n-1)}} +$

$\displaystyle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} +$

$\displaystyle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = -\frac{3}{8} + \left(1 - \frac{3}{8}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = -\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = -\frac{3}{8} + \frac{5}{7 \cdot 8} = -\frac{2}{7}$.

О т в е т: Сумма ряда равна $-\frac{2}{7}$.

Задача 6.11 (№2715 [1]). Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть сходящийся ряд.

Р е ш е н и е:

Так как $a_0 = 1,\ a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$ при $n \geqslant 1$ и

$$b_0 = 1,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ при } n \geqslant 1, \text{ то}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ где } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_0 =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k-1} \cdot \left(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) -$$

$$- \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q-1} \right\} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{1} - \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - 2^n + 1 + \frac{1}{2^n} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ сходится (по признаку Коши).

- -

1.2 Бесконечные произведения

1.2.1 Занятие 7

$u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ – числовая последовательность $\{u_k\}$

Определение. $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_k \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} u_k$ – бесконечное произведение (1) .

При последовательном умножении элементов бесконечного произведения возникает новая числовая последовательность с элементами $P_1 = u_1$, $P_2 = P_1 \cdot u_2$, $P_3 = P_2 \cdot u_3$, $\ldots$, $P_n = P_{n-1} \cdot u_n$, $\ldots$.

Определение. $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ – n-ое частичное произведение бесконечного произведения (1) .

Определение. Бесконечное произведение (1) называется сходящимся, если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$.

Определение. Если $P = 0$ и ни один из сомножителей u_k не равен нулю, то бесконечное произведение (1) называется расходящимся к нулю.

Пусть все $u_k > 0$. Тогда $\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln u_k$.

Если бесконечное произведение (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} \ln P_n = \ln P = \sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k \ (2).$$

Равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \ln u_k = 0$ является необходимым условием сходимости ряда (2). Следовательно, равенство $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 1$ является необходимым условием сходимости бесконечного произведения (1).

Представим u_k в виде $u_k = 1 + \alpha_k$.

Теорема. Если все α_k одного знака, то для сходимости бесконечного произведения (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящимся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ (3).$$

Определение. Бесконечное произведение (1) называется абсолютно (условно) сходящимся, если абсолютно (условно) сходится ряд (2).

Теорема. Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости бесконечного произведения (1) является абсолютная сходимость ряда (3).

- -

Задача 7.1 (№3051 [1]). Доказать равенство

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\quad(1).$$

Р е ш е н и е:

$u_n=1-\dfrac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено.

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}u_k=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$$

О т в е т: Бесконечное произведение (1) равно $\dfrac{1}{2}$.

Задача 7.2 (№3056 [1]). Доказать равенство

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}\quad(x-\text{параметр},\ x\neq 0)\ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k=\cos\dfrac{x}{2^k}$, $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено.

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\Big(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{2^n}\Big)\cdot\sin\frac{x}{2^n}}_{=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=$$
$$=\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}_{=\frac{1}{2^2}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}}\right)\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\ldots=$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sin \dfrac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \underbrace{\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin \dfrac{x}{2^n}}}_{\to 1 \text{ при } n\to\infty} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\sin x}{x}$$

О т в е т: Бесконечное произведение (1) равно $\dfrac{\sin x}{x}$.

- -

Задача 7.3 (№3066 [1]). Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k = \dfrac{1}{k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0 \neq 1$ – нарушено необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

О т в е т: Бесконечное произведение (1) расходится к нулю.

- -

Задача 7.4 (№3068 [1]). Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^p}\right) \quad (p - \text{параметр}) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_k = \left(1 + \frac{1}{k^p}\right), \quad \lim_{k\to\infty} u_k = \begin{cases} 1 & , \text{ при } p > 0 \\ \neq 1 & , \text{ при } p \leqslant 0 \end{cases}$$

При $p \leqslant 0$ нарушено необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Пусть $p > 0$.

Для сходимости бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{k^p}\right)$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$ (обобщенный гармонический ряд).

О т в е т: Бесконечное произведение (1) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Задача 7.5 (№3053 [1]). Доказать равенство

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\ \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k=1-\dfrac{2}{k(k+1)},\ \ \lim\limits_{k\to\infty}u_k=1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено.

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)=$$
$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \frac{1}{3}$$

О т в е т: Бесконечное произведение (1) равно $\dfrac{1}{3}$.

Задача 7.6 (№3067 [1]). Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{k\,(k+2)}\ \ (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k=\dfrac{(k+1)^2}{k\,(k+2)},\ \ \lim\limits_{k\to\infty}u_k=1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено.

$$u_k=\frac{(k+1)^2}{k\,(k+2)}=\frac{(1+1/k)^2}{(1+2/k)}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{k}\right)^{-1}\underset{k>k_0\gg1}{=}$$
$$\underset{k>k_0\gg1}{=}\left(1+\frac{2}{k}+\ldots\right)\cdot\left(1-\frac{2}{k}+\ldots\right)=1-\underbrace{\frac{4}{k^2}+\ldots}_{=\alpha_k}=1-\alpha_k$$

Для сходимости бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k\,(k+2)}$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(4/k^2 + \ldots\right)$, который сходится (обобщенный гармонический ряд).

О т в е т: Бесконечное произведение (1) сходится.

- -

Задача 7.7 (№3069 [1]). Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k = 1 - \frac{1}{k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено.

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

О т в е т: Бесконечное произведение (1) расходится к нулю.

- -

Задача 7.8 (№3070 [1]). Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^p \quad (p - \text{параметр}) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$u_k = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^p$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 1$ – необходимое условие сходимости бесконечного произведения выполнено при любом p.

$$u_k = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{k^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{-1}\right)^p \underset{k>k_0\gg 1}{=}$$

$$\underset{k>k_0\gg 1}{=} \left(1 - \frac{2}{k^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2} + \ldots\right)\right)^p = \left(1 - \frac{2}{k^2} + \ldots\right)^p =$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{2p}{k^2} + \ldots}_{=\alpha_k} = 1 - \alpha_k$$

Для сходимости бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^p$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty}\alpha_k=\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(\frac{2p}{k^2}+\ldots\right)$, который сходится при любом p (обобщенный гармонический ряд).

О т в е т: Бесконечное произведение (1) сходится при любом p.

- -

1.3 Функциональные последовательности и ряды

1.3.1 Занятие 8

$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$ – функциональная последовательность

$X_n -$ область определения функции $f_n(x)\ (x \in X_n)$

$\bar{X} -$ пересечение всех X_n, $\bar{X} -$ область определения всей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$

$X_f -$ множество тех значений $x \in \bar{X}$, при каждом из которых существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Определение. $f(x) -$ предельная функция функциональной последовательности.

$X_f -$ область определения предельной функции $\left(X_f \subset \bar{X}\right)$

Определение. $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) -$ функциональный ряд.

$\bar{X} -$ область определения всех элементов функционального ряда

$X_S -$ множество тех значений $x \in \bar{X}$, при каждом из которых функциональный ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \ - \text{ сумма функционального ряда } \ (x \in X_S)$$

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ на множестве $X_f\ (x \in X_f)$ определяет функцию $f(x)$.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве $X_S\ (x \in X_S)$ определяет функцию $S(x)$.

Для исследования свойств функции $f(x)$ или $S(x)$ используется удобный для практической реализации математический аппарат. Элементом такого математического аппарата является понятие равномерной сходимости.

Определение. Функциональная последовательность

$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$ называется равномерно сходящейся на множестве X, если:

1) существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\ \ (x \in X)$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $N(\varepsilon)$ такое, что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и любом $x \in X$.

Для обозначения равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к своей предельной функции $f(x)$ на множестве X используется символ

$$f_n(x) \underset{x \in X}{\rightrightarrows} f(x).$$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве функциональная последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$.

- -

Задача 8.1 (№2717 [1]). Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Область определения слагаемых $x \neq -1$.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \to \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } x \geqslant 0; \\ \neq 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $x < 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $x \geqslant 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n \quad (2).$$

Используем признак Коши : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \ldots = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$.

Если $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1$, то ряд (2) сходится. Решаем неравенство

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \;\to\; -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \;\to\; \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} + 1 & > 0; \\ \\ \dfrac{1-x}{1+x} - 1 & < 0 \end{cases} \to$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{1+x} & > 0; \\ & \rightarrow \quad x > 0. \\ -\dfrac{2x}{1+x} & < 0 \end{cases}$$

При $x > 0$ ряд (2) сходится. Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $x > 0$.

Пусть $x = 0$.

$$u_n(0) = \frac{(-1)^n}{2n-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \; - \text{ сходится условно (признак Лейбница)}$$

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $x > 0$, сходится условно при $x = 0$ и расходится при $x < 0$.

Сумма ряда (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ определена при $x \geqslant 0$.

- -

Задача 8.2 (№2722 [1]). Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p} \quad (p - \text{параметр}) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Область определения слагаемых $x \neq -k, \;\; k \in Z$.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^p} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } p > 0; \\ \neq 0, & \text{при } p \leqslant 0 \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $p \leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $p > 0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^p} \quad (2).$$

Ряд (2) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$ (признак сравнения в предельной форме).

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $p > 1$.

Пусть $0 < p \leqslant 1$. Ряд (1) знакочередующийся и сходится (признак Лейбница). Следовательно, ряд (1) сходится условно при $0 < p \leqslant 1$.

О т в е т: Ряд (1) в случае $x \neq -k$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

Сумма ряда (1) определена при $x \neq -k$ и $p > 0$.

- -

Задача 8.3 (№2741 [1]). Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X функциональной последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} r_n(x) \right) = 0, \text{ где } r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| .$$

Р е ш е н и е:

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} r_n(x) \right) = 0$. Это означает, что существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Так как $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in X} |f(x) - f_n(x)|$, то выполнены все условия из определения равномерной сходимости функциональной последовательности.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f_n(x) \underset{x\in X}{\rightrightarrows} f(x)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого

$n > N(\varepsilon)$ и любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$.

Тогда и $\sup\limits_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| = \sup\limits_{x\in X} r_n(x) < \varepsilon$. То есть, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} r_n(x) \right) = 0$.

- -

А л г о р и т м исследования на равномерную сходимость:

1) Найти предельную функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$;

2) Построить отклонение $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ $(x \in X)$;

3) Найти $\rho_n = \sup\limits_{x\in X} r_n(x)$;

4) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = C$;

5) Если $C = 0$, то есть равномерная сходимость. Если $C \neq 0$, то нет равномерной сходимости.

- -

Задача 8.4 (№2746 [1]). Исследовать функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$\text{а) } f_n(x) = x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \quad \text{б) } f_n(x) = x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Р е ш е н и е:

а): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = x^n$, при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$;

3. $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0\,;\,0{,}5]} x^n = \dfrac{1}{2^n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0 \;\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{x\in[0\,;\,0{,}5]}{\rightrightarrows} 0$.

б): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } 0 \leqslant x < 1; \\ 1\,, & \text{при } x = 1; \end{cases}$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} x^n\,, & \text{при } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & \text{при } x = 1; \end{cases}$

3. $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0\,;\,1]} r_n(x) = 1$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0 \;\to$

$\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{x\in[0\,;\,1]}{\not\rightrightarrows} 0$ ($\{f_n(x)\}$ сходится неравномерно).

- -

Задача 8.5 (№2749 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Р е ш е н и е:

1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x+n} = 0$, при $0 < x < +\infty$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$, при $0 < x < +\infty$;

3. $\rho_n = \sup\limits_{0<x<+\infty} \dfrac{1}{x+n} = \dfrac{1}{n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \;\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0<x<+\infty}{\rightrightarrows} 0$.

- -

Задача 8.6 (№2755 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$\text{а)}\ \ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{б)}\ \ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Р е ш е н и е:

а): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n} = 0,$ при $-\infty < x < +\infty;$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{|\sin(nx)|}{n},$ при $-\infty < x < +\infty;$

3. $\rho_n = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty]} \dfrac{|\sin(nx)|}{n} = \dfrac{1}{n};$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \ \rightarrow$ Следовательно, $\dfrac{\sin(nx)}{n} \underset{-\infty<x<+\infty}{\rightrightarrows} 0.$

б): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right) = 0,$ при $-\infty < x < +\infty;$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \left|\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right|,$ при $-\infty < x < +\infty;$

3. $\rho_n = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right| = 1;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow$ Следовательно, $\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \underset{-\infty<x<+\infty}{\not\rightrightarrows} 0.$

Задача 8.7 (№2758 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$\text{а)}\ \ f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad -l < x < +l, \ \ l - \text{положительное число};$$

$$\text{б)}\ \ f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Р е ш е н и е:

а): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0,$ при $-l < x < +l;$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = e^{-(x-n)^2},$ при $-l < x < +l;$

3. $\rho_n = \sup\limits_{-l<x<+l} e^{-(x-n)^2} = \begin{cases} 1\,, & \text{при } n \leqslant l; \\ e^{-(l-n)^2}\,, & \text{при } n > l; \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \;\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{-l<x<+l}{\rightrightarrows} 0\,.$

б): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0,$ при $-\infty < x < +\infty;$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = e^{-(x-n)^2},$ при $-\infty < x < +\infty;$

3. $\rho_n = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} e^{-(x-n)^2} = 1\,;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0 \;\to$

$\to$ Следовательно, $e^{-(x-n)^2} \underset{-\infty<x<+\infty}{\not\rightrightarrows} 0\,.$

Задача 8.8 (№2718 [1]). Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n(x) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n \;\to$$

$$\to \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } \left|\dfrac{x}{2x+1}\right| < 1 \;\to\; x < -1 \text{ или } x > -1/3; \\ \neq 0, & \text{при } \left|\dfrac{x}{2x+1}\right| \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right| \geqslant 1$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $x < -1$ или $x > -1/3$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left|\frac{x}{2x+1}\right|^n \quad (2).$$

Используем признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$.

Ряд (2) сходится при $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|<1$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $x<-1$ или $x>-\dfrac{1}{3}$ и расходится при других значениях x.

Сумма ряда (1) определена при $x<-1$ и $x>-\dfrac{1}{3}$.

- -

Задача 8.9 (№2723 [1]). Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin(nx)}{1+n^q},\quad (p,q,x-\text{параметры},\ q>0,\ 0<x<\pi)\ (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n(x)=\frac{n^p\sin(nx)}{1+n^q}\ \ \to\ \ \lim_{n\to\infty}u_n(x)=\begin{cases}0\,, & \text{при } q-p>0\ ;\\ \neq 0, & \text{при } q-p\leqslant 0\,.\end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $q-p\leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $q-p>0$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p\,|\sin(nx)|}{1+n^q}$ (2). Ряд (2) сходится при $q-p>1$ (признак сравнения) и расходится при $0<q-p\leqslant 1$.

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $q-p>1$.

Пусть $0<q-p\leqslant 1$. Ряд (1) знакопеременный. Используем признак Дирихле-Абеля:

$$\frac{n^p}{1+n^q}\searrow 0\,,\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|<\frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Следовательно, ряд (1) сходится условно при $0<q-p\leqslant 1$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $q-p>1$ и сходится условно при $0<q-p\leqslant 1$.

Сумма ряда (1) определена при $0<q-p$.

- -

Задача 8.10 (№2726 [1]). Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \,, \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \;\; \to \;\; \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{при } |x| \neq 1 \;; \\ \neq 0, & \text{при } |x| = 1 \,. \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $|x| = 1$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $|x| \neq 1$. Ряд (1) знакопеременный. Ряд из модулей элементов исходного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$ (2). Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \begin{cases} |x| \,, & \text{при } |x| < 1 \;; \\ 1/|x| \,, & \text{при } |x| > 1 \end{cases} \quad < 1 \text{ при любом } x \,.$$

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$.

О т в е т: Ряд (1) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$ и расходится при $x = \pm 1$.

Сумма ряда (1) определена при $|x| \neq 1$.

- -

Задача 8.11 (№2728 [1]). Определить область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-nx} \,, \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

$$u_n(x) = n\, e^{-nx} \;\; \to \;\; \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{при } x > 0 \;; \\ \neq 0, & \text{при } x \leqslant 0 \,. \end{cases}$$

Ряд (1) расходится при $x \leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости).

Пусть $x > 0$. Используем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{-x} \quad < 1 \text{ при } x > 0 \,.$$

О т в е т: Ряд (1) сходится при $x > 0$ и расходится при $x \leqslant 0$.

Сумма ряда (1) определена при $x > 0$.

- -

Задача 8.12 (№2742 [1]). Что означает, что функциональная последовательность $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

а) сходится на интервале $(x_0\ ,\ +\infty)$;

б) сходится равномерно на каждом конечном интервале $(a\ ,\ b) \subset (x_0, +\infty)$;

в) сходится равномерно на интервале $(x_0\ ,\ +\infty)$?

Р е ш е н и е:

а): $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon\ ,\ x)\ ,\ n > N(\varepsilon\ ,\ x)\ ,\ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ ,\ x \in (x_0\ ,\ +\infty)$

б): $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon\ ,\ a,\ b)\ ,\ n > N(\varepsilon\ ,\ a,\ b)\ ,\ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ ,$
$x \in (a\ ,\ b) \subset (x_0\ ,\ +\infty)$

в): $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\ ,\ n > N(\varepsilon)\ ,\ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ ,\ x \in (x_0\ ,\ +\infty)$

- -

Задача 8.13 (№2750 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ .$$

Р е ш е н и е:

1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1 + n + x} = x,$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;
2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{x + x^2}{1 + n + x},\ r_n'(x) = \ldots =$
$$= \frac{(1 + n)(1 + 2x) + x^2}{(1 + n + x)^2} > 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;$$
3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \dfrac{x + x^2}{1 + n + x} = \dfrac{x + x^2}{1 + n + x}\Big|_{x=1} = \dfrac{2}{2 + n}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0\ .\quad \to\quad$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\rightrightarrows} x\ .$

- -

Задача 8.14 (№2751 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}\,,$$

а) $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$;

б) $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1+\varepsilon$;

в) $1+\varepsilon \leqslant x < +\infty$, где $\varepsilon > 0$.

Р е ш е н и е:

а): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = 0,$ при $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $r_n'(x) = \ldots =$

$$= \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} > 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon\ ;$$

3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon} r_n(x) = r_n(1-\varepsilon) = \dfrac{(1-\varepsilon)^n}{1+(1-\varepsilon)^n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon}{\rightrightarrows} 0$.

б): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0\,, & \text{при } 1-\varepsilon \leqslant x < 1\ ; \\ 1/2\,, & \text{при } x = 1\ ; \\ 1\,, & \text{при } 1 < x \leqslant 1+\varepsilon\ ; \end{cases}$

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} \dfrac{x^n}{1+x^n}\,, & \text{при } 1-\varepsilon \leqslant x < 1\ ; \\ 0\,, & \text{при } x = 1\ ; \\ \dfrac{1}{1+x^n}\,, & \text{при } 1 < x \leqslant 1+\varepsilon\ ; \end{cases}$

3. $\rho_n = \sup\limits_{1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon} r_n(x) = \dfrac{1}{2}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \dfrac{1}{2} \neq 0$. $\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

в): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = 1,$ при $1+\varepsilon \leqslant x < +\infty$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{1}{1+x^n} \searrow 0$ при $x \to +\infty$;

3. $\rho_n = \sup\limits_{1+\varepsilon\leqslant x<+\infty} r_n(x) = r_n(1+\varepsilon) = \dfrac{1}{1+(1+\varepsilon)^n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{1+\varepsilon\leqslant x<+\infty}{\rightrightarrows} 1$.

- -

Задача 8.15 (№2752 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \ ,$$

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $1 < x < +\infty$.

Р е ш е н и е:

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \ , \quad f_n'(x) = \ldots = 2n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \ , \ f_n'(x) = 0 \ \to \ x_0 = \frac{1}{n}$$

Точка $x_0 = \dfrac{1}{n}$ является точкой максимума функции $f_n(x)$ и $f_n(x_0) = 1$.

а): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} r_n(x) = r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0$. $\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\not\rightrightarrows} 0$.

б): 1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, при $1 < x < +\infty$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} \ \searrow$ при $1 < x < +\infty$;

3. $\rho_n = \sup\limits_{1<x<+\infty} r_n(x) = r_n(1) = \dfrac{2n}{1+n^2}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\to$ Следовательно, $f_n(x) \underset{1<x<+\infty}{\rightrightarrows} 0$.

- -

Задача 8.16 (№2754 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \quad , \quad 0 < x < +\infty \ .$$

Р е ш е н и е:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = n\frac{x+1/n-x}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}$$

1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ при $0 < x < +\infty$;

2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right| =$

$$= \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1/n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}\right)}\right| = \frac{1/n}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}\right)^2} \ ;$$

3. $\rho_n = \sup\limits_{0<x<+\infty} r_n(x) = \infty$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n \neq 0$. $\rightarrow$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0<x<+\infty}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

- -

Задача 8.17 (№2763 [1]). Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на множестве $0 \leqslant x \leqslant 1$, если

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \ , & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \ ; \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right) \ , & \text{при } \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{2}{n} \ ; \\ 0 \ , & \text{при } \dfrac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1 \ . \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f_n(x)$ имеет в точке $x_0 = \dfrac{1}{n}$ максимум, равный $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$.

1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,,$ при $0 \leqslant x \leqslant 1\,;$
2. $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = f_n(x)\,,$ при $0 \leqslant x \leqslant 1\,;$
3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} r_n(x) = r_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n\,;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n \neq 0\,.$ $\rightarrow$ Следовательно, $f_n(x) \underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\not\rightrightarrows} 0\,.$

- -

1.3.2 Занятие 9

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) на множестве $x \in X$ сходится.

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Для равномерной сходимости функционального ряда (1) на множестве X к своей сумме необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ выполнено для всех номеров $n > N(\varepsilon)$, любых натуральных p и всех $x \in X$.

Удобными для использования на практике являются достаточные признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема (признак Вейерштрасса). Пусть функциональный ряд (1) сходится на множестве X. Если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что для всех $x \in X$ и всех номеров n справедливо неравенство $|u_n(x)| \leqslant c_n$, то функциональный ряд (1) сходится равномерно на множестве X.

Теорема (признак Дирихле-Абеля). Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ (2) сходится на множестве X. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ обладает равномерно ограниченной на множестве X последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ не возрастает на множестве X и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд (2) сходится равномерно на множестве X.

- -

Задача 9.1 (№2768(а) [1]). Исследовать характер сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ (1) на сегменте } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Р е ш е н и е:

На множестве $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ряд (1) сходится абсолютно (признак сравнения).

Для исследования на равномерную сходимость, используем признак Вейерштрасса.

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = c_n \text{ при } n \geqslant 1,\ |x| \leqslant 1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится (обобщенный гармонический ряд).

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (1) на множестве $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сходится равномерно.

О т в е т:

$$\text{Функциональный ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \underset{-1\leqslant x\leqslant 1}{\rightrightarrows} .$$

- -

Задача 9.2 (№2774(в,з,м) [1]). Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}\ (1),\quad 0 \leqslant x < +\infty\ ;$$

$$\text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\ (2),\quad |x| < +\infty\ ;$$

$$\text{м)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}\ (3),\quad |x| < +\infty\ .$$

Р е ш е н и е:

(в): Ряд (1) сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$ (признак сравнения в предельной форме). Полуось $0 \leqslant x < +\infty$ является частью области сходимости ряда (1).

Для исследования на равномерную сходимость, используем признак Вейерштрасса. Функция $u_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ непрерывна и дифференцируема при $0 \leqslant x < +\infty$.

$$u_n'(x) = \left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)' = \frac{1-n^4x^2}{\left(1+n^4x^2\right)^2}\ ,\ u_n'(x_0) = 0\ \to x_0 = \frac{1}{n^2}$$

Точка $x_0 = 1/n^2$ является точкой максимума функции $u_n(x)$, так как $u_n'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $u_n'(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогда,

$$|u_n(x)| \leqslant u_n(x_0) = \left.\frac{x}{1+n^4x^2}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{2n^2} = c_n\ .$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} - \text{сходится (обобщенный гармонический ряд).}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (1) на множестве $0 \leqslant x < +\infty$ сходится равномерно.

(з): Ряд (2) сходится абсолютно при $|x| < +\infty$ (признак сравнения).
Используем признак Вейерштрасса.

$$|u_n(x)| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = c_n \text{ при } |x| < +\infty$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится (обобщенный гармонический ряд).}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (2) на множестве $|x| < +\infty$ сходится равномерно.

(м): Ряд (3) сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$ (признак сравнения в предельной форме).

Используем признак Вейерштрасса. Функция $u_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2 + n^3}$ непрерывна и дифференцируема при $-\infty < x < +\infty$.

$$u_n'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}\right)' = 2\frac{n^3 - x^2}{(n^3 + x^2)^2 + 4x^2}\,,\ u_n'(x) = 0 \ \to x_{1\,,2} = \pm n^{3/2}$$

Точка $x_1 = -n^{3/2}$ является точкой минимума, а $x_2 = n^{3/2}$ является точкой максимума функции $u_n(x)$ и $|u_n(x_1)| = |u_n(x_2)|$. Тогда,

$$|u_n(x)| \leqslant |u_n(x_2)| = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}\bigg|_{x=x_2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}} = c_n\,.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}} -$$

$$- \text{сходится (признак сравнения в предельной форме).}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (3) на множестве $-\infty < x < +\infty$ сходится равномерно.

О т в е т:

(в) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4x^2} \underset{0 \leqslant x < +\infty}{\rightrightarrows}$;

(з) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \underset{|x| < +\infty}{\rightrightarrows}$;

(м) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \underset{|x| < +\infty}{\rightrightarrows}$.

- -

Задача 9.3 (№2781 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в указанном промежутке функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(nx)}{\sqrt{n+x}} \ (1), \quad 0 \leqslant x < +\infty \ .$$

Р е ш е н и е:

Ряд (1) при любом $x \neq -k$ $(k \in N)$ сходится условно (признак Дирихле-Абеля сходимости числовых рядов). Полуось $0 \leqslant x < +\infty$ является частью области определения ряда (1). Для исследования на равномерную сходимость, используем признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Функция $v_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ монотонно по n и равномерно по x стремится к нулю:

1. $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+x}} = 0$ при $0 \leqslant x < +\infty$;
2. $r_n(x) = |v(x) - v_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ при $0 \leqslant x < +\infty$;
3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x<+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\rightarrow$ Следовательно, $v_n(x) \underset{0\leqslant x<+\infty}{\rightrightarrows} 0$.

$$\text{Функция } u_n(x) = \sin x \cdot \sin(nx) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2} - nx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)\right) \ .$$

$$\text{Тогда, } \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right)\right)\right| =$$
$$= \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)\right)\right| \leqslant 2 \text{ при } 0 \leqslant x < +\infty \ .$$

Следовательно (по признаку Дирихле-Абеля), функциональный ряд (1) на множестве $0 \leqslant x < +\infty$ сходится равномерно.

О т в е т:

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(nx)}{\sqrt{n+x}} \underset{0\leqslant x<+\infty}{\rightrightarrows} .$$

Задача 9.4 (№2767 [1]). Исследовать характер сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (1)$$

на интервале:

а) $|x| < q$ при $q < 1$;

б) $|x| < 1$.

Р е ш е н и е:

Ряд (1) сходится абсолютно при $|x| < 1$ (признак Коши).

(а): Для исследования на равномерную сходимость, используем признак Вейерштрасса.

$$|u_n(x)| = |x|^n < q^n = c_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ - \text{ сходится } (0 < q < 1)$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (1) на множестве $|x| < q$ сходится равномерно.

(б): Используем определение равномерной сходимости функционального ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ - \text{функциональная последовательность}$$

частичных сумм функционального ряда (1) ;

1. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$, при $|x| < 1$;
2. $r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| = \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x}$, при $|x| < 1$;
3. $\rho_n = \sup\limits_{|x|<1} \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x} = \infty \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Следовательно (по определению), ряд (1) на множестве $|x| < 1$ сходится неравномерно.

О т в е т:

(а) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \underset{|x|<q<1}{\rightrightarrows}$;

$$\text{(б) Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \underset{|x|<1}{\not\rightrightarrows} .$$

- -

Задача 9.5 (№2774(б,г,л) [1]). Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} \ (1), \quad -2 < x < +\infty ;$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \ (2), \quad |x| < +\infty ;$$

$$\text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx} \ (3), \quad 0 \leqslant x < +\infty .$$

Р е ш е н и е:

$$\text{(б): Ряд (1) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} = -\frac{1}{x+2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} .$$

Для исследования на равномерную сходимость, используем признак Вейерштрасса.

$$|u_n(x)| \underset{n\geqslant 2}{=} \frac{1}{x+2^n} \ \leqslant \ \frac{1}{2^n-2} = c_n . \quad \text{Ряд } \sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n-2} - \text{сходится.}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (1) на множестве $-2 < x < +\infty$ сходится равномерно.

(г): Функция $u_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$ непрерывна и дифференцируема при $|x| < +\infty$.

$$u_n^{'}(x) = \left(\frac{nx}{1+n^5x^2}\right)^{'} = \frac{n-n^6x^2}{\left(1+n^5x^2\right)^2} \ , \ u_n^{'}(x) = 0 \ \rightarrow x_{1\,,2} = \pm\frac{1}{n^{5/2}}$$

Точка $x_1 = 1/n^{5/2}$ является точкой максимума функции $u_n(x)$, а точка $x_2 = -1/n^{5/2}$ является точкой минимума функции $u_n(x)$ и

$|u_n(x_{1\,,2})| = 1/\left(2n^{3/2}\right)$. Тогда,

$$|u_n(x)| \leqslant u_n(x_1) = \frac{1}{2n^{3/2}} = c_n \ \text{ при } \ |x| < +\infty.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} - \text{сходится (обобщенный гармонический ряд).}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (2) на множестве $|x| < +\infty$ сходится равномерно.

(л): Функция $u_n(x) = x^2 \cdot e^{-nx}$ непрерывна и дифференцируема при $0 \leqslant x < +\infty$.

$$u_n'(x) = \left(x^2 \cdot e^{-nx}\right)' = x \cdot e^{-nx} \cdot (2 - nx) \ , \ u_n'(x_0) = 0 \ \to x_0 = \frac{2}{n}$$

Точка $x_0 = 2/n$ является точкой максимума функции $u_n(x)$. Тогда,

$$|u_n(x)| \leqslant u_n(x_0) = \frac{4}{e^2 n^2} = c_n \ \text{ при } \ 0 \leqslant x < +\infty.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2 n^2} - \text{сходится (обобщенный гармонический ряд).}$$

Следовательно (по признаку Вейерштрасса), функциональный ряд (3) на множестве $0 \leqslant x < +\infty$ сходится равномерно.

О т в е т:

(б) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \underset{-2<x<+\infty}{\rightrightarrows}$;

(г) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \underset{|x|<+\infty}{\rightrightarrows}$;

(л) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx} \underset{0\leqslant x<+\infty}{\rightrightarrows}$.

- -

Задача 9.6 (№2778 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в указанном промежутке функциональный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \ (1), \ \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \ .$$

Р е ш е н и е:

Ряд (1) при любом $-\infty < x < +\infty$ сходится условно (признак Дирихле-Абеля сходимости числовых рядов). Отрезок $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ является частью области сходимости ряда (1). Для исследования на равномерную сходимость,

используем признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Функция $v_n(x) = \dfrac{1}{n+\sin x}$ монотонно по n и равномерно по x стремится к нулю:

1. $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+\sin x} = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;
2. $r_n(x) = |v(x) - v_n(x)| = \dfrac{1}{n+\sin x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;
3. $\rho_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \dfrac{1}{n+\sin x} = \dfrac{1}{n-1}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\to$ Следовательно, $v_n(x) \underset{0\leqslant x\leqslant 2\pi}{\rightrightarrows} 0$.

Функция $u_n(x) = (-1)^n$.

$$\text{Тогда, } \left|\sum_{k=2}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi .$$

Следовательно (по признаку Дирихле-Абеля), функциональный ряд (1) на множестве $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ сходится равномерно.

О т в е т:

$$\text{Ряд } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \underset{0\leqslant x\leqslant 2\pi}{\rightrightarrows} .$$

- -

Задача 9.7 (№2784 [1]). Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ (1) сходится равномерно на отрезке $x \in [a\,,\,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (2) также сходится равномерно на отрезке $x \in [a\,,\,b]$.

Р е ш е н и е:

Критерий Коши для равномерно сходящегося функционального ряда (1):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ ,\ \forall n > N(\varepsilon)\ ,\ \forall p \in \mathbb{N}\quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon\ \ \forall x \in [a\,,\,b]\ .$$

Так как, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon$, то выполнены условия критерия Коши равномерной сходимости и для ряда (2).

Следовательно, функциональный ряд (2) на множестве $x \in [a\,,\,b]$ сходится равномерно.

О т в е т:

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{x\in[a\,,\,b]}{\rightrightarrows} \quad .$$

- -

1.3.3 Занятие 10

Свойства предельной функции функциональной последовательности и суммы функционального ряда.

Теорема 1. Если функциональный ряд (функциональная последовательность) сходится равномерно на сегменте $[a\,,\,b]$ и обладает на этом сегменте непрерывными членами, то и сумма функционального ряда (предельная функция функциональной последовательности) непрерывна на этом множестве.

Теорема 2. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$) сходится к сумме $S(x)$ (к предельной функции $f(x)$) равномерно на сегменте $[a\,,\,b]$ и если каждая функция $u_n(x)$ ($f_n(x)$) интегрируема на $[a\,,\,b]$, то и сумма $S(x)$ (предельная функция $f(x)$) интегрируема на $[a\,,\,b]$, причем интегрирование можно производить почленно. То есть, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$ сходится к сумме $\int\limits_a^b S(x)\,dx$ (предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$).

Теорема 3. Если каждый член функционального ряда $u_n(x)$ (функциональной последовательности $f_n(x)$) имеет производную на сегменте $[a\,,\,b]$ и если ряд (функциональная последовательность), составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ ($\{f_n'(x)\}$), сходится равномерно на сегменте $[a\,,\,b]$, а сам функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$) сходится хотя бы в одной точке x^* сегмента $[a\,,\,b]$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$) сходится к сумме $S(x)$ (предельной функции $f(x)$) равномерно на сегменте $[a\,,\,b]$, причем сумма $S(x)$ (предельная функция $f(x)$) имеет производную на сегменте $[a\,,\,b]$, являющуюся суммой функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ (предельной функцией функциональной последовательности $\{f_n'(x)\}$).

- -

Задача 10.1 (№2792 [1]). Показать, что функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ (1) непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

Р е ш е н и е:

Функциональный ряд (1) абсолютно сходится при $-\infty < x < +\infty$ – область определения функции $S(x)$.

1. Непрерывность функции $S(x)$.

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3} \text{ – непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty .$$

$$|u_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3} = c_n \text{ при } -\infty < x < +\infty .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда, функциональный ряд (1) сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $-\infty < x < +\infty$. Следовательно (Теорема 1), функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \text{ непрерывна на области } -\infty < x < +\infty .$$

2. Существование производной $S'(x)$.

При любом $-\infty < x < +\infty$ существует производная $u_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $-\infty < x < +\infty$. Следовательно (Теорема 3), существует производная $S'(x)$, равная $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

3. Непрерывность функции $S'(x)$.

$$u_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2} \text{ – непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty .$$

$$\left|u_n'(x)\right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = c_n \text{ при } -\infty < x < +\infty .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда, функциональный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $-\infty < x < +\infty$. Следовательно (Теорема 1), функция $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ непрерывна на области $-\infty < x < +\infty$.

- -

Задача 10.2 (№2797 [1]). Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (1)$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

Р е ш е н и е:

Функциональный ряд (1) сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$. Полуось $x > 1-$ область определения функции $\zeta(x)$.

1. Непрерывность функции $\zeta(x)$.

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} \ - \text{непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty .$$

Пусть $x \geqslant 1+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда, $|u_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} = c_n$ при $x \geqslant 1+\varepsilon$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится. Тогда, функциональный ряд (1) сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $x \geqslant 1+\varepsilon$. Следовательно (Теорема 1), функция $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ непрерывна на множестве $x \geqslant 1+\varepsilon$.

Пусть $1 < x < 1+\varepsilon$. Фиксируем произвольное $1 < x^* < 1+\varepsilon$. Выберем новое $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x^* \geqslant 1+\varepsilon$. Повторяем предыдущие выкладки и доказываем непрерывность функции $\zeta(x)$ в точке x^*. В силу произвольности x^*, функция $\zeta(x)$ непрерывна в любой точке $x > 1$.

2. Существование и непрерывность первой производной $\zeta'(x)$.

При любом $-\infty < x < +\infty$ существует производная $u_n'(x) = -\dfrac{\ln n}{n^x}$. Верна оценка $\left|u_n'(x)\right| = \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant \dfrac{n^{\varepsilon_1}}{n^{1+\varepsilon}} = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon-\varepsilon_1}} = c_n$ при $x \geqslant 1+\varepsilon$ и $\varepsilon - \varepsilon_1 > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon-\varepsilon_1}}$ сходится. Тогда, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^x}$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $x \geqslant 1+\varepsilon$. Следовательно (Теорема 3), производная $\zeta'(x)$, равная $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^x}$ существует при $x \geqslant 1+\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ производная $\zeta'(x)$ существует при любом $x > 1$.

$$u_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^x} \ - \text{непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty .$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на области $x \geqslant 1+\varepsilon$. Следовательно (Теорема 1), функция $\zeta'(x)$ непрерывна при $x \geqslant 1+\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ функция $\zeta'(x)$ непрерывна при $x > 1$.

3. Существование и непрерывность второй производной $\zeta''(x)$.

Функция $\zeta''(x)$ является производной функции $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^x}$.

Повторяя пункт (2.) для функции $\zeta^{'}(x)$, доказываем существование и непрервыность функции $\zeta^{''}(x)$.

Аналогично доказывается существование и непрерывность производных любого $k-$ого $(k>2)$ порядка функции $\zeta(x)$.

- -

Задача 10.3 (№2806 [1]). Найти предел

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\quad(1).$$

Р е ш е н и е:

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n\,(x^n+1)}$ сходится при любом

$x\neq -1$. Рассмотрим функцию $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$ на отрезке $x\in[1-\delta\,,\,1+\delta]$, где $\delta>0$.

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\,(x^n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{n+1}}_{u_n(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\left(\overbrace{1-\frac{1}{x^n+1}}^{<1}\right)}_{v_n(x)}$$

сходится равномерно на области $x\in[1-\delta\,,\,1+\delta]$ (признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда). Следовательно (Теорема 1), функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $x\in[1-\delta\,,\,1+\delta]$. Тогда,

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\lim_{x\to 1-0}S(x)=S(1)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

О т в е т:

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}\,.$$

- -

Задача 10.4 (№2795(а) [1]). Определить область существования функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\quad(1)$$

и исследовать её на непрерывность.

Р е ш е н и е:

1. Область определения функции $f(x)$.

$$u_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0 \text{ при } |x| \geqslant 1 .$$

То есть, при $|x| \geqslant 1$ нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $|x| < 1$. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x + 1/n)^n$ сходится абсолютно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x + 1/n|^n$ сходится (признак Коши). Следовательно, функция $f(x)$ определена на интервале $|x| < 1$.

2. Непрерывность функции $f(x)$ при $|x| < 1$.

$$u_n(x) = (x + 1/n)^n \text{ – непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty .$$

Пусть $|x| \leqslant 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

$$|u_n(x)| = |x + 1/n|^n \leqslant ((1 - \varepsilon) + 1/n)^n = c_n \text{ при } |x| \leqslant 1 - \varepsilon .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится (признак Коши). Тогда, функциональный ряд (1) сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $|x| \leqslant 1 - \varepsilon$. Следовательно (Теорема 1), функция $f(x)$ непрерывна на области $|x| \leqslant 1 - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ любое малое число, то функция $f(x)$ непрерывна при $|x| < 1$.

О т в е т: Функция $f(x)$ определена и непрерывна при $|x| < 1$.

- -

Задача 10.5 (№2798 [1]). Доказать, что тэта-функция

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Р е ш е н и е:

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\pi n^2 x} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

1. Область определения функции $\Theta(x)$.

$$u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0 \text{ при } x \leqslant 0 .$$

То есть, при $x \leqslant 0$ нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $x > 0$. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ сходится (признак Коши). Следовательно, функция $\Theta(x)$ определена при $x > 0$.

2. Непрерывность функции $\Theta(x)$ при $x > 0$.

$$u_n(x) = e^{-\pi n^2 x} \text{ – непрерывна в любой точке } -\infty < x < +\infty.$$

Пусть $x \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда, $|u_n(x)| = \dfrac{1}{e^{\pi n^2 x}} \leqslant \dfrac{1}{e^{\pi n^2 \varepsilon}} = c_n$ при $x \geqslant \varepsilon$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ сходится (признак Коши). Тогда, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $x \geqslant \varepsilon$. Следовательно (Теорема 1), функция $\Theta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ непрерывна на множестве $x \geqslant \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, функция $\Theta(x)$ непрерывна в любой точке $x > 0$.

3. Существование первой производной $\Theta'(x)$ при $x > 0$.

При любом $-\infty < x < +\infty$ существует производная $u_n'(x) = -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$.

Верна оценка $\left|u_n'(x)\right| = \dfrac{\pi n^2}{e^{\pi n^2 x}} \leqslant \dfrac{\pi n^2}{e^{\pi n^2 \varepsilon}} = c_n$ при $x \geqslant \varepsilon$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ сходится (признак Коши). Тогда, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 x}$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на области $x \geqslant \varepsilon$. Следовательно (Теорема 3), существует производная $\Theta'(x)$, равная $\Theta'(x) = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 x}$ при $x \geqslant \varepsilon > 0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ производная $\Theta'(x)$ существует при любом $x > 0$.

4. Существование второй и любой другой производной более высокого порядка функции $\Theta(x)$ доказывается аналогично.

- -

Задача 10.6 (№2799(а) [1]). Определить область существования функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$$

и исследовать её на дифференцируемость.

Р е ш е н и е:

1. Область определения функции $f(x)$.

$$f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + x}$ (1) сходится условно (признак Лейбница) при любом

$x \neq -k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (область определения функции $f(x)$).

2. Существование первой производной $f^{'}(x)$ при $x \neq -k$.

При любом $x \neq -k$ существует производная

$$u_n^{'}(x) = \left(\frac{(-1)^n}{n+x}\right)^{'} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \ .$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда) на множествах отделенных от $x = -k$. Следовательно (Теорема 3), существует производная ряда (1), равная $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Тогда, функция $f(x)$ дифференцируема и её производная равна

$$f^{'}(x) = \left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}\right)^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \ .$$

- -

1.3.4 Занятие 11

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + c_k \cdot (x-a)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k \quad (1)\,,$$

в котором c_0, c_1, $\ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые коэффициентами данного степенного ряда, и вещественное число $a-$ центр степенного ряда.

Теорема (Коши-Адамара). Для любого степенного ряда (1), если он не является рядом сходящимся только в точке $x = a$, существует положительное число R (возможно равное ∞) такое, что степенной ряд (1) абсолютно сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(a-R\,,\, a+R)$ называется промежутком сходимости степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости используется формула Адамара

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

В частном случае, когда все $c_n \neq 0$, радиус сходимости R может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|\,,$$

если этот предел существует.

На концах промежутка сходимости ($x = a-R$ или $x = a+R$) степенной ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1. Если степенной ряд (1) не является рядом сходящимся только при $x = a$, то сумма этого степенного ряда есть непрерывная функция всюду внутри его промежутка сходимости $(a-R\,,\, a+R)$.

Теорема 2. Если степенной ряд (1) не является рядом сходящимся только при $x = a$, число $R > 0-$ его радиус сходимости и $x-$ любое число, удовлетворяющее условию $0 < |x-a| < R$, то этот степенной ряд можно интегрировать почленно по сегменту, ограниченному точками a и x. Степенной ряд, полученный в результате почленного интегрирования

$$c_0 \cdot (x-a) + \frac{c_1}{2} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{c_{k-1}}{k} \cdot (x-a)^k + \ldots\,,$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и степенной ряд (1).

Теорема 3. Если степенной ряд (1) не является рядом сходящимся только при $x = a$, то внутри промежутка сходимости $(a - R, a + R)$ этот степенной ряд можно дифференцировать почленно. Степенной ряд, полученный в результате почленного дифференцирования

$$c_1 + 2c_2 \cdot (x - a) + \ldots + (k + 1)c_{k+1} \cdot (x - a)^k + \ldots ,$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и степенной ряд (1).

- -

Задача 11.1 (№2812 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \quad (p - \text{параметр}) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{1}{n^p}, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1\,.$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x| < 1$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

1) $x = 1 \;\to\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ –сходится при $p > 1$ (обобщенный гармонический ряд) ;

2) $x = -1 \;\to\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$ –сходится абсолютно при $p > 1$ (обобщенный гармонический ряд) , сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ (признак Лейбница) , расходится при $p \leqslant 0$ (нарушено необходимое условие сходимости) .

- -

Задача 11.2 (№2814 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Вычислим радиус сходимости степенного ряда (1):

1. Используем формулу Адамара

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} =$$

$$= \left\{ n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\delta_n/(12n)}\,,\ \text{где } 0 < \delta_n < 1\ -\ \text{ф-ла Стирлинга} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2\pi n\, n^{2n}\, e^{-2n+\delta_n/(6n)}}{2\sqrt{\pi n}\, 4^n\, n^{2n}\, e^{-2n+\delta'_n/(24n)}}} = \lim_{n\to\infty} \pi^{1/(2n)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

То есть, $R = 4$;

2. Используем формулу

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4\,.$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x| < 4$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

$$1)\ x = 4\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 4^n}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\, e^{-2n+\delta_n/(6n)}}{2\sqrt{\pi n}\, e^{-2n+\delta'_n/(24n)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi n} = \infty$$

(нарушено необходимое условие сходимости) ;

2) $x=-4 \;\to\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2\,(-1)^n\,4^n}{(2n)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \;\;,$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2\,(-1)^n\,4^n}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\, \dfrac{2\pi n\, e^{-2n+\delta_n/(6n)}}{2\sqrt{\pi n}\, e^{-2n+\delta'_n/(24n)}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{\pi n}$ – не существует (нарушено необходимое условие сходимости) .

- -

Задача 11.3 (№2815 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (\alpha - \text{параметр}\;,\; 0<\alpha<1) \;\; (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\;, & \text{при } n=0; \\ \alpha^{n^2}, & \text{при } n \geqslant 1\;. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0\;.$$

То есть, $R=\infty$.

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$ (теорема Коши-Адамара).

- -

Задача 11.4 (№2830 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \;\; (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_k = \begin{cases} 0\,, & \text{при } k \neq n^2; \\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{при } k = n^2\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1/n}} = 1\,.$$

То есть, $R = 1\,.$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x| < 1$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

1) $x = 1 \;\to\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится (признак Коши) ;

2) $x = -1 \;\to\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ – сходится абсолютно (признак Коши) .

- -

Задача 11.5 (№2908 [1]). Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму степенного ряда

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = S(x) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_k = \begin{cases} 0\,, & \text{при } k \neq 2n; \\ \dfrac{1}{(2n)!}, & \text{при } k = 2n\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,e^{-2n+\delta_n/(24n)}}} = 0\,.$$

То есть, $R = \infty$.

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$ (теорема Коши-Адамара).

Функция $S(x)$ определена при всех $-\infty < x < +\infty$. Из вида ряда (1) следует, что $S(x) = S(-x)$.

Производная $S'(x)$ существует (Теорема 3) при всех $-\infty < x < +\infty$ и равна

$$S'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} .$$

Сумма $S'(x) + S(x)$ (по свойствам суммы абсолютно сходящихся рядов) равна

$$S'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x .$$

Из вида ряда (1) следует, что $S(0) = 1$.

Искомая функция $S(x)$ является решением задачи Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} S'(x) + S(x) = e^x \ , \ x > 0 \ ; \\ S(0) = 1 \ \ . \end{cases} \qquad (2)$$

Решаем задачу (2) :

$$\frac{d\,S(x)}{S(x)} = -d\,x \ \rightarrow \ S(x) = C(x)e^{-x} \ \rightarrow \ C'(x) = e^{2x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \ \rightarrow \ S(x) = \frac{1}{2}e^x + C_1 e^{-x} \ ,$$

$$S(0) = 1 \ \rightarrow \ C_1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad S(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x \ .$$

О т в е т:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x \ .$$

- -

Задача 11.6 (№2911 [1]). Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму степенного ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = S(x) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ n\,, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\,.$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x| < 1$ (теорема Коши-Адамара). На концах промежутка сходимости степенной ряд (1) расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Функция $S(x)$ определена на отрезке $|x| < 1\,.$

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ при $|x| < 1$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Тогда,

$$S(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

при $|x| < 1\,.$

Производя интегрирование (Теорема 2) предыдущего равенства, получим:

$$\int_0^x \left(S(t) + \frac{t}{1-t} \right)\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)t^n \right)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+1)t^n\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}\,.$$

Используем формулу

$$\left(\int_0^x f(t)\, dt \right)' = f(x)\,.$$

Тогда,

$$S(x) + \frac{x}{1-x} = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'\,.$$

Следовательно,

$$S(x) = -\frac{x}{1-x} + \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = -\frac{x}{1-x} + \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

при $|x| < 1$.

О т в е т:

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{при} \quad |x| < 1 \ .$$

- -

Задача 11.7 (№2813 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = -1$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0 \ , & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}, & \text{при } n \geqslant 1 \ . \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\frac{1 + (-2/3)^n}{n}} = 3 \ .$$

То есть, $R = \dfrac{1}{3}$.

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x+1| < 1/3 \ \ \to \ \ -4/3 < x < -2/3$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

$$1) \ x = -\frac{4}{3} \ \to \ \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{1 + (-2/3)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \ -$$

$$-$$ сходится условно ;

$$2) \ x = -\frac{2}{3} \ \to \ \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{1 + (-2/3)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \ -$$

– расходится, так как является суммой гармонического и абсолютно сходящегося ряда .

- -

Задача 11.8 (№2818 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n}\ ,\ (p-\text{параметр})\ \ (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=1$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n=\begin{cases}0\ , & \text{при } n=0;\\ \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}\cdot\dfrac{1}{2^n}, & \text{при } n\geqslant 1\ .\end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)}{(2n+1)}\right)^{p}\cdot 2=2\ .$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x-1|<2\ \ \to\ \ -1<x<3$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

1) $x=-1\ \to\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}\cdot(-1)^n$ – при $p>2$ сходится абсолютно (см. Задача 2.4), при $0<p\leqslant 2$ сходится условно и при $p\leqslant 0$ расходится ;

2) $x=3\ \to\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$ – при $p>2$ сходится (см. Задача 2.4) и при $p\leqslant 2$ расходится .

- -

Задача 11.9 (№2827 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного

ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot x^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n=\begin{cases} 0\,, & \text{при } n=0;\\ 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n, & \text{при } n\geqslant 1 \text{ (см. Задача 3.6)}\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{C+\ln n+\varepsilon_n}{C+\ln(n+1)+\varepsilon_n^{'}}=1\,.$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $-1<x<1$ (теорема Коши-Адамара).

Поведение степенного ряда (1) на концах промежутка сходимости:

$$1)\ x=-1\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot(-1)^n\ -\ \text{расходится (нарушено необходимое условие сходимости)}\ ;$$

$$2)\ x=1\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\ -\ \text{расходится (нарушено необходимое условие сходимости)}\,.$$

- -

Задача 11.10 (№2829 [1]). Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos(\pi\,n/4)\right)^n}{\ln n}\cdot x^n \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0\,,1\,; \\ \dfrac{(1+2\cos(\pi\, n/4))^n}{\ln n}, & \text{при } n \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1+2\cos(\pi\, n/4)}{\sqrt[n]{\ln n}} = 3\,.$$

То есть, $R = \dfrac{1}{3}$.

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $-1/3 < x < 1/3$ (теорема Коши-Адамара).

На концах промежутка сходимости, в точках $x = \pm\dfrac{1}{3}$ в соответствующих числовых рядах слагаемые с номерами n кратными 8 образуют расходящийся числовой ряд вида $\sum_{k=n_0\gg 1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(8k)}$.

Следовательно, последовательность частичных сумм ряда (1) не имеет конечного предела.

- -

Задача 11.11 (№2909 [1]). Вычислить сумму степенного ряда

$$\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = S(x) \quad (1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{1}{n(n+1)}, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1\,.$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $-1 < x < 1$ (теорема Коши-Адамара).

При $x=1$ ряд (1) сходится, а при $x=-1$ ряд (1) сходится абсолютно. Функция $S(x)$ определена при всех $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$$S(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots=\left(\frac{x}{1}-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+$$
$$+\ldots=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots\right)=$$
$$=\left\{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow\quad \ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right)\right\}=$$
$$=-\ln(1-x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots\right)=\{x\neq 0\}=-\ln(1-x)+$$
$$+\frac{1}{x}\left(-x\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots\right)\right)=-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\left(-x+x+\frac{x^2}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)\right)=-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(x-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)\right)=$$
$$=-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(x+\ln(1-x)\right)=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\ .$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)\right)=0=S(0)$, то $S(x)=1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)$ при $-1\leqslant x<0,\ 0<x\leqslant 1$ и $S(0)=0$.

Задача 11.12 (№2912 [1]). Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму степенного ряда

$$x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n=S(x)\quad(1).$$

Р е ш е н и е:

Точка $a=0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n=\begin{cases}0\ , & \text{при } n=0;\\ (-1)^{n-1}n^2\ , & \text{при } n\geqslant 1\ .\end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1\ .$$

Областью абсолютной сходимости степенного ряда (1) является отрезок $|x| < 1$ (теорема Коши-Адамара). На концах промежутка сходимости, в точках $x = \pm 1$ степенной ряд (1) расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

Функция $S(x)$ определена на отрезке $|x| < 1$.

$$S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$$

$$\int\limits_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2t^{n-1}\right)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2\int\limits_0^x t^{n-1}\,dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n = S_1(x)$$

$$\int\limits_0^x \frac{S_1(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1}\right)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\int\limits_0^x t^{n-1}\,dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n = \frac{x}{1+x}$$

Используем формулу

$$\left(\int\limits_0^x f(t)d\,t\right)' = f(x)\ .$$

Тогда,

$$\frac{S_1(x)}{x} = \left(\frac{x}{1+x}\right)' \quad \text{и} \quad \frac{S(x)}{x} = S_1'(x)\ .$$

Следовательно,

$$S(x) = x{\cdot}S_1'(x) = x{\cdot}\left(x\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' = x{\cdot}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' = x{\cdot}\frac{1-x}{(1+x)^3} = \frac{x-x^2}{(1+x)^3}$$

при $|x| < 1$.

О т в е т:

$$S(x) = \frac{x-x^2}{(1+x)^3} \ \text{при} \ \ |x| < 1\ .$$

- -

1.3.5 Занятие 12

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ могла быть представлена в некоторой окрестности точки $x = a$ в виде степенного ряда, необходимо, чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = a$ непрерывные производные любого порядка.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ может быть представлена в некоторой окрестности точки $x = a$ в виде степенного ряда, то этот степенной ряд является рядом Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n \, .$$

Задача 12.1 (№2839 [1]). Функцию $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ $(a \neq 0)$ разложить в ряд :

а) по степеням x ;

б) по степеням разности $x - b$, где $b \neq a$;

в) по степеням $\dfrac{1}{x}$.

Указать соответствующие области сходимости.

Р е ш е н и е:

а) Целью является представление функции $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$.

$$f(x) = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-x/a} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \;\text{ при }\; |q| < 1 \, . \right.$$

$$\left. \text{Пусть } \; q = \frac{x}{a} \, . \right\} = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n} \;\text{ при }\; |q| = \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \, .$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$$

при $|x| < |a| = R$. Число R есть радиус сходимости искомого степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда, построенного для функции $f(x)$,

равен расстоянию от центра степенного ряда до ближайшей «особой» точки функции $f(x)$. «Особой» точкой функции называют значение аргумента этой функции, при котором функция не определена, имеет разрыв или не существует производная какого-либо порядка.

б) Требуется представить функцию $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-b)^n$. Точка $x=b$ является центром степенного ряда.

$$f(x)=\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-b-(x-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-(x-b)/(a-b)}=$$
$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\ \text{ при }\ |q|<1\,.\ \text{Пусть }\ q=\frac{x-b}{a-b}\,.\right\}=$$
$$=\frac{1}{a-b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^n}\ \text{ при }\ |q|=\left|\frac{x-b}{a-b}\right|<1\,.$$

Следовательно,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a-b)^{n+1}}\,(x-b)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(x-b)^n$$

при $|x-b|<|a-b|=R$, где $R-$ радиус сходимости искомого степенного ряда.

в) Представить функцию $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$ в виде ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot\dfrac{1}{x^n}$.

$$f(x)=\frac{1}{a-x}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-a/x}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\ \text{ при }\ |q|<1\,.\right.$$
$$\left.\text{Пусть }\ q=\frac{a}{x}\,.\right\}=-\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^n}\ \text{ при }\ |q|=\left|\frac{a}{x}\right|<1\,.$$

Следовательно,

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\cdot\frac{1}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\frac{1}{x^n}$$

при $|x|>|a|$. Областью сходимости ряда является числовая ось без отрезка $|x|\leqslant|a|$.

- -

Задача 12.2 (№2840 [1]). Функцию $f(x)=\ln x$ разложить по целым неотрицательным степеням разности $(x-1)$ и выяснить интервал сходимости

разложения. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \ln x \;\; (0 < x < +\infty)$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-1)^n$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = 1$.

$$f(x) = \ln x = \ln\left(1 + (x-1)\right) = \left\{ \ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, y^n \;\text{ при}\right.$$

$$\left. -1 < y \leqslant 1 \;[1,\, \text{с.}255]\,\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \;\text{ при }\; -1 < x-1 \leqslant 1\,.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,(x-1)^n$$

при $0 < x \leqslant 2$.

Вычислим сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(x-1)^n \Bigg|_{x=2} = f(2) = \ln 2$$

- -

Задача 12.3 (№2843 [1]). Функцию $f(x) = \sin^2 x$ разложить по целым неотрицательным степеням переменной x и выяснить интервал сходимости ряда.

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \sin^2 x \;\; (-\infty < x < +\infty)$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = \infty$.

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x)) = \left\{ \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, y^{2n} \;\text{ при}\right.$$

$$\left. -\infty < y < \infty \;\; [1,\, \text{с.}255]\,\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{(2n)!}\,x^{2n} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty\,.$$

- -

Задача 12.4 (№2858 [1]). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}\,.$$

У к а з а н и е. Разложить данную дробь на простейшие.

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$.

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \left\{1+x-2x^2=0 \;\;\to\;\; x_1 = -\frac{1}{2}\,,\; x_2 = 1\right\} =$$

$$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} = \left\{ \begin{cases} A+2B=-1 \\ B-A=0 \end{cases} \;\to\; A=B=-\frac{1}{3}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-2x)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x} =$$

$$= \left\{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \;\text{ при }\; |q|<1\right\} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n + \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(1+(-1)^{n+1}2^n\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}2^n}{3}\,x^n$$

$$\text{при} \quad \begin{cases} |2x|<1 \\ |x|<1 \end{cases} \quad \to \quad |x| < \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}2^n}{3}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,x^n$$

при $|x| < \dfrac{1}{2} = R$. Число R есть радиус сходимости искомого степенного ряда.

- -

Задача 12.5 (№2853 [1]). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x) = \sin^3 x\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \sin^3 x \ \ (-\infty < x < +\infty)$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = \infty$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sin^3 x = \sin x \cdot \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos(2x) = \\
= \left\{ \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\,(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \right\} = \\
= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\,(\sin(3x) - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) = \\
= \left\{ \sin y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, y^{2n-1} \ \text{ при } \ -\infty < y < \infty \ \ [1,\, \text{с.}255] \right\} = \\
= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, 3^{2n-1}\, x^{2n-1} = \\
= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(3 - 3^{2n-1}\right)}{4\,(2n-1)!}\, x^{2n-1} \ \text{ при } \ -\infty < x < +\infty\,.
\end{aligned}
$$

- -

Задача 12.6 (№2855 [1]). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \ \ (x \neq 1)$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = 1$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \underset{|x|<1}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1} = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \ \text{ при } \ |x| < 1\,.
\end{aligned}
$$

В граничной точке $x = -1$ ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

О т в е т:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n\ \text{ при }\ |x|<1\,.$$

- -

Задача 12.7 (№2859 [1]). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n$.

$$f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\left\{6-5x-x^2=0\ \ \to\ \ x_1=-6\,,\ x_2=1\right\}=$$

$$=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x-1}=\left\{\begin{cases}A+B=5\\6B-A=-12\end{cases}\ \to\ \ A=6\,,\ B=-1\right\}=$$

$$=\{x\neq-6\,,\ x\neq1\}=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-(-x/6)}+\frac{1}{1-x}=$$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\ \text{ при }\ |q|<1\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}\,x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)\cdot x^n\ \text{ при }\ \begin{cases}|x/6|<1\\|x|<1\end{cases}\ \to\ \ |x|<1\,.$$

Следовательно,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)\cdot x^n$$

при $|x|<1$. В граничной точке $x=-1$ ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости).

О т в е т:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n\ \text{ при }\ |x|<1\,.$$

- -

Задача 12.8 (№2862(б) [1]). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}\,.$$

Чему равна $f^{(1000)}(0)$?

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \Big\{1+x+x^2+x^3 = 0 \;\;\to\;\; x_1 = -1\,,$$
$$\frac{1+x+x^2+x^3}{x+1} = x^2+1 \;\;\to\;\; 1+x+x^2+x^3 = (x+1)(x^2+1)\Big\} =$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \left\{ \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \to\;\; A = -B = C = \frac{1}{2} \right\} =$$
$$= \{x \neq -1\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x)} - \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x^2)} =$$
$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \;\text{ при }\; |q|<1 \right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n - \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{2n} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\, x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\, x^{2n}$$
$$\text{при} \quad |x| < 1\,.$$

В граничных точках $x = \pm 1$ ряды расходятся (нарушено необходимое условие сходимости).

Вычислим $f^{(1000)}(0)$.

$$f^{(1000)}(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\, x^n\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\, x^{2n+1}\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} +$$
$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\, x^{2n}\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} = \sum_{n=1000}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\,\left(x^n\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} +$$
$$+ \sum_{n=500}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\,\left(x^{2n+1}\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} + \sum_{n=500}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\,\left(x^{2n}\right)^{(1000)}\Bigg|_{x=0} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1000! - \frac{1}{2}\cdot 1001!\cdot x\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\cdot 1000! = 1000!$$

О т в е т:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} x^{2n} \quad \text{при} \quad |x| < 1 \,,$$

$$f^{(1000)}(0) = 1000!$$

- -

1.3.6 Занятие 13

Задача 13.1 (№2873(б) [1]). Найти разложение в степенной ряд относительно x функции

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ $(x \neq 1)$ в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = 1$. Область определения функции $f(x)$:

$$x \neq 1\,;\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \to \quad -1 < x < 1\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' + \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^4} =$$

$$= \left\{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ \text{ при } \ |q| < 1\,.\ \text{Пусть } \ q = x^4\,.\right\} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}\,.$$

Производя интегрирование предыдущего равенства, получим:

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n}\right) dt\,;$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{4n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{4n+1}}{4n+1}\bigg|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$

Так как $f(0) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$

О т в е т:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \ \text{ при } \ |x| < 1\,.$$

Задача 13.2 (№2891 [1]). Написать три члена разложения (отличные от нуля) в степенной ряд по положительным степеням переменной x функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x\,.$$

Р е ш е н и е:

Целью является представление функции $f(x) = \operatorname{tg} x \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} \pm \pi k\,,\ k \in \mathbb{N})$ в виде степенного ряда $f(x) = c_0 + c_1\,x^1 + c_2\,x^2 + \ldots + c_n\,x^n + \ldots$, где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Радиус сходимости искомого степенного ряда равен $R = \dfrac{\pi}{2}$.

$$f^{(0)}(x)\Big|_{x=0} = \operatorname{tg} x|_{x=0} = 0 \quad \to \quad c_0 = 0$$

$$f^{(1)}(x)\Big|_{x=0} = (\operatorname{tg} x)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} = 1 \quad \to \quad c_1 = 1$$

$$f^{(2)}(x)\Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'\Big|_{x=0} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \to \quad c_2 = 0$$

$$f^{(3)}(x)\Big|_{x=0} = \left(2\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)'\Big|_{x=0} = \ldots = \left(-\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{6}{\cos^4 x}\right)\Big|_{x=0} = 2 \quad \to$$

$$\to \quad c_3 = \frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}(x)\Big|_{x=0} = \left(-\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{6}{\cos^4 x}\right)'\Big|_{x=0} = \ldots = \left(-8\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \right.$$

$$\left. +24\frac{\sin x}{\cos^5 x}\right)\Big|_{x=0} = 0 \quad \to \quad c_4 = 0$$

$$f^{(5)}(x)\Big|_{x=0} = \left(-8\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 24\frac{\sin x}{\cos^5 x}\right)'\Big|_{x=0} = \ldots = \left(\frac{16}{\cos^2 x} - \frac{120}{\cos^4 x} + \right.$$

$$\left. +\frac{120}{\cos^6 x}\right)\Big|_{x=0} = 16 \quad \to \quad c_5 = \frac{2}{15}$$

Следовательно,

$$f(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \ldots \quad \text{при} \quad |x| < \frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$f(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \ldots \quad \text{при} \quad |x| < \frac{\pi}{2}\,.$$

Задача 13.3 (№2903 [1]). Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$$

Р е ш е н и е:

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \left\{ \sin t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, t^{2n-1} \text{ при } -\infty < t < +\infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, t^{2n-2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_0^x t^{2n-2}\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}\, t^{2n-1} \Bigg|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}\, x^{2n-1}\,.$$

О т в е т:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}\, x^{2n-1} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty\,.$$

Задача 13.4 (№2873(ж) [1]). Найти разложение в степенной ряд функции

$$f(x) = x\, \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

Р е ш е н и е:
Областью определения функции $f(x)$ является отрезок $|x| \leqslant 1$.

$$f'(x) = (x\, \arcsin x)' + \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \arcsin x$$

$$f^{(2)}(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \{\, [1,\, \text{с.}255] \,\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}$$

Производя интегрирование предыдущих равенств, получим:

$$\int_0^x f^{(2)}(t)\,dt = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\right) dt \quad \to$$

$$\to \quad f'(x) - f'(0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1} \quad \to$$

$$\to \quad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}\,;$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,t^{2n+1}\right) dt \quad \to$$

$$\to \quad f(x) - f(0) = \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\,x^{2n+2}\,.$$

Так как $f(0) = 1$, то

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\,x^{2n+2}\,.$$

О т в е т:

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\,x^{2n+2} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 1\,.$$

Задача 13.5 (№2905 [1]). Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(1+t)}\,dt \quad \text{(написать четыре члена разложения)}\,.$$

Р е ш е н и е:

Полуось $-1 < x < +\infty$ – область определения функции $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots \quad \text{при} \quad -1 < t \leqslant 1 \quad [1,\ \text{с.}255]$$

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{t}{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \ldots} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} + \ldots$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(1+t)}\,dt = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} + \ldots\right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{36} + \frac{t^4}{96} + \dots \right) \Bigg|_{t=0}^{t=x} = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \dots$$

О т в е т:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \dots \quad \text{при} \quad -1 < x \leqslant 1 \, .$$

- -

1.4 Обобщённые методы суммирования расходящихся рядов

1.4.1 Занятие 14

Суммой (по Коши) числового ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ (1) называют предел S последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда (1) (если этот предел существует).

Рассмотрим расширение понятия суммы числового ряда (1) и суммирование расходящихся (по Коши) числовых рядов с использованием «обобщённых» методов суммирования.

Потребуем, чтобы «обобщённые» методы суммирования удовлетворяли двум условиям :

1. Ряд (1), сходящийся (по Коши) и имеющий сумму (по Коши) S, должен иметь обобщённую сумму, равную S. Метод суммирования, обладающий этим свойством, называется регулярным методом;

2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ имеет обобщённую сумму U, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ имеет обобщённую сумму V, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(A\,u_k+B\,v_k)$, где A и B любые постоянные, имеет обобщённую сумму $A\,U+B\,V$. Метод суммирования, удовлетворяющий данному условию, называется линейным методом.

Рассмотрим примеры регулярных линейных обобщённых методов суммирования.

М е т о д с у м м и р о в а н и я Ч е з а р о .

Ряд (1) называется суммируемым по методу Чезаро, если существует конечный предел $S_{Ч}$ последовательности среднеарифметических частичных сумм $\{s_n\}$ ряда (1), то есть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=S_{Ч}\ \ (2)\ .$$

Число $S_{Ч}$ называется обобщённой суммой ряда (1) по методу Чезаро.

М е т о д с у м м и р о в а н и я П у а с с о н а – А б е л я .

Числовому ряду (1) сопостовляется степенной ряд

$$u_1+u_2\,x+u_3\,x^2+\ldots+u_k\,x^{k-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\,x^{k-1}\ (3)\ .$$

Если степенной ряд (3) сходится для всех x из интервала $0 < x < 1$ и сумма $S(x)$ ряда (3) имеет левое предельное значение

$$\lim_{x \to 1-0} S(x) = S_{П-А}$$

в точке $x = 1$, то ряд (1) суммируем по методу Пуассона-Абеля. Предельное значение $S_{П-А}$ называется суммой ряда (1) по методу Пуассона-Абеля.

- -

Задача 14.1. Найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \quad (1) \, .$$

Р е ш е н и е:

$u_k = (-1)^{k-1}$, $\lim\limits_{k \to \infty} u_k$ – не существует (нарушено необходимое условие сходимости). Следовательно, ряд (1) расходится (по Коши).

Метод суммирования Чезаро :

Частичные суммы ряда (1) равны

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 0 & , \ n = 2\,l \\ 1 & , \ n = 2\,l - 1 \end{cases} ;$$

Элементы последовательности среднеарифметических частичных сумм ряда (1) равны

$$\bar{s}_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{n/2}{n} & , \ n = 2\,l \\ \dfrac{(n+1)/2}{n} & , \ n = 2\,l - 1 \end{cases} ;$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \bar{s}_n = \dfrac{1}{2} = S_{Ч}$ – сумма ряда (1) по методу Чезаро.

Метод суммирования Пуассона-Абеля :

Числовому ряду (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ сопоставляется степенной ряд (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \, x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \, x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} \underset{|x|<1}{=} \frac{1}{1+x} = S(x) \, ;$$

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} = S_{П-А} \ -$$ сумма ряда (1) по методу Пуассона-Абеля.

Для ряда (1), как и следовало ожидать, $S_{П-А} = S_{Ч}$.

Задача 14.2. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \quad (0 < x < 2\pi) \ \ (1) \ .$$

Р е ш е н и е:

$u_k(x) = \cos(kx)$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \cos(kx)$ $-$ не существует при $0 < x < 2\pi$ (нарушено необходимое условие сходимости). Следовательно, ряд (1) расходится (по Коши).

Метод суммирования Чезаро :

Частичные суммы ряда (1) равны

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-kx\right)\right)}_{=-\sin(x/2)+\sin(x/2+nx)} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \ ;$$

Элементы последовательности среднеарифметических частичных сумм ряда (1) равны

$$\bar{s}_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2}+kx\right) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{n2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{n4\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(kx\right) - \cos\left(x+kx\right)\right)}_{=\cos x - \cos(x+nx)} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos\left(x+nx\right)}{n4\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos x - \cos\left(x+nx\right)}{n4\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} = S_{Ч} -$$

$-$ сумма ряда (1) по методу Чезаро.

- -

Задача 14.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \;\; (1)\,.$$

Р е ш е н и е:

$u_k = (-1)^{k-1}k$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k$ $-$ не существует (нарушено необходимое условие сходимости). Следовательно, ряд (1) расходится (по Коши).

Метод суммирования Чезаро :

Частичные суммы ряда (1) равны

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}n =$$

$$= \begin{cases} 1+2+3+\ldots+n-2\left(2+4+\ldots+n\right) & ,\;\; n=2m \\ 1+2+3+\ldots+n-2\left(2+4+\ldots+(n-1)\right) & ,\;\; n=2m-1 \end{cases} =$$

$$= \left\{ 1+2+3+\ldots+n = \frac{n\left(n+1\right)}{2} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} - 4\,\dfrac{n/2\,(n/2+1)}{2} & ,\;\; n=2m \\ \dfrac{n(n+1)}{2} - 4\,\dfrac{(n-1)/2\,((n-1)/2+1)}{2} & ,\;\; n=2m-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & , \ n = 2m \\ \\ \dfrac{n+1}{2} & , \ n = 2m-1 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \ s_1 = 1, \ s_2 = -1, \ s_3 = 2, \ s_4 = -2, \ s_5 = 3, \ s_6 = -3, \ \ldots \ ;$

Элементы последовательности среднеарифметических частичных сумм ряда (1) равны

$$\bar{s}_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \begin{cases} 0 & , \ n = 2\,m \\ \dfrac{(n+1)/2}{n} & , \ n = 2\,m-1 \end{cases} \begin{matrix} \underset{m\to\infty}{\rightarrow} 0 \\ \\ \underset{m\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{2} \end{matrix} \ ; \rightarrow$$

$\rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} \bar{s}_n$ – не существует. Ряд (1) расходится (по Чезаро).

Метод суммирования Пуассона-Абеля :

Числовому ряду (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k$ сопоставляется степенной ряд (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \, x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \, x^{k-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \underset{|x|<1=R}{=} S(x) \ ;$$

$$\int_0^x S(t)\,dt = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \, x^k \underset{|x|<1}{=} \frac{x}{1+x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ S(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2} \ , \text{ при } \ |x| < 1 \ ;$$

$\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{4} = S_{П-А}$ – сумма ряда (1) по методу Пуассона-Абеля.

- -

Глава 2

Интегралы

2.1 Двойные собственные интегралы

2.1.1 Занятие 15

Пусть в плоской ограниченной области D (Рис.15.1) определена ограниченная функция двух переменных $f(x,y) = f(P)$, где P точка с координатами $\{x,y\}$.

Введём понятие площади плоской ограниченной области. Проведём в плоскости с декартовой прямоугольной системой координат две прямые параллельные координатной оси y, отстоящие друг от друга на расстояние равное a, и две прямые параллельные координатной оси x, отстоящие друг от друга на расстояние равное b. Эти четыре прямые линии выделяют конечную часть плоскости, которую называют прямоугольником со сторонами a и b (Рис.15.2).

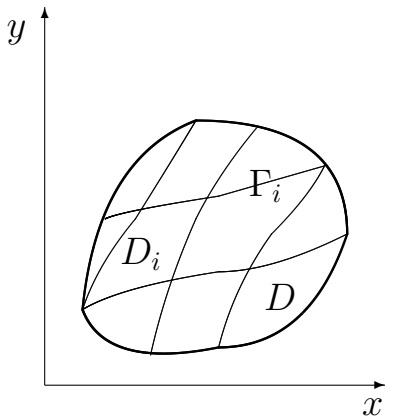

*Рис.*15.1

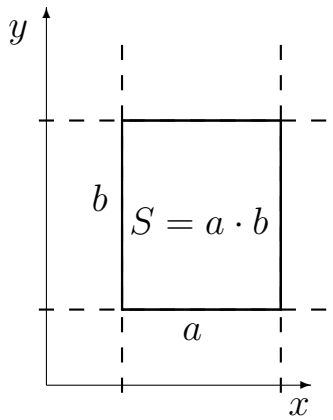

*Рис.*15.2

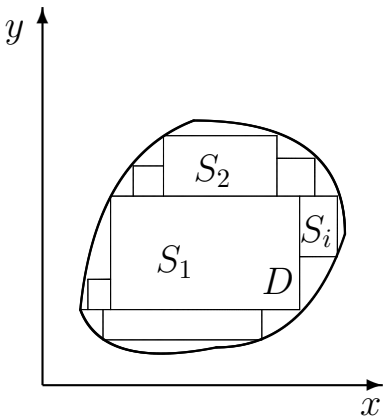

*Рис.*15.3

Сопоставим этому прямоугольнику количественную характеристику, называемую площадью прямоугольника, равную $S = a \cdot b$.

Площадь S_D плоской ограниченной области D равна пределу бесконечной суммы площадей не пересекающихся прямоугольников, вписанных в область D (Рис.15.3) :

$$S_D = S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots .$$

Разобьём область D линиями Γ_i на подобласти D_i (Рис.15.1). Обозначим через ΔD_i площадь подобласти D_i. Выберем в каждой подобласти D_i произвольную точку P_i и вычислим значение $f(P_i)$.

Определение. Число $\sigma = \sum_i f(P_i)\Delta D_i$ называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные подобласти D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в подобластях D_i.

Назовём диаметром области D_i точную верхнюю грань расстояний между двумя любыми точками этой области. Символом d обозначим наибольший из диаметров частичных областей D_i.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм при $d \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $d < \delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D, если существует конечный предел I интегральных сумм σ этой функции при $d \to 0$. Этот предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy .$$

Аналогичным образом определяется кратный интеграл от функции большего числа переменных.

При вычислении двойных интегралов используется следующая теорема.

Теорема (сведение двойного интеграла к повторным).

1. Пусть выполнены условия :

а) Область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy пересекает границу этой области не более чем в двух точках, ординаты которых есть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (Рис.15.4) ;

б) Функция $f(x, y)$ допускает существование двойного интеграла

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy .$$

При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Здесь x_1 и x_2, соответственно, наименьшая и наибольшая абсцисса точек области D.

2. Пусть выполнены условия :

а) Область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Ox пересекает границу этой области не более чем в двух точках, абсциссы которых есть $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y) \leqslant x_2(y)$;

б) Функция $f(x,y)$ допускает существование двойного интеграла

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,.$$

Здесь y_1 и y_2, соответственно, наименьшая и наибольшая ордината точек области D.

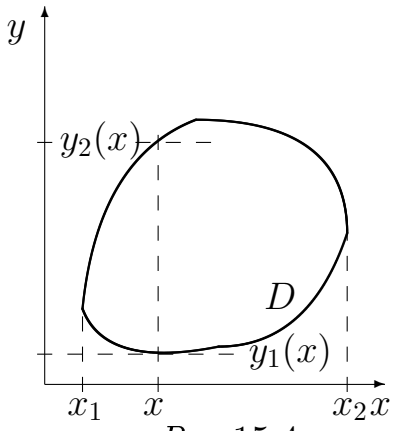

*Рис.*15.4

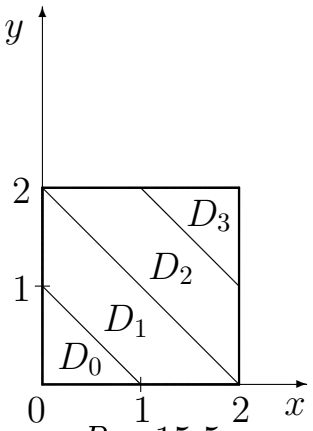

*Рис.*15.5

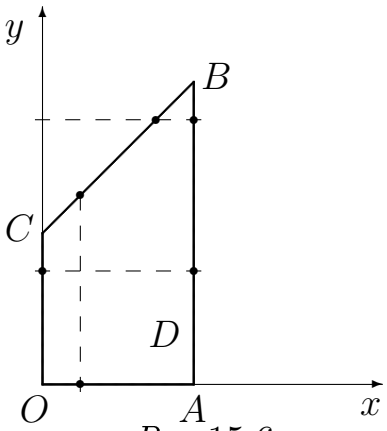

*Рис.*15.6

Задача 15.1 (№3975 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

от разрывной функции $f(x,y)=[x+y]$ по области

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant 2\,,\ 0\leqslant y\leqslant 2\,.$$

Р е ш е н и е:

Область D подразделяется на четыре подобласти D_0, D_1, D_2 и D_3 (Рис.15.5), в каждой из которых функция $f(x,y)=[x+y]$ имеет постоянные значения равные, соответственно, $f(x,y)=0$ в D_0, $f(x,y)=1$ в D_1, $f(x,y)=2$ в D_2 и $f(x,y)=3$ в D_3.

Тогда,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy+$$
$$+\iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy=0\cdot\iint\limits_{D_0} dxdy+1\cdot\iint\limits_{D_1} dxdy+2\cdot\iint\limits_{D_2} dxdy+$$
$$+3\cdot\iint\limits_{D_3} dxdy=S_1+2\cdot S_2+3\cdot S_3\,,$$

где через S_1 обозначена площадь области D_1, S_2- площадь области D_2 и S_3- площадь области D_3. Площади двух трапеций равны $S_1=S_2=3/2$ и площадь треугольника равна $S_3=1/2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=S_1+2\cdot S_2+3\cdot S_3=6\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 6\,.$$

- -

Задача 15.2 (№3918 [1]). Двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,,$$

где область $D-$ трапеция с вершинами O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1), свести к повторным интегралам.

Р е ш е н и е:

Область D ограничена четырьмя прямыми линиями $x=0\,,\ x=1\,,$ $y=0$ и $y-x=1$ (Рис.15.6).

Любая прямая линия $x=const\,,$ при $x_1=0<x<1=x_2\,,$ пересекает границу области D в двух точках $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=x+1\,.$ Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x+1} f(x,y)\,dy\,.$$

Так как любая прямая линия $y=const\,,$ при $y_1=0<y<2=y_2\,,$ пересекает границу области D в двух точках $x_1(y)=\begin{cases} 0\,, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ y-1, & \text{при } 1<y\leqslant 2\end{cases}$ и $x_2(y)=1\,,$ то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^1 f(x,y)\,dx\,.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x+1} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^1 f(x,y)\,dx\,.$$

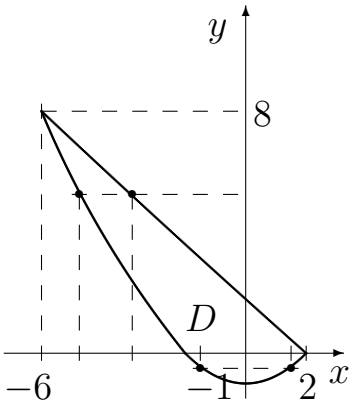

*Рис.*15.7

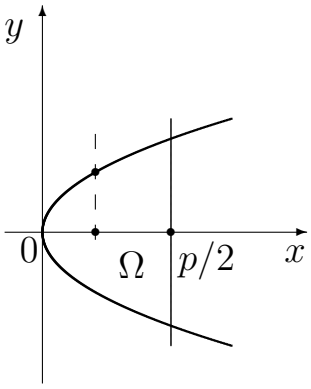

*Рис.*15.8

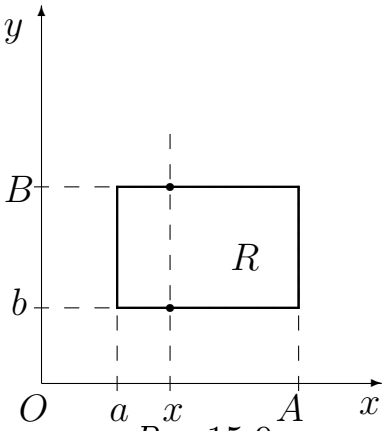

*Рис.*15.9

Задача 15.3 (№3925 [1]). Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,.$$

Р е ш е н и е:

Двойной интеграл $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ от функции $f(x,y)$ по области D задан в виде повторного интеграла. Пределы интегрирования в повторном интеграле означают, что прямая линия $x = const$, при $x_1 = -6 \leqslant x \leqslant 2 = x_2$, пересекает границу области интегрирования D в двух точках

$y_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ и $y_2(x) = 2 - x$. То есть, область интегрирования D имеет вид Рис.15.7.

Рассмотрим прямую линию $y = const$, при $y_1 = -1 \leqslant y \leqslant 8 = y_2$. Эта линия пересекает границу области D в двух точках $x_1(y) = -2\sqrt{y+1}$ и $x_2(y) = \begin{cases} 2\sqrt{y+1}, & \text{при } -1 \leqslant y \leqslant 0; \\ 2 - y, & \text{при } 0 < y \leqslant 8 \end{cases}$.

В соответствии с этим, рассматриваемый двойной интеграл равен

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{8} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,.$$

Задача 15.4 (№3932 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} x\,y^2\,dxdy\,,$$

если область Ω ограничена параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \dfrac{p}{2}$ (параметр $p > 0$).

Р е ш е н и е:

Область Ω симметрична относительно оси x (Рис.15.8) и подынтегральная функция $f(x,y) = x\,y^2$ чётная по переменной y. Поэтому, заданный двойной интеграл по области Ω равен удвоенному двойному интегралу по области Ω', являющейся верхней половиной области Ω. Итак,

$$\iint\limits_{\Omega} x\,y^2\,dxdy = 2\iint\limits_{\Omega'} x\,y^2\,dxdy = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} x\,y^2\,dy =$$

$$= \left\{x_1 = 0\,,\ x_2 = \frac{p}{2}\,,\ y_1(x) = 0\,,\ y_2(x) = \sqrt{2px}\right\} =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{p/2} x\,dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2px}} y^2\,dy = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{p/2} x\cdot y^3\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2px}}\,dx = \frac{2^{5/2}p^{3/2}}{3}\int\limits_{0}^{p/2} x^{5/2}\,dx = \frac{p^5}{21}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{\Omega} x\,y^2\,dxdy = \frac{p^5}{21}\,.$$

Задача 15.5 (№3909 [1]). Доказать равенство

$$\iint\limits_{R} X(x)\cdot Y(y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{A} X(x)\,dx \cdot \int\limits_{b}^{B} Y(y)\,dy\,,$$

если $R-$ прямоугольник ($a \leqslant x \leqslant A\,,\ b \leqslant y \leqslant B$) и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

Р е ш е н и е:

Область R (Рис.15.9) такова, что

$$\iint\limits_R X(x)\cdot Y(y)\,dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} X(x)\cdot Y(y)\,dy =$$

$$= \{x_1 = a\,,\ x_2 = A\,,\ y_1(x) = b\,,\ y_2(x) = B\} =$$

$$= \int\limits_a^A X(x)\,dx \int\limits_b^B Y(y)\,dy = \int\limits_b^B Y(y)\,dy \cdot \int\limits_a^A X(x)\,dx\,.$$

- -

Задача 15.6 (№3910 [1]). Вычислить

$$I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x,y)\,dy\ ,$$

если $f(x,y) = F_{x\,y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right).$

Р е ш е н и е:

$$I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x,y)\,dy = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right) dy =$$

$$= \int\limits_a^A \left(\frac{\partial F(x,B)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,b)}{\partial x}\right) dx = (F(A,B) - F(a,B)) -$$

$$- (F(A,b) - F(a,b)) = F(A,B) + F(a,b) - F(a,B) - F(A,b)\,.$$

О т в е т:

$$I = F(A,B) + F(a,b) - F(a,B) - F(A,b)\ .$$

- -

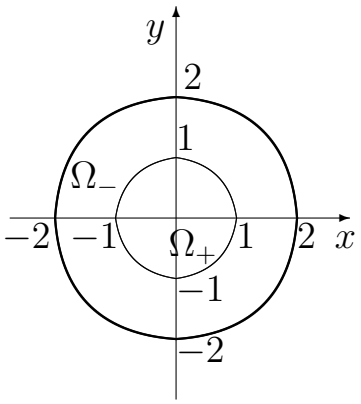

*Рис.*15.10

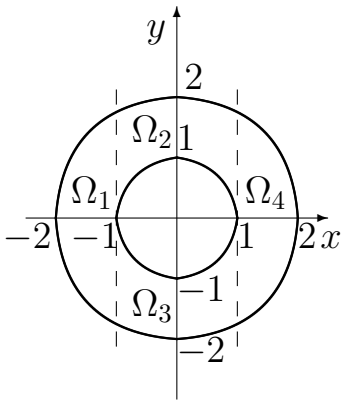

*Рис.*15.11

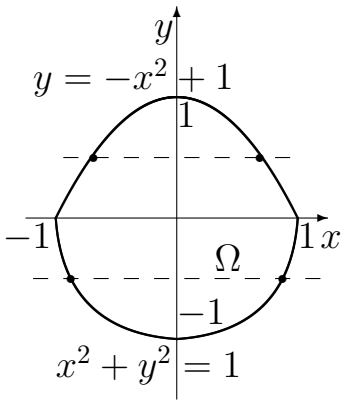

*Рис.*15.12

Задача 15.7 (№3912(б) [1]). Какой знак («+» или «-») имеет интеграл

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dxdy\ .$$

Р е ш е н и е:

Двойной интеграл $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dxdy$ вычисляется по области Ω (Рис.15.10), которая является кругом с центром в начале координат и с радиусом равным 2.

Подынтегральная функция $f(x,y) = \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}$ положительна в области Ω_+, являющейся кругом с центром в начале координат и с радиусом равным 1. Функция $f(x,y) = \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}$ отрицательна в области Ω_-, являющейся кольцом с внешним радиусом равным 2 и внутренним радиусом равным 1. Площадь области Ω_+ равна $\Delta D_+ = \pi$. Площадь области Ω_- равна $\Delta D_- = 3\pi$. Положительные значения функции $f(x,y)$ меняютя в диапазоне от 0 до 1. Отрицательные значения функции $f(x,y)$ меняютя в диапазоне от $-\sqrt[3]{3}$ до 0.

Интегральная сумма функции $f(x,y)$ по области Ω равна

$$\sigma = \sum_i f(x_i,y_i)\Delta D_i = \sigma_- + \sigma_+\ ,$$

где σ_- — все слагаемые с отрицательными значениями функции $f(x,y)$ и σ_+ — все слагаемые с положительными значениями функции $f(x,y)$.

Суммарная площадь ΔD_- областей с отрицательными значениями функции $f(x,y)$ и диапазон изменения самих отрицательных значений функции $f(x,y)$ больше суммарной площади ΔD_+ областей с положительными значениями функции $f(x,y)$ и диапазона изменения положительных значений функции $f(x,y)$.

Поэтому, следует ожидать, что $|\sigma_-| > \sigma_+$. Следовательно, $\sigma < 0$ и $I < 0$.

- -

Задача 15.8 (№3922 [1]). В двойном интеграле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$

расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

Область $\Omega -$ круговое кольцо $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$.

Р е ш е н и е:

Две вертикальные прямые $x=-1$ и $x=1$ делят область Ω на четыре подобласти Ω_1, Ω_2, Ω_3 и Ω_4 (Рис.15.11). Поэтому,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_3} f(x,y)\,dxdy +$$
$$+ \iint\limits_{\Omega_4} f(x,y)\,dxdy =$$
$$= \left\{ \text{Область } \Omega_1 : \begin{cases} x_1=-2\,,\ x_2=-1\,; \\ y_1(x)=-\sqrt{4-x^2}\,,\ y_2(x)=\sqrt{4-x^2} \end{cases} ; \right.$$
$$\text{Область } \Omega_2 : \begin{cases} x_1=-1\,,\ x_2=1\,; \\ y_1(x)=\sqrt{1-x^2}\,,\ y_2(x)=\sqrt{4-x^2} \end{cases} ;$$
$$\text{Область } \Omega_3 : \begin{cases} x_1=-1\,,\ x_2=1\,; \\ y_1(x)=-\sqrt{4-x^2}\,,\ y_2(x)=-\sqrt{1-x^2} \end{cases} ;$$
$$\left. \text{Область } \Omega_4 : \begin{cases} x_1=1\,,\ x_2=2\,; \\ y_1(x)=-\sqrt{4-x^2}\,,\ y_2(x)=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \right\} =$$
$$= \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy \ + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy +$$
$$+ \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \ + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

По аналогии с предыдущим, две горизонтальные прямые $y=-1$ и $y=1$ делят область Ω на четыре подобласти Ω_1', Ω_2', Ω_3' и Ω_4'. Поэтому,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1'} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2'} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_3'} f(x,y)\,dxdy +$$
$$+ \iint\limits_{\Omega_4'} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Область } \Omega_1^{'} : \begin{cases} y_1 = -2\,,\ y_2 = -1\,; \\ x_1(y) = -\sqrt{4-y^2}\,,\ x_2(y) = \sqrt{4-y^2} \end{cases} ; \right.$$

$$\text{Область } \Omega_2^{'} : \begin{cases} y_1 = -1\,,\ y_2 = 1\,; \\ x_1(y) = -\sqrt{4-y^2}\,,\ x_2(y) = -\sqrt{1-y^2} \end{cases} ;$$

$$\text{Область } \Omega_3^{'} : \begin{cases} y_1 = -1\,,\ y_2 = 1\,; \\ x_1(y) = \sqrt{1-y^2}\,,\ x_2(y) = \sqrt{4-y^2} \end{cases} ;$$

$$\left. \text{Область } \Omega_4^{'} : \begin{cases} y_1 = 1\,,\ y_2 = 2\,; \\ x_1(y) = -\sqrt{4-y^2}\,,\ x_2(y) = \sqrt{4-y^2} \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \ + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \ +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \ + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

Задача 15.9 (№3927 [1]). Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy =$$

$$= \left\{ \Omega : \begin{cases} x_1 = -1\,,\ x_2 = 1\,; \\ y_1(x) = -\sqrt{1-x^2},\ y_2(x) = 1-x^2 \end{cases} \rightarrow \text{Рис.15.12} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$
= \left\{ \Omega : \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} y_1 = -1 \ \ , \ \ y_2 = 0\,; \\ x_1(y) = -\sqrt{1-y^2} \ \ , \ x_2(y) = \sqrt{1-y^2} \end{cases} \quad ; \\ \\ \begin{cases} y_1 = 0 \ \ , \ \ y_2 = 1\,; \\ x_1(y) = -\sqrt{1-y} \ \ , \ x_2(y) = \sqrt{1-y} \end{cases} \end{array} \right. \right\} =
$$

$$
= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \ + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx \ .
$$

- -

2.1.2 Занятие 16

При проведении замены переменных в двойном интеграле используется следующая теорема.

Теорема. Если $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – непрерывно дифференцируемые функции переменных $u, v \in \widetilde{D}$, осуществляющие взаимно однозначное отображение областей $D(x,y)$ и $\widetilde{D}(u,v)$ и якобиан

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\widetilde{D}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\,|J|\,dudv\,.$$

Полярные координаты.

При переходе от координат x и y $(-\infty < x < +\infty\,,\ -\infty < y < +\infty)$ к полярным координатам r и φ $(0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ по формулам $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ (Рис.16.1) модуль якобиана равен

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r\,.$$

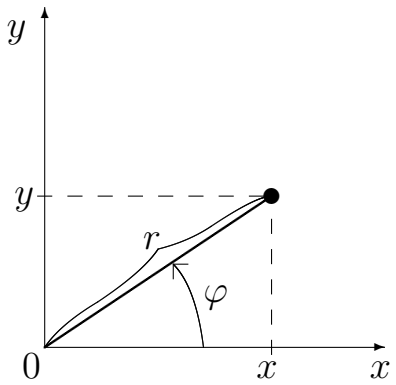

*Рис.*16.1

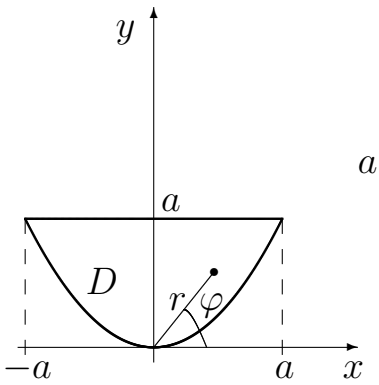

*Рис.*16.2

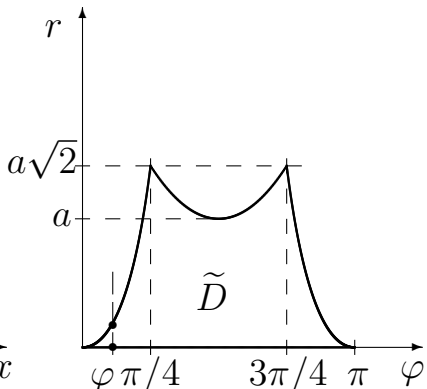

*Рис.*16.3

Задача 16.1 (№3941 [1]). В двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,,$$

где $D-$ параболический сегмент $(-a \leqslant x \leqslant a\,,\, x^2/a \leqslant y \leqslant a)$, перейти к полярным координатам r и φ полагая $x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле.

Р е ш е н и е:

Область интегрирования D изображена на Рис.16.2. При замене переменных $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ область D переходит в область $\widetilde{D}$ (Рис.16.3) в плоскости независимых переменных r и φ.

Используя формулу замены переменных в двойном интеграле, имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\widetilde{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ |J|\ drd\varphi = \iint\limits_{\widetilde{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi\,.$$

Границей области D являются линии $y = \dfrac{x^2}{a}$ и $y = a$, которые после замены переменных имеют, соответственно, вид $\sin\varphi = \dfrac{r\cos^2\varphi}{a}$ и $r\sin\varphi = a$.

Прямая линия $\varphi = const\ \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ пересекает границу области $\widetilde{D}$ (Рис.16.3) в двух точках

$$r_1(\varphi) = 0 \ \text{ и } \ r_2(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{a\,\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,, & \text{при } \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4 \ \ ,\ \ 3\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi\,; \\ \dfrac{a}{\sin\varphi}\,, & \text{при } \ \pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \end{cases}.$$

Поэтому,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\widetilde{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\,\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\,\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,.$$

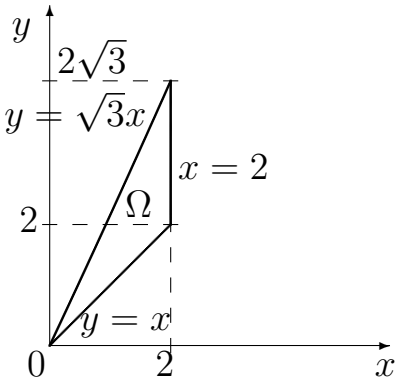

*Рис.*16.4

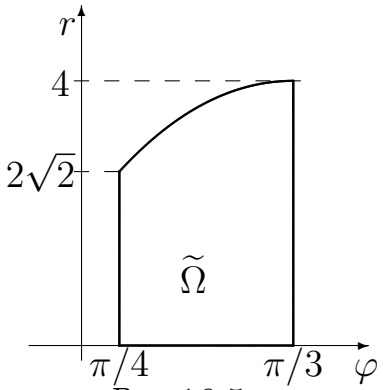

*Рис.*16.5

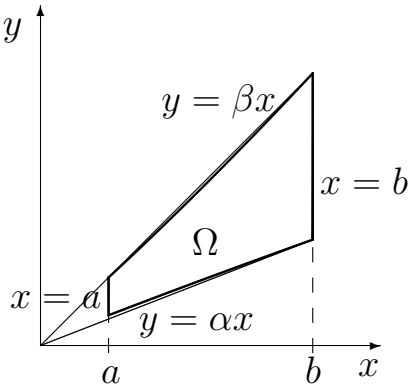

*Рис.*16.6

Задача 16.2 (№3945 [1]). Перейти к полярным координатам r и φ полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy =$$

$$= \left\{ \text{Область}\,\Omega : \begin{cases} x_1 = 0\,,\ x_2 = 2\,; \\ y_1(x) = x,\ y_2(x) = \sqrt{3}x \end{cases} \quad \to\ \text{Рис.16.4} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных} : \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi), \right.$$

$$\left. |J| = r\,,\ f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(r) \right\} = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(r)\,r\,drd\varphi =$$

$$= \left\{ \text{Граница области}\,\Omega : \begin{cases} y = x\,; \\ y = \sqrt{3}x\,; \\ x = 2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow\ \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega} : \right.$$

$$\left\{ \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = 1\,; \\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,; \\ r\cos\varphi = 2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \varphi = \pi/4\,; \\ \varphi = \pi/3\,; \\ r\cos\varphi = 2 \end{cases} \quad \to\ \text{Рис.16.5} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r)\, r\, dr = \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} \varphi_1 = \pi/4\ ,\ \varphi_2 = \pi/3\,; \\ r_1(\varphi) = 0,\ r_2(\varphi) = 2/\cos\varphi \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r)\, r\, dr = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(r)\, r\, dr d\varphi = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r)\, r\, d\varphi =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = 4\,; \\ \varphi_1 = \begin{cases} \pi/4 \quad , \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{2}\,; \\ \arccos(2/r) \ , \quad \text{при } 2\sqrt{2} < r \leqslant 4 \end{cases} , \ \varphi_2 = \pi/3 \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(r)\, r\, d\varphi + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} dr \int\limits_{\arccos(2/r)}^{\frac{\pi}{3}} f(r)\, r\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{12} \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} f(r) r dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} f(r) r \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\left(\frac{2}{r}\right) \right) dr\ .$$

Задача 16.3 (№3947 [1]). Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dxdy\,,$$

где область Ω ограничена кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right) \quad (x \geqslant 0\ ,\ \text{параметр}\, a > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \right.$$
$$\left. (0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = r\ ,\ f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \right\} =$$
$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr d\varphi =$$
$$= \left\{ \text{Граница области}\, \Omega : \begin{cases} x \geqslant 0\ ; \\ \left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right) \end{cases} \right. \quad \longleftrightarrow$$

$$\text{Граница области}\,\widetilde{\Omega}:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ r^2=a^2\cos(2\varphi)\geqslant 0\end{cases}\to\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4};\\ r^2=a^2\cos(2\varphi)\end{cases}\Bigg\}=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr=$$

$$=\left\{\widetilde{\Omega}:\begin{cases}\varphi_1=-\pi/4\ ,\ \varphi_2=\pi/4\,;\\ r_1(\varphi)=0,\ r_2(\varphi)=a\sqrt{\cos(2\varphi)}\end{cases}\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr=\iint\limits_{\widetilde{\Omega}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_{r_1}^{r_2}dr\int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rd\varphi=$$

$$=\left\{\widetilde{\Omega}:\begin{cases}r_1=0\quad,\quad r_2=a\,;\\ \varphi_1=-\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{r^2}{a^2}\right)\ ,\ \ \varphi_2=\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{r^2}{a^2}\right)\end{cases}\right\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}r\,dr\int\limits_{-1/2\cdot\arccos(r^2/a^2)}^{1/2\cdot\arccos\left(r^2/a^2\right)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,d\varphi\ .$$

Задача 16.4 (№3957 [1]). Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy\ \ (0<a<b\ ,\ 0<\alpha<\beta)\,,$$

если $u=x\,,\ v=\dfrac{y}{x}\,.$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy=$$

$$=\left\{\text{Область}\,\Omega:\begin{cases}x_1=a\ ,\ x_2=b\,;\\ y_1(x)=\alpha x,\ y_2(x)=\beta x\end{cases}\to\ \text{Рис.16.6}\right\}=$$

$$= \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \left\{ \text{Замена переменных} : \begin{cases} u = x\,; \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \right. ,$$

$$|J| = \Big|\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\Big| = \frac{1}{\Big|\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}\Big|} = \Big|\begin{vmatrix} 1 & -y/x^2 \\ 0 & 1/x \end{vmatrix}\Big|^{-1} = x = u \Bigg\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(u,uv)\,u\,dudv =$$

$$= \left\{ \text{Граница области } \Omega : \begin{cases} x = a\,; \\ x = b\,; \\ y = \alpha x\,; \\ y = \beta x \end{cases} \right. \longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{\Omega} :$$

$$\left\{ \begin{cases} u = a\,; \\ u = b\,; \\ v = \alpha\,; \\ v = \beta \end{cases} \right\} = \int\limits_{u_1}^{u_2} du \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u,uv)\,u\,dv =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} u_1 = a\,,\ u_2 = b\,; \\ v_1(u) = \alpha,\ v_2(u) = \beta \end{cases} \right\} = \int\limits_{a}^{b} u\,du \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u,uv)\,dv =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(u,uv)\,u\,dudv = \int\limits_{v_1}^{v_2} dv \int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} f(u,uv)\,u\,du =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} v_1 = \alpha,\ v_2 = \beta\,; \\ u_1(v) = a\,,\ u_2(v) = b \end{cases} \right\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dv \int\limits_{a}^{b} f(u,uv)u\,du\,.$$

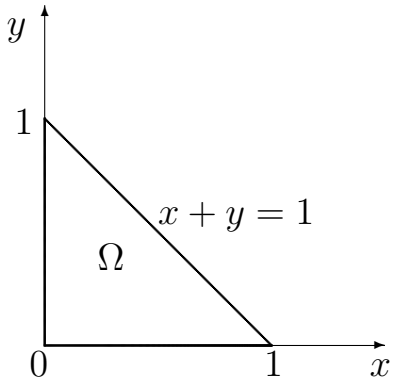

*Рис.*16.7

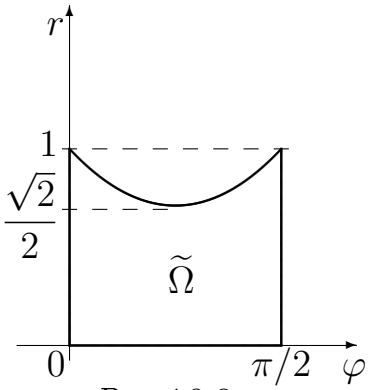

*Рис.*16.8

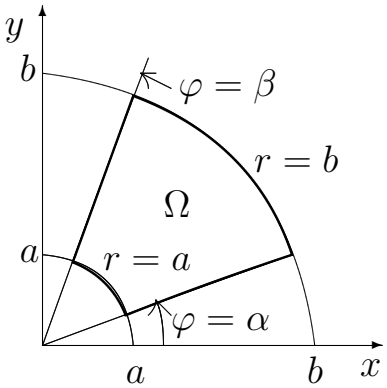

*Рис.*16.9

Задача 16.5 (№3940 [1]). В двойном интеграле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$

перейти к полярным координатам r и φ и расставить пределы интегрирования, если $\Omega -$ треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1-x$ (Рис.16.7).

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$(0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = r\ ,\ f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi = \left\{\text{Граница области } \Omega : \begin{cases} x = 0\,; \\ y = 0\,; \\ x + y = 1 \end{cases}\right.$$

$$\longleftrightarrow \quad \text{Граница области } \widetilde{\Omega} : \begin{cases} \cos\varphi = 0\,; \\ \sin\varphi = 0\,; \\ r(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi = \pi/2\,; \\ \varphi = 0\,; \\ \sqrt{2}r\sin(\varphi + \pi/4) = 1 \end{array} \quad \rightarrow \text{ Рис.16.8} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$= \left\{\widetilde{\Omega} : \begin{cases} \varphi_1 = 0\ ,\ \varphi_2 = \pi/2\,; \\ r_1(\varphi) = 0,\ r_2(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi + \pi/4)} \end{cases}\right\} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,.$$

- -

Задача 16.6 (№3942 [1]). В каком случае после перехода к полярным переменным пределы интегрирования будут постоянные?

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$|J| = r\ ,\ \ f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\Big\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi = \int\limits_{\varphi_1=\alpha}^{\varphi_2=\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)=a}^{r_2(\varphi)=b} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$

При переходе к полярным переменным пределы интегрирования в повторном интеграле будут постоянные, если границей области Ω являются координатные линии $r = const$ и $\varphi = const$ полярной системы координат (Рис.16.9).

- -

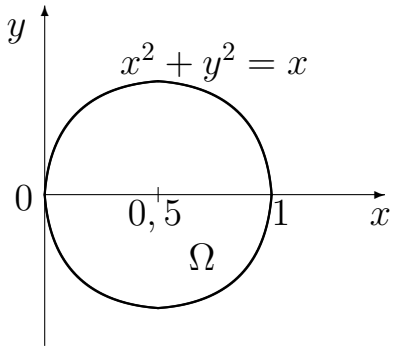

*Рис.*16.10

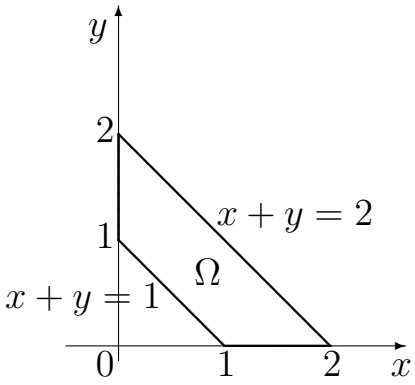

*Рис.*16.11

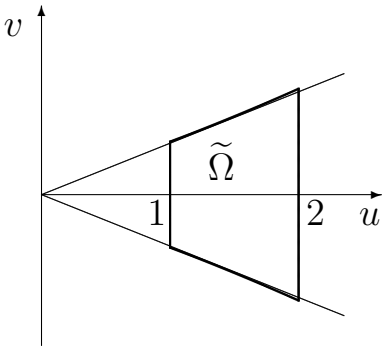

*Рис.*16.12

Задача 16.7 (№3953 [1]). Перейдя к полярным координатам, заменить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Omega\,:\,x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy$$

однократным.

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$|J| = r\ ,\ f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\operatorname{tg}\varphi)\Big\} = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,r\,drd\varphi =$$

$$= \Big\{\text{Граница области}\,\Omega:\ x^2 + y^2 = x\ (\text{Рис.16.10}) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\ \ \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega}:\ r = \cos\varphi \geqslant 0\ \to -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\Big\} =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(\operatorname{tg}\varphi)\, r\, dr = \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} \varphi_1 = -\pi/2\ ,\ \varphi_2 = \pi/2\,; \\ r_1(\varphi) = 0,\ r_2(\varphi) = \cos\varphi \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} r\, dr = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\, r^2 \Big|_{r=0}^{r=\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi) \cos^2\varphi\, d\varphi\,.$$

Задача 16.8 (№3958 [1]). Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\, dy\,,$$

если $u = x + y\,,\ v = x - y\,.$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\, dy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Область}\,\Omega : \begin{cases} x_1 = 0\ ,\ x_2 = 2\,; \\ y_1(x) = 1 - x,\ y_2(x) = 2 - x \end{cases} \rightarrow \text{Рис.16.11} \right\} =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных} : \begin{cases} u = x + y\ ; \\ v = x - y \end{cases} ,\ |J| = \Big| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \Big| = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\Big| \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \Big|} = \Big| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Big|^{-1} = \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) dudv =$$

$$= \left\{ \text{Граница области}\,\Omega : \begin{cases} x + y = 1\ ; \\ x + y = 2\ ; \\ x = 0\ ; \\ y = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega} : \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=1\,; \\ u=2\,; \\ u+v=0\,; \\ u-v=0 \end{array} \quad \to \text{ Рис.16.12} \right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{u_1}^{u_2} du \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\, dv =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} u_1 = 1\,,\ u_2 = 2\,; \\ v_1(u) = -u,\ v_2(u) = u \end{cases} \right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} du \int\limits_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\, dv.$$

- -

2.1.3 Занятие 17

Задача 17.1 (№3964 [1]). Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл к однократному:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x \cdot y)\, dxdy\,,$$

где область Ω ограничена кривыми

$$xy = 1\ ,\ xy = 2\ ,\ y = x\ ,\ y = 4x\ \ (x > 0\ ,\ y > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Граница области интегрирования Ω состоит из линий, которые принадлежат двум семействам кривых $xy = const$ и $\dfrac{y}{x} = const$. Если в качестве новых переменных выбрать комбинации, определяющие эти семейства, то образом области Ω в плоскости новых переменных будет прямоугольник.

Пусть новые переменные u и v связаны с переменными x и y соотношениями $u = xy$ и $v = \dfrac{y}{x}$. Так как $x, y > 0$, то и новые переменные $u, v > 0$.

Верны равенства:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x \cdot y)\, dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = xy\ ; \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} , \right.$$

$$\left. |J| = \frac{1}{\left|\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}\right|} = \left|\begin{vmatrix} y & -y/x^2 \\ x & 1/x \end{vmatrix}\right|^{-1} = \frac{1}{2v}\ ,\ f(x,y) = f(u) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} f(u) \frac{1}{v}\, dudv = \left\{ \text{Граница области } \Omega : \begin{cases} xy = 1\ ; \\ xy = 2\ ; \\ \dfrac{y}{x} = 1\ ; \\ \dfrac{y}{x} = 4 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \right.$$

$$\text{Граница области } \widetilde{\Omega} : \begin{cases} u = 1\ ; \\ u = 2\ ; \\ v = 1\ ; \\ v = 4 \end{cases} \Bigg\} = \frac{1}{2} \int\limits_{u_1}^{u_2} du \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u) \frac{1}{v}\, dv =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega} : \begin{cases} u_1 = 1\,,\ u_2 = 2\,; \\ v_1(u) = 1,\ v_2(u) = 4 \end{cases} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^2 f(u)du \cdot \int\limits_1^4 \frac{dv}{v} = \ln 2 \int\limits_1^2 f(u)du\ .$$

Задача 17.2 (№3965 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy\,,$$

где область D ограничена кривой $x^2 + y^2 = x + y$.

Р е ш е н и е:

Перейдём от декартовых координат x и y к полярным координатам r и φ . Тогда,

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \left\{ \text{Замена переменных} : \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} ,\ |J| = r\ , \right.$$

$$\left. f(x,y) = x + y = r(\cos\varphi + \sin\varphi) = r\sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \right\} =$$

$$= \sqrt{2} \iint\limits_{\widetilde{D}} r^2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})\,drd\varphi =$$

$$= \Big\{ \text{Граница области } D:\ x^2 + y^2 = x + y \ \longleftrightarrow\ \text{Граница области } \widetilde{D}:$$

$$r = \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \geqslant 0\ \to\ \begin{cases} -\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4\,; \\ r = \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Big\} =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})\,dr =$$

$$= \left\{ \widetilde{D} : \begin{cases} \varphi_1 = -\pi/4\,,\ \varphi_2 = 3\pi/4\,; \\ r_1(\varphi) = 0,\ r_2(\varphi) = \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin(\varphi + \pi/4)d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)} r^2\,dr = \frac{4}{3} \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin^4(\varphi + \pi/4)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \Big(1 - \cos(2\varphi + \frac{\pi}{2})\Big)^2 d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sin 2\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 + 2\sin 2\varphi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \frac{\pi}{2}\,.$$

Задача 17.3 (№3967 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy\,,$$

где область Ω ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (параметры $a, b > 0$).

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \left\{\text{Замена переменных}: \begin{cases} x = ar\cos\varphi\,; \\ y = br\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$\left.(0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = abr\,,\ f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \right.$$

$$\left. = \sqrt{1-r^2}\right\} = ab \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \sqrt{1-r^2}\,r\,drd\varphi =$$

$$= \Big\{\text{Граница области}\,\Omega: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \longleftrightarrow\ \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega}:$$

$r = 1$. Дополнительных ограничений на φ нет. На r одно дополнительное ограничение $r = 1$. Это ограничение сверху, так как область Ω конечна. $\to$ $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{array}\right\} =$

$$= ab \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \sqrt{1-r^2}\,r\,dr = \left\{\ \widetilde{\Omega}: \begin{cases} \varphi_1 = 0\,,\ \varphi_2 = 2\pi\,; \\ r_1(\varphi) = 0,\ r_2(\varphi) = 1 \end{cases}\ \right\} =$$

$$= ab \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr =$$

$$= ab \cdot \left(\varphi|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=1}\right) = \frac{2\pi ab}{3}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \frac{2\pi ab}{3}\,.$$

Задача 17.4 (№3972 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Omega:\ x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dxdy = \left\{\text{Замена переменных}: \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$(0\leqslant r<+\infty\,,\ 0\leqslant\varphi<2\pi),\ |J| = r\ , f(x,y) = \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| =$$

$$= r\cdot|\sin(\varphi+\pi/4) - r|\} = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} |\sin(\varphi+\pi/4) - r|\ r^2\,drd\varphi =$$

$$= \Big\{\text{Граница области}\,\Omega:\ x^2+y^2=1\ \longleftrightarrow\ \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega}:$$

$$r=1\ \to\ \left\{\begin{matrix} 0\leqslant\varphi<2\pi\,; \\ 0\leqslant r\leqslant 1 \end{matrix}\right\} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} |\sin(\varphi+\pi/4) - r|\ r^2\,dr =$$

$$= \left\{\widetilde{\Omega}: \begin{cases} \varphi_1 = 0\ ,\ \varphi_2 = 2\pi\,; \\ r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = 1 \end{cases}\right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 |\sin(\varphi+\pi/4) - r|\, r^2 dr =$$

$$= \{\text{В подынтегральном выражении в сомножителе } |\sin(\varphi+\pi/4) - r| \text{ второе слагаемое } (-r) \text{ принимает отрицательные значения. Первое слагаемое } \sin(\varphi+\pi/4) < 0 \text{ при } 3\pi/4 < \varphi < 7\pi/4 \text{ и } \sin(\varphi+\pi/4) \geqslant 0 \text{ при } -\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4. \text{ Поэтому, для } 3\pi/4 < \varphi < 7\pi/4 \text{ модуль } |\sin(\varphi+\pi/4) - r| = r - \sin(\varphi+\pi/4), \text{ а для } -\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$$

$$\text{модуль } |\sin(\varphi+\pi/4) - r| = \begin{cases} \sin(\varphi+\pi/4) - r, \text{ при } r \leqslant \sin(\varphi+\pi/4)\,; \\ r - \sin(\varphi+\pi/4), \text{ при } r > \sin(\varphi+\pi/4) \end{cases}$$

$$\} = \int\limits_{3\pi/4}^{7\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 (r - \sin(\varphi+\pi/4))\ r^2\,dr +$$

$$+ \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \left(\int\limits_0^{\sin(\varphi+\pi/4)} (\sin(\varphi+\pi/4) - r)\ r^2\,dr + \right.$$

$$+\int\limits_{\sin(\varphi+\pi/4)}^{1}(r-\sin(\varphi+\pi/4))\;r^2\,dr\Bigg)=$$

$$=\int\limits_{3\pi/4}^{7\pi/4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\varphi+\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\varphi=3\pi/4}^{\varphi=7\pi/4}+$$

$$+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\varphi=-\pi/4}^{\varphi=3\pi/4}+\frac{1}{6}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{9\pi}{16}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{\Omega:\;x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\,dxdy=\frac{9\pi}{16}\,.$$

Задача 17.5 (№3966 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\;dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

Область интегрирования $|x|+|y|\leqslant 1$ симметрична относительно оси x и оси y. Подынтегральная функция $f(x,y)=|x|+|y|$ чётная по переменной x и по переменной y. Поэтому,

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\;dxdy=4\cdot\iint\limits_{\Omega:\,x\geqslant 0\,,\,y\geqslant 0\,,\,x+y\leqslant 1}(x+y)\;dxdy=$$

$$=4\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}(x+y)\;dy=\left\{\Omega\;:\;\begin{cases}x_1=0\,,\;x_2=1\,;\\ y_1(x)=0\,,\;y_2(x)=1-x\end{cases}\right\}=$$

$$=4\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+y)\;dy=2\int\limits_0^1(x+y)^2\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx=2\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)\,dx=$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \left(|x| + |y|\right)\, dxdy = \frac{4}{3}\,.$$

Задача 17.6 (№3968 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} \left(x^2 + y^2\right)\, dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_{\Omega\,:\,x^4+y^4\leqslant 1} \left(x^2 + y^2\right)\, dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$(0 \leqslant r < +\infty\,,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = r\ ,\ f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) = r^2\Big\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} r^3\, drd\varphi = \big\{\text{Граница области}\,\Omega\ :\ x^4 + y^4 = 1\ \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\ \text{Граница области}\,\widetilde{\Omega}\ :\ r^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = 1\ \to$$

$$\to\ r^4\left(\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right) = 1\ \to$$

$$\to\ r\sqrt[4]{1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = 1\ \to$$

$$\to\ \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi = \varphi_2; \\ r_1(\varphi) = 0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt[4]{1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = r_2(\varphi) \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^3\, dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1/\sqrt[4]{1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} r^3\, dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{4}\left(1 - \cos(4\varphi)\right)} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos(4\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d(4\varphi)}{3 + \cos(4\varphi)} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{8\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos\varphi} = \{\text{Периодом функции}\ \cos\varphi$$

является отрезок длиной $2\pi\} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos\varphi} = \{\text{Замена переменной :}$

$t = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} \;\to\; \cos\varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,,\; d\varphi = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Функция $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ в точке $\varphi = \pi$ имеет разрыв.$\Big\} = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{d\varphi}{3+\cos\varphi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{3+\cos\varphi} = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{dt}{2+t^2} +$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt}{2+t^2} = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{2+t^2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} \left(x^2+y^2\right)\,dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

- -

Задача 17.7 (№3969 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x+y)\,\,dxdy\,,$$

где область D ограничена линиями $y^2 = 2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

Р е ш е н и е:

При вычислении данного двойного интеграла удобно перейти к новым независимым переменным u и v, связанным с переменными x и y соотношениями $u = y$, $v = x+y$. Тогда,

$$\iint\limits_D (x+y)\,\,dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} u = y\,; \\ v = x+y \end{cases}\right.,$$

$$|J| = \frac{1}{\left|\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}\right|} = \left|\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|^{-1} = 1\,,\; f(x,y) = x+y = v \left.\right\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{D}} v\,du dv = \left\{\text{Граница области } D\,:\, \begin{cases} x+y=4\,; \\ x+y=12\,; \\ y^2 = 2x \end{cases} \quad \longleftrightarrow\right.$$

$$\longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{D}\,:\, \begin{cases} v = 4\,; \\ v = 12\,; \\ u^2+2u-2v=0 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} v_1 = 4 \leqslant v \leqslant 12 = v_2; \\ u_1(v) = -1-\sqrt{1+2v} \leqslant u \leqslant -1+\sqrt{1+2v} = u_2(v) \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_{v_1}^{v_2} dv \int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} v\,du = \int\limits_{4}^{12} v\,dv \int\limits_{-1-\sqrt{1+2v}}^{-1+\sqrt{1+2v}} du =$$

$$= 2\int\limits_{4}^{12} v\sqrt{1+2v}\,dv = \Big\{\text{Замена переменной : } \sqrt{1+2v} = t \;\to$$

$$\to v = \frac{t^2-1}{2}\,,\; dv = t\,dt\Big\} = \int\limits_{3}^{5} (t^2-1)t^2\,dt = \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{t=3}^{t=5} = 543\frac{11}{15}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{D} (x+y)\;dxdy = 543\frac{11}{15}\,.$$

Задача 17.8 (№3973 [1]). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D\,:\,|x|\leqslant 1\,,\,0\leqslant y\leqslant 2} \sqrt{|y-x^2|}\;dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

В подынтегральной функции $f(x,y) = \sqrt{|y-x^2|}$ комбинация $y-x^2$ имеет отрицательные числовые значения в области $D_1 : |x| \leqslant 1\,,\, 0 \leqslant y < x^2$ и положительные значения в области $D_2 : |x| \leqslant 1\,,\, x^2 < y \leqslant 2\,$. Область интегрирования $D = D_1 \cup D_2\,$. Тогда,

$$\iint\limits_{D\,:\,|x|\leqslant 1\,,\,0\leqslant y\leqslant 2} \sqrt{|y-x^2|}\;dxdy = \iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2-y}\;dxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{y-x^2}\;dxdy =$$

$$= \{\text{Области } D_1 \text{ и } D_2 \text{ симметричны относительно оси } y \text{ и}$$

$$\text{подынтегральные функции в двойных интегралах чётные по}$$

$$\text{переменной } x.\} = 2\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2-y}\,dy + 2\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{y-x^2}\,dy =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=x^2}\right) dx + 2\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{3}\left(y-x^2\right)^{3/2}\Big|_{y=x^2}^{y=2} dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} x^3\,dx + \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} \left(2-x^2\right)^{3/2}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} \left(2-x^2\right)^{3/2}\,dx =$$

$$= \Big\{\text{Замена переменной : } x = \sqrt{2}\cos t\;,\; dx = -\sqrt{2}\sin t\,dt\Big\} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{16}{3} \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^4 t\, dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos(2t))^2 \; dt = \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{4}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1 - 2\cos(2t) + \frac{1 + \cos(4t)}{2} \right) \, dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} - 2\cos(2t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cos(4t) \right) \, dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} t - \sin(2t) + \frac{1}{8} \sin(4t) \right) \Bigg|_{t=\pi/4}^{t=\pi/2} = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2} \; .$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{D\,:\,|x| \leqslant 1\,,\,0 \leqslant y \leqslant 2} \sqrt{|y - x^2|} \; dxdy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2} \; .$$

- -

2.1.4 Занятие 18

Площадь плоской области. Из определения двойного интеграла следует, что площадь плоской области $D(x,y)$ может быть вычислена по формуле

$$S_D = \iint\limits_D dxdy\,.$$

Обобщённые полярные координаты. Обобщённые полярные координаты r и φ связаны с декартовыми переменными x и y формулами $x = ar\cos^\alpha\varphi$ и $y = br\sin^\alpha\varphi$ $(0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,,$ параметры $a\,,\ b\,,\ \alpha > 0\,)$. Модуль якобиана равен $|J| = \alpha abrcos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\,.$

- -

Задача 18.1 (№3991 [1]). Найти площадь области, ограниченной кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}\ \ (a\,,\ b\,,\ h\,,\ k - \text{положительные параметры})\,.$$

Р е ш е н и е:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \Bigg\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\cos\varphi\ ; \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

$$(0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = abr\Big\} = ab\iint\limits_{\widetilde{D}} r\,drd\varphi =$$

$$= \Bigg\{\text{Граница области } D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}\ \ \longleftrightarrow$$

$$\text{Граница области } \widetilde{D}:\ r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi\ \ \to$$

$$\to\ r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}\sin(\varphi+\psi) \geqslant 0,\ \text{где}\ \operatorname{tg}\psi = \frac{ak}{bh}\ \ \to$$

$$\to\ \ -\psi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi\ \ \to$$

$$\to\ \widetilde{D}: \begin{cases} \varphi_1 = -\psi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \psi = \varphi_2\ \ ; \\ r_1(\varphi) = 0\ \ \leqslant r \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}\sin(\varphi+\psi) = r_2(\varphi) \end{cases} \Bigg\} =$$

$$= ab\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr = ab\int\limits_{-\psi}^{\pi-\psi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{a^2/h^2+b^2/k^2}\sin(\varphi+\psi)} r\,dr =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int\limits_{-\psi}^{\pi-\psi}\sin^2(\varphi+\psi)\,d\varphi = \frac{ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos(2\varphi))\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\ .$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\ .$$

- -

Задача 18.2 (№3999(а) [1]). Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$D\ :\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1\ ,\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2\ ,\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ ,\ 4\,\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$(a\,,\ b\ >0-$ параметры$)$.

Р е ш е н и е:

Так как $a\,,\ b\ >0$, то и $x\,,\ y\ \geqslant 0$.

1. Используем обобщённые полярные координаты.

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases} x = ar\cos^4\varphi\ ; \\ y = br\sin^4\varphi \end{cases}\right.$$
$$\left.(0\leqslant r<+\infty\,,\ 0\leqslant\varphi<2\pi),\ |J| = 4abr\cos^3\varphi\sin^3\varphi\right\} =$$
$$= 4ab\iint\limits_{\widetilde{D}} r\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,drd\varphi =$$

$$= \left\{\text{Граница области } D: \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1\ ; \\ \sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=2\ ; \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\ ; \\ 4\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b} \end{cases}\right. \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\ \text{Граница области } \widetilde{D}: \begin{cases} r^{1/2}=1\ ; \\ r^{1/2}=2\ ; \\ \cos^4\varphi=\sin^4\varphi\ ; \\ 4\cos^4\varphi=\sin^4\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=1\ ; \\ r=4\ ; \\ \operatorname{tg}\varphi=1\ ; \\ \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \widetilde{D}: \left\{\begin{matrix} \varphi_1=\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{2}=\varphi_2\ \ ; \\ r_1(\varphi)=1\ \ \leqslant r\leqslant 4=r_2(\varphi) \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4ab \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \cos^3\varphi \sin^3\varphi \, d\varphi \cdot \int\limits_1^4 r \, dr =$$

$$= 30ab \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) \sin^3\varphi \, d(\sin\varphi) =$$

$$= 30ab \cdot \left(\frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{6}\sin^6\varphi \right) \Bigg|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{2}} = \left\{ \sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \right\} =$$

$$= 30ab \cdot \left(\frac{1}{4}\left(\sin^2\varphi\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\sin^2\varphi\right)^3 \right) \Bigg|_{\sin^2=1/2}^{\sin^2=2/3} =$$

$$= 30ab \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{81} - \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \right) = \frac{65}{108} ab \; .$$

2. Граница области D состоит из линий, которые принадлежат двум семействам кривых $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = const$ и $\dfrac{y\,a}{x\,b} = const$. Если в качестве новых переменных выбрать комбинации, определяющие эти семейства, то образом области D в плоскости новых переменных будет прямоугольник.

Пусть новые переменные u и v связаны с переменными x и y соотношениями $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ и $v = \dfrac{y\,a}{x\,b}$.

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} \; ; \\ v = \dfrac{y\,a}{x\,b} \end{cases} \right.$$

$$\left. |J| = \frac{1}{\left| \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \right|} = \frac{2abu^3}{\left(1+\sqrt{v}\right)^4} \right\} = 2ab \iint\limits_{\widetilde{D}} \frac{u^3}{\left(1+\sqrt{v}\right)^4} \, dudv =$$

$$= \left\{ \text{Граница области } D : \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1 \; ; \\ \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 2 \; ; \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \; ; \\ 4\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{D}: \begin{cases} u = 1\,; \\ u = 2\,; \\ v = 1\,; \\ v = 4 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \widetilde{D}: \left\{ \begin{matrix} u_1 = 1 \leqslant u \leqslant 2 = u_2 \;\; ; \\ v_1(u) = 1 \;\; \leqslant v \leqslant 4 = v_2(u) \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2ab \int\limits_1^2 u^3\, du \cdot \int\limits_1^4 \frac{dv}{\left(1+\sqrt{v}\right)^4} = \frac{15ab}{2} \int\limits_1^4 \frac{dv}{\left(1+\sqrt{v}\right)^4} =$$

$$= \left\{\text{Замена переменной : } v = t^2\right\} = 15ab \int\limits_1^2 \frac{t}{\left(1+t\right)^4} dt =$$

$$= 15ab \left(\int\limits_1^2 \frac{dt}{\left(1+t\right)^3} - \int\limits_1^2 \frac{dt}{\left(1+t\right)^4} \right) =$$

$$= 15ab \left(-\frac{1}{2\left(1+t\right)^2} + \frac{1}{3\left(1+t\right)^3} \right) \Bigg|_{t=1}^{t=2} = \frac{65}{108} ab\,.$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{65}{108} ab\,.$$

- -

Задача 18.3 (№3987 [1]). Вычислить площадь области, ограниченной кривыми

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)\;,\; x^2+y^2 \geqslant a^2 \;\; (\text{параметр } \; a>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \right.$$
$$\left. (0 \leqslant r < +\infty\,,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\; |J| = r \right\} = \iint\limits_{\widetilde{D}} r\, dr d\varphi =$$

$$= \left\{ \text{Граница области } D: \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)\;; \\ x^2+y^2 \geqslant a^2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{D}: \begin{cases} r^2 = 2a^2\cos(2\varphi) \geqslant 0\,; \\ r \geqslant a \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\to \begin{cases} \cos(2\varphi) \geqslant 0\,; \\ 2\cos(2\varphi) \geqslant 1 \end{cases} \to \cos(2\varphi) \geqslant \frac{1}{2} \to -\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n\,,$$

где $n = 0, 1 \to \widetilde{D}: \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6} \ \text{ или } \ \dfrac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{7\pi}{6}\,; \\ a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi} \end{array} \right\} =$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr + \int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2\Big|_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi =$$

$$= a^2\,(\sin 2\varphi - \varphi)\big|_{\varphi=-\pi/6}^{\varphi=\pi/6} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\,a^2\,.$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\,a^2\,.$$

- -

Задача 18.4 (№3995 [1]). Найти площадь области, ограниченной следующими кривыми

$$D\ :\ \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1\,,\ x = 0\,,\ y = 0$$

$(a\,,\ b\ > 0 -$ параметры$)$.

Р е ш е н и е:

Так как $a\,,\ b\ > 0$, то и $x\,,\ y\ \geqslant 0$.

Используем обобщённые полярные координаты.

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\cos^8\varphi\,; \\ y = br\sin^8\varphi \end{cases} \right.$$

$$\left. (0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\ |J| = 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi \right\} =$$

$$= 8ab \iint\limits_{\widetilde{D}} r\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,drd\varphi =$$

$$= \left\{ \text{Граница области } D : \begin{cases} \sqrt[4]{\dfrac{x}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{y}{b}} = 1 \, ; \\ x = 0 \, ; \\ y = 0 \end{cases} \right. \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{D} : \begin{cases} r^{1/4} = 1 \, ; \\ \cos\varphi = 0 \, ; \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \to \begin{cases} r = 1 \, ; \\ \varphi = \pi/2 \, ; \\ \varphi = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} \varphi_1 = 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 = \varphi_2; \\ r_1(\varphi) = 0 \leqslant r \leqslant 1 = r_2(\varphi) \end{cases} \right\} =$$

$$= 8ab \int\limits_0^{\pi/2} \cos^7\varphi \sin^7\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 r \, dr = 4ab \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2\varphi\right)^3 \sin^7\varphi \, d(\sin\varphi) =$$

$$= 4ab \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - 3\sin^2\varphi + 3\sin^4\varphi - \sin^6\varphi\right) \sin^7\varphi \, d(\sin\varphi) =$$

$$= 4ab \left(\frac{1}{8}\sin^8\varphi - \frac{3}{10}\sin^{10}\varphi + \frac{1}{4}\sin^{12}\varphi - \frac{1}{14}\sin^{14}\varphi \right) \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} \right) = \frac{ab}{70} \, .$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{ab}{70} \, .$$

- -

Задача 18.5 (№3999(б) [1]). Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми

$$D \, : \, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \, , \; \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4 \, , \; \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \, , \; 8\,\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

(параметры $a \, , \, b > 0$ и переменные $x \, , \, y > 0$).

Р е ш е н и е:

Используем обобщённые полярные координаты.

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\cos^3\varphi \, ; \\ y = br\sin^3\varphi \end{cases} \right.$$

$$\left. (0 \leqslant r < +\infty \, , \, 0 \leqslant \varphi < 2\pi), \; |J| = 3abr\cos^2\varphi\sin^2\varphi \right\} =$$

$$= 3ab \iint\limits_{\widetilde{D}} r\cos^2\varphi\sin^2\varphi \, drd\varphi =$$

$$= \left\{ \text{Граница области } D : \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \ ; \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 4 \ ; \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \ ; \\ 8\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \end{cases} \right. \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \text{ Граница области } \widetilde{D} : \begin{cases} r^{2/3} = 1 \ ; \\ r^{2/3} = 4 \ ; \\ \cos^3\varphi = \sin^3\varphi \ ; \\ 8\cos^3\varphi = \sin^3\varphi \end{cases} \to \begin{cases} r = 1 \ ; \\ r = 8 \ ; \\ \operatorname{tg}\varphi = 1 \ ; \\ \operatorname{tg}\varphi = 2 \end{cases} \to$$

$$\to \ \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} \varphi_1 = \pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2 = \varphi_2 \ ; \\ r_1(\varphi) = 1 \ \leqslant r \leqslant 8 = r_2(\varphi) \end{cases} \right\} =$$

$$= 3ab \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi \int\limits_{1}^{8} r \, dr =$$

$$= 3ab\,\frac{1}{2}\left(r^2\big|_{r=1}^{r=8}\right)\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2(2\varphi)\, d\varphi = \frac{189\,ab}{16}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} (1-\cos(4\varphi))\ d\varphi =$$

$$= \frac{189\,ab}{16}\left(\underbrace{\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}}_{=\operatorname{arctg}(1/3)} - \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\operatorname{arctg} 2} \right) =$$

$$= \left\{ \sin(4\varphi) = 2\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) = 4\sin\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = \right.$$

$$= 4\operatorname{tg}\varphi\cos^4\varphi\left(1-\operatorname{tg}^2\varphi\right) = 4\operatorname{tg}\varphi\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^2} \ \to \ \sin(4\varphi)\big|_{\varphi=\operatorname{arctg} 2} =$$

$$\left. = 4\operatorname{tg}\varphi \ \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^2}\right|_{\operatorname{tg}\varphi=2} = -\frac{24}{25} \right\} = \frac{189\,ab}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right) \ .$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{189\,ab}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right) \ .$$

- -

2.1.5 Занятие 19

Объём цилиндроида. Объём цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью $F(x,y) = 0$, вырезающей из плоскости $z = 0$ область D (Рис.19.1) равен

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

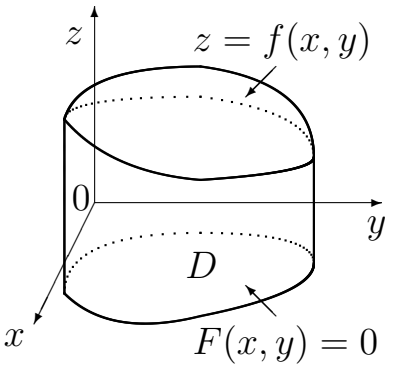

*Рис.*19.1

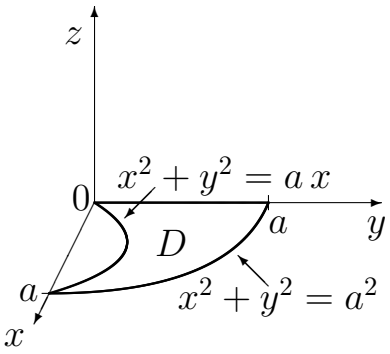

*Рис.*19.2

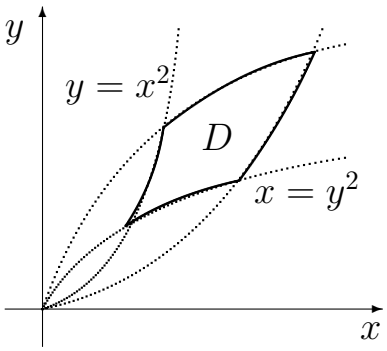

*Рис.*19.3

Задача 19.1 (№4007 [1]). Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями :

$$z = 1 + x + y \;\;,\;\; z = 0 \;\;,\;\; x + y = 1 \;\;,\;\; x = 0 \;\;,\;\; y = 0\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело является цилиндроидом. Объём цилиндроида равен

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D (1 + x + y)\,dxdy = \{D : x + y = 1\;,\; x = 0\;,$$

$$y = 0 \;\to D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \;\; ; \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \end{cases} \Big\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 + x + y)\,dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (1 + x + y)^2 \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(4 - (1 + x)^2\right) dx = \frac{1}{2} \left(4x - \frac{(1 + x)^3}{3}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}\,.$$

О т в е т:

$$V = \frac{5}{6}\,.$$

- -

Задача 19.2 (№4016 [1]). Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \;\;,\;\; x^2 + y^2 \geqslant a\,|x| \;\;\; (\,a > 0 - \text{параметр})\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело симметрично относительно координатных плоскостей $x = 0\,,\; y = 0$ и $z = 0\,$. Объём тела равен восьми объёмам цилиндроида с нижней границей $z = 0\,$, верхней границей $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и областью $D : x^2 + y^2 \leqslant a^2\,,\; x^2 + y^2 \geqslant a\,x\,,\; x, y \geqslant 0$ (Рис.19.2)$\,.$

$$V = 8 \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 8 \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \right.$$

$$\left. (0 \leqslant r < +\infty\,,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi),\; |J| = r,\; f(x,y) = \sqrt{a^2 - r^2} \right\} =$$

$$= 8 \iint\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,drd\varphi = \left\{ D : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2\,; \\ x^2 + y^2 = a\,x\,; \\ x = 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r = a\;\; ; \\ r = a\cos\varphi\,; \\ \cos\varphi = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} r = a\;\; ; \\ r = a\cos\varphi\,; \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\to \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\,; \\ a\cos\varphi \leqslant r \leqslant a \end{cases} \right\} = 8 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr =$$

$$= -\frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(a^2 - r^2\right)^{3/2} \Bigg|_{r = a\cos\varphi}^{r = a} d\varphi = \frac{8\,a^3}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{8\,a^3}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(-1 + \cos^2\varphi\right)\,d(\cos\varphi) = \frac{8\,a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16\,a^3}{9}\,.$$

О т в е т:

$$V = \frac{16\,a^3}{9}\,.$$

- -

Задача 19.3 (№4023 [1]). Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\ \ ,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\ \ ,\ \ z=0\ \ (\,a,b,c>0-\text{параметры})\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело является цилиндроидом с нижней границей $z=0$, верхней границей $f(x,y)=c\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ и областью $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$.

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=c\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$$

$$=\left\{\text{Замена переменных:}\begin{cases}x=ar\cos\varphi\,;\\ y=br\sin\varphi\end{cases}\ ,\ |J|=abr,\ f(x,y)=r^2\right\}=$$

$$=abc\iint\limits_{\widetilde{D}} r^3\,drd\varphi=\left\{D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\longleftrightarrow\right.$$

$$\longleftrightarrow\widetilde{D}:r=\cos\varphi+\sin\varphi\ \to r=\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)\geqslant 0\to$$

$$\left.\to-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4\ \to\widetilde{D}:\begin{cases}-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4\,;\\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)\end{cases}\right\}=$$

$$=abc\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)}r^3\,dr=abc\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\sin^4(\varphi+\pi/4)\,d\varphi=$$

$$=abc\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{abc}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos(2\varphi))^2\,d\varphi=\frac{abc}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-2\cos(2\varphi)+$$

$$+\cos^2(2\varphi))\,d\varphi=\frac{abc}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos(2\varphi)+\frac{1+\cos(4\varphi)}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{abc}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos(2\varphi)+\frac{1}{2}\cos(4\varphi)\right)d\varphi=\frac{3abc\pi}{8}\,.$$

О т в е т:

$$V=\frac{3abc\pi}{8}\,.$$

- -

Задача 19.4 (№4009 [1]). Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями :

$$z = x^2 + y^2 \ , \ \ y = x^2 \ , \ \ y = 1 \ , \ \ z = 0 \, .$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело симметрично относительно координатной плоскости $x = 0$. Объём тела равен двум объёмам цилиндроида с нижней границей $z = 0$, верхней границей $f(x,y) = x^2 + y^2$ и областью $D : y = x^2 \ , \ y = 1 \ , \ x \geqslant 0$.

$$V = 2 \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = 2 \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \Big\{ D : y = x^2 \ , \ y = 1 \ ,$$

$$x = 0 \ \to D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \ ; \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Big\} = 2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 \left(x^2 + y^2\right) \, dy =$$

$$= 2 \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} dx = 2 \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \right) = \frac{88}{105} \, .$$

О т в е т:

$$V = \frac{88}{105} \, .$$

- -

Задача 19.5 (№4015 [1]). Переходя к полярным координатам, найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями :

$$z = x^2 + y^2 \ , \ \ x^2 + y^2 = x \ , \ \ x^2 + y^2 = 2x \ , \ \ z = 0 \, .$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело симметрично относительно координатной плоскости $y = 0$. Объём тела равен двум объёмам цилиндроида с нижней границей $z = 0$, верхней границей $f(x,y) = x^2 + y^2$ и областью $D : x^2 + y^2 = x \ , \ x^2 + y^2 = 2x \ , \ y \geqslant 0$.

$$V = 2 \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = 2 \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \, dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} x = r\cos\varphi \ ; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} , \ |J| = r, \ f(x,y) = r^2 \right\} =$$

$$= 2\iint\limits_{\widetilde{D}} r^3\,dr d\varphi = \left\{ D: \begin{cases} x^2+y^2 = x\,; \\ x^2+y^2 = 2x\,; \\ y = 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} r = \cos\varphi \geqslant 0\,; \\ r = 2\cos\varphi\,; \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \right.$$

$$\to \left\{ \begin{cases} r = \cos\varphi \geqslant 0\,; \\ r = 2\cos\varphi\,; \\ \varphi = 0 \end{cases} \quad \to \widetilde{D}: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\,; \\ \cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \end{cases} \right\} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2cos\varphi} r^3\,dr = \frac{15}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{15}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1+\cos(2\varphi)\right)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1+2\cos(2\varphi)+\cos^2(2\varphi)\right)\,d\varphi = \frac{15}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (1+2\cos(2\varphi)+$$

$$+\frac{1+\cos(4\varphi)}{2}\Big)\,d\varphi = \frac{15}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2}+2\cos(2\varphi)+\frac{1}{2}\cos(4\varphi)\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin(2\varphi)\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{45\pi}{32}\,.$$

О т в е т:

$$V = \frac{45\pi}{32}\,.$$

- -

Задача 19.6 (№4029 [1]). Найти объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = xy\ \ ,\ \ x^2 = y\ \ ,\ \ x^2 = 2y\ \ ,\ \ y^2 = x\ \ ,\ \ y^2 = 2x\ \ ,\ \ z = 0\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданное тело является цилиндроидом с нижней границей $z = 0$, верхней границей $f(x,y) = xy$ и областью $D: x^2 = y\ ,\ \ x^2 = 2y\ ,\ \ y^2 = x\ ,\ \ y^2 = 2x$ (Рис.19.3).

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D xy\,dxdy = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y}\,; \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases} \right.$$

$$|J| = \frac{1}{\left|\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}\right|} = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{y^2}{x^2} \\ -\dfrac{x^2}{y^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}\right|^{-1} = \frac{1}{3}\ \ ,\ \ f(x,y) = uv \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{\widetilde{D}} uv\, du dv = \left\{ D : \begin{cases} x^2 = y\ ; \\ x^2 = 2y\ ; \\ y^2 = x\ ; \\ y^2 = 2x \end{cases} \quad \longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} u = 1\ ; \\ u = 2\ ; \\ v = 1\ ; \\ v = 2 \end{cases} \quad \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2\ ; \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases} \right\} = \frac{1}{3} \int\limits_1^2 u\, du \int\limits_1^2 v\, dv =$$

$$= \frac{1}{12} \left(u^2 \Big|_{u=1}^{u=2} \right) \left(v^2 \Big|_{v=1}^{v=2} \right) = \frac{3}{4}\ .$$

Ответ:

$$V = \frac{3}{4}\ .$$

- -

2.2 Тройные собственные интегралы

2.2.1 Занятие 20

По аналогии со случаем двойного собственного интеграла вычисление и замена переменных в тройном собственном интеграле осуществляется с использованием следующих теорем.

Теорема 1 (сведение тройного интеграла к повторным). Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в ограниченной области D, которая определяется следующими неравенствами

$$D:\begin{cases} x_1 \leqslant x \leqslant x_2\ ; \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\ ; \\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\ , \end{cases}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)-$ непрерывные функции. Тогда, тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области D может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Формулу можно также записать в виде

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dydz\,,$$

где $S(x)-$ сечение области D плоскостью $x = const$.

Теорема 2 (замена переменных в тройном интеграле). Если ограниченная замкнутая область $D(x,y,z)$ взаимно однозначно отображается на область $\widetilde{D}(u,v,w)$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, причём якобиан отображения

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

при $u,v,w \in \widetilde{D}$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{D}} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)\,|J|\,dudvdw\,.$$

Цилиндрические координаты.

При переходе от координат x, y, z $(-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < z < +\infty)$ к цилиндрическим координатам r, φ, z $(0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$ по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ (Рис.20.1) модуль якобиана равен

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r\,.$$

Сферические координаты.

При переходе от координат x, y, z $(-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < z < +\infty)$ к сферическим координатам r, φ, θ $(0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ по формулам $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ (Рис.20.2) модуль якобиана равен

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix}\right| = r^2\sin\theta\,.$$

Если вместо θ использовать переменную $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ $(-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2)$, то уравнения связи переменных и якобиан будут иметь вид $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$, $|J| = r^2\cos\psi$ (Рис.20.2).

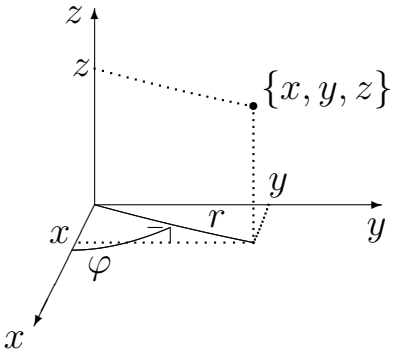

*Рис.*20.1

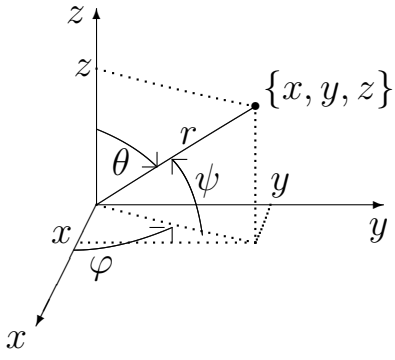

*Рис.*20.2

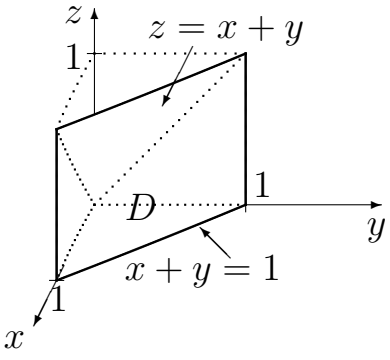

*Рис.*20.3

Задача 20.1 (№4081 [1]). Различными способами расставить пределы интегрирования в следующем тройном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} x_1 = 0 \leqslant x \leqslant 1 = x_2 \ ; \\ y_1(x) = 0 \leqslant y \leqslant 1 - x = y_2(x) \ ; \\ z_1(x,y) = 0 \leqslant z \leqslant x + y = z_2(x,y) \end{cases} \quad (\text{см. Рис.20.3}) \right\} =$$

$$= \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dydz =$$

$$= \{S(x) - \text{сечение области } D \text{ плоскостью } x = const \,(\text{см. Рис.20.4})\} =$$

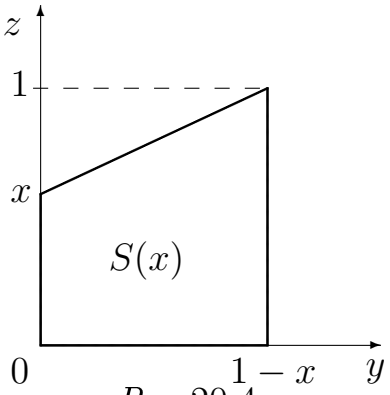

*Рис.*20.4

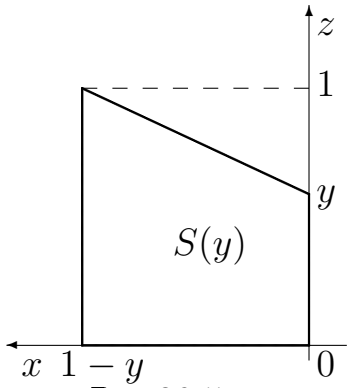

*Рис.*20.5

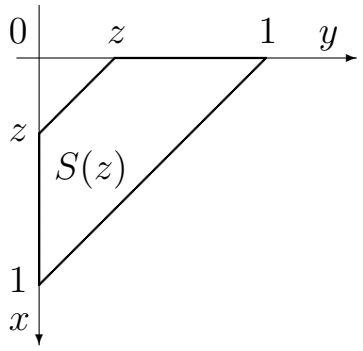

*Рис.*20.6

$$= \left\{ D : \begin{cases} y_1 = 0 \leqslant y \leqslant 1 = y_2 \ ; \\ x_1(y) = 0 \leqslant x \leqslant 1 - y = x_2(y) \ ; \\ z_1(x,y) = 0 \leqslant z \leqslant x + y = z_2(x,y) \ \ (\text{см. Рис.20.5}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \ ; \\ 0 \leqslant z \leqslant x \qquad\qquad x \leqslant z \leqslant 1 \ ; \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \qquad z - x \leqslant y \leqslant 1 - x \ \ (\text{см. Рис.20.4}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^x dz \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy \right) =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \,; & \\ 0 \leqslant z \leqslant y & y \leqslant z \leqslant 1 \,; \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 - y & z - y \leqslant x \leqslant 1 - y \;\; (\text{см. Рис.20.5}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left(\int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx + \int\limits_y^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx \right) =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1 \,; & \\ 0 \leqslant x \leqslant z & z \leqslant x \leqslant 1 \,; \\ z - x \leqslant y \leqslant 1 - x & 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \;\; (\text{см. Рис.20.6}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \left(\int\limits_0^z dx \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int\limits_z^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy \right) =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1 \,; & \\ 0 \leqslant y \leqslant z & z \leqslant y \leqslant 1 \,; \\ z - y \leqslant x \leqslant 1 - y & 0 \leqslant x \leqslant 1 - y \;\; (\text{см. Рис.20.6}) \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \left(\int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx + \int\limits_z^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx \right)$$

Задача 20.2 (№4088 [1]). Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} x_1 = 0 \leqslant x \leqslant 1 = x_2 \,; & \\ y_1(x) = 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} = y_2(x) \,; & \to \\ z_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2} = z_2(x,y) & \end{cases} \right.$$

$\to$ Границы области D: $\left\{\begin{aligned} &y = 0\,; \\ &x = 0\,; \\ &x^2+y^2+z^2 = 2\,; \\ &z^2 = x^2+y^2 \end{aligned}\right\} =$

$$= \iiint\limits_{D} z^2\,dxdydz = \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,; \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \right.$$

$$\left. |J| = r^2\sin\theta \ \ (0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \right\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{D}} r^4\cos^2\theta\sin\theta\,drd\varphi d\theta = \left\{ D: \begin{cases} y = 0\,; \\ x = 0\,; \\ x^2+y^2+z^2 = 2\,; \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \right. \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} r\sin\theta\sin\varphi = 0\,; \\ r\sin\theta\cos\varphi = 0\,; \\ r^2 = 2\,; \\ r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta \end{cases} \to \widetilde{D}: \begin{cases} \varphi = 0\,; \\ \varphi = \pi/2\,; \\ r = \sqrt{2}\,; \\ \theta = \pi/4 \end{cases} \to$$

$$\left. \to \widetilde{D}: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\,; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2} \end{cases} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^4\cos^2\theta\sin\theta\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^4\,dr = \left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \right) \cdot \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz = \frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

- -

Задача 20.3 (№4091 [1]). Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz\,,$$

где область V ограничена повехностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Р е ш е н и е:

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\varphi\,; \\ z = h \end{cases}\right.,$$

$$|J| = r\ \ (0 \leqslant r < +\infty\,,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < h < +\infty)\Big\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{V}} r^3\,drd\varphi dh = \left\{V : \begin{cases} x^2+y^2 = 2z\,; \\ z = 2 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \widetilde{V} : \begin{cases} r^2 = 2h \geqslant 0\,; \\ h = 2 \end{cases}\right.$$

$$\to \widetilde{V} : \begin{cases} r = \sqrt{2h}\,; \\ h = 2 \end{cases} \quad \to \widetilde{V} : \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ 0 \leqslant h \leqslant 2\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2h} \end{array}\right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dh \int\limits_0^{\sqrt{2h}} r^3\,dr =$$

$$= \left(\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\cdot \int\limits_0^2 \left(\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2h}}\right) dh = 2\pi \int\limits_0^2 h^2\,dh = \frac{2\pi}{3}\left(h^3\big|_{h=0}^{h=2}\right) = \frac{16\pi}{3}$$

О т в е т:

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz = \frac{16\pi}{3}$$

Задача 20.4 (№4082 [1]). Различными способами расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \left\{D : \left\{\begin{array}{c} x_1 = -1 \leqslant x \leqslant 1 = x_2\,; \\ y_1(x) = -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} = y_2(x)\,; \\ z_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1 = z_2(x,y) \end{array}\right.\right. \quad \to$$

$$\to \text{Границы области D: } \left\{\begin{array}{ll} z^2 = x^2+y^2\,; & \text{(см. Рис.20.7)} \\ z = 1 \end{array}\right\} =$$

$$= \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz =$$

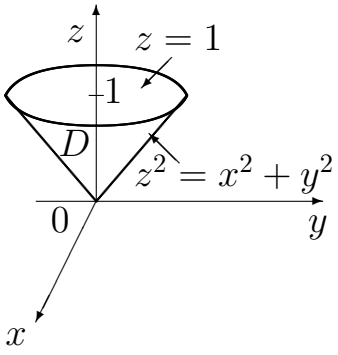

*Рис.*20.7

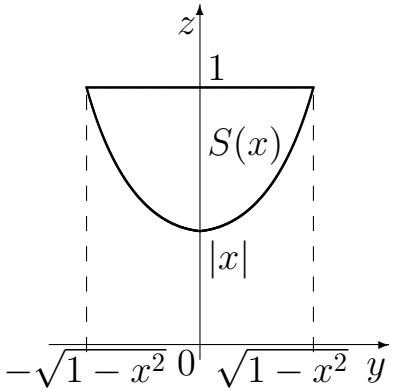

*Рис.*20.8

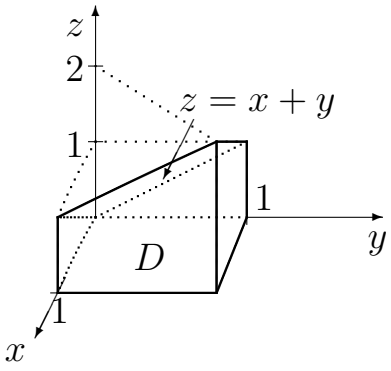

*Рис.*20.9

$$= \left\{ D: \left\{ \begin{array}{c} y_1 = -1 \leqslant y \leqslant 1 = y_2\ ; \\ x_1(y) = -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} = x_2(y)\ ; \\ z_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1 = z_2(x,y) \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \left\{ D: \left\{ \begin{array}{c} -1 \leqslant x \leqslant 1\ ; \\ |x| \leqslant z \leqslant 1\ ; \\ -\sqrt{z^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{z^2-x^2}\ \ (\text{см. Рис.20.8}) \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \left\{ D: \left\{ \begin{array}{c} -1 \leqslant y \leqslant 1\ ; \\ |y| \leqslant z \leqslant 1\ ; \\ -\sqrt{z^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{z^2-y^2} \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{|y|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx =$$

$$= \left\{ D: \left\{ \begin{array}{c} 0 \leqslant z \leqslant 1\ ; \\ -z \leqslant x \leqslant z\ ; \\ -\sqrt{z^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{z^2-x^2} \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1\ ; \\ -z \leqslant y \leqslant z\ ; \\ -\sqrt{z^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{z^2-y^2} \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$$

Задача 20.5 (№4085 [1]). Заменить тройной интеграл однократным :

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz = \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1\ ; \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ; \\ 0 \leqslant z \leqslant x+y \end{cases} \right. \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ Границы области D: $\left. \begin{cases} x = 1\ ; \\ y = 1\ ; \\ z = 0\ ; \\ z = x+y \end{cases} \right\}$ (см. Рис.20.9) $=$

$$= \iiint\limits_D f(z)\,dxdydz = \int\limits_0^2 f(z)\,dz \iint\limits_{\Omega(z)} dxdy =$$

$= \{\Omega(z) -$ сечение области D плоскостью $z = const$. Пусть $S(z)-$ площадь сечения $\Omega(z)$.

$$S(z) = \iint\limits_{\Omega(z)} dxdy = \left\{ \begin{matrix} 1 - z^2/2 \quad \text{, при } 0 \leqslant z \leqslant 1\ ; \\ (2-z)^2/2 \text{ , при } 1 \leqslant z \leqslant 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^2 S(z) f(z)\,dz = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) f(z)\,dz + \frac{1}{2} \int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$$

- -

Задача 20.6 (№4087 [1]). Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz\,,$$

где область V ограничена повехностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Р е ш е н и е:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,; \\ z = r\cos\theta \end{cases} \right.$$

$$|J| = r^2\sin\theta \;\; (0 \leqslant r < +\infty\,,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,,\, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)\Big\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{V}} r^3 \sin\theta\,drd\varphi d\theta = \big\{ V: x^2+y^2+z^2 = z \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{V}: r^2 = r\cos\theta \to \widetilde{V}: r = \cos\theta \geqslant 0 \to \widetilde{V}: \left\{\begin{matrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=\cos\theta} \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left. -\frac{\cos^5\theta}{5} \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \right) = \frac{\pi}{10}$$

О т в е т:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \frac{\pi}{10}$$

- -

Задача 20.7 (№4090 [1]). Произведя соответствующую замену переменных, вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz\,,$$

где область $D-$ внутренность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,b,c>0)\,.$

Р е ш е н и е:

Так как область D ограничена эллипсоидом, то удобно перейти от декартовой прямоугольной системы координат к обобщённым сферическим координатам, связанным с декартовыми координатами соотношениями

$x=ar\sin\theta\cos\varphi\,,\ y=br\sin\theta\sin\varphi\,,\ z=cr\cos\theta\,.$

$$\iiint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz=$$

$$=\left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases}x=ar\sin\theta\cos\varphi\,;\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\,;\\ z=cr\cos\theta\end{cases},\ |J|=abcr^2\sin\theta\right\}=$$

$$=abc\iiint\limits_{\widetilde{D}}\sqrt{1-r^2}\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=\left\{D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\longleftrightarrow\right.$$

$$\left.\longleftrightarrow\widetilde{D}:r^2=1\to\widetilde{D}:r=1\to\widetilde{D}:\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,;\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\,;\\ 0\leqslant r\leqslant 1\end{cases}\right\}=$$

$$=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,r^2\sin\theta\,dr=abc\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,r^2\,dr=abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int\limits_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,r^2\,dr=$$

$$=\{\text{Замена переменной: }r=\sin t\}=4\pi abc\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\sin^2 t\,dt=$$

$$=\pi abc\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2(2t)\,dt=\frac{\pi abc}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos(4t))\,dt=\frac{\pi^2 abc}{4}$$

О т в е т:

$$\iiint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz=\frac{\pi^2abc}{4}$$

Задача 20.8 (№4093 [1]). Найти интеграл

$$\iiint\limits_V xyz\,dxdydz\,,$$

где область V расположена в октанте $x>0$, $y>0$, $z>0$ и ограничена повехностями: $z=\dfrac{x^2+y^2}{m}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ 0<m<n)$.

Р е ш е н и е:

Поверхности, ограничивающие область V, принадлежат трём семействам поверхностей: $\dfrac{x^2+y^2}{z}=const$, $xy=const$, $\dfrac{y}{x}=const$. Если уравнения семейств использовать в качестве новых независимых переменных, то образом области V будет прямоугольный параллелепипед.

$$\iiint\limits_V xyz\,dxdydz=\left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases}u=(x^2+y^2)/z\,;\\ v=xy\,;\\ w=y/x\end{cases}\right.\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow\left\{\begin{cases}x=\sqrt{v/w}\,;\\ y=\sqrt{v\,w}\,;\\ z=v(1+w^2)/(u\,w)\end{cases},\ |J|=\frac{v(1+w^2)}{2u^2w^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\widetilde{V}}\frac{v^3(1+w^2)^2}{u^3w^3}\,dudvdw=$$

$$=\left\{V:\begin{cases}(x^2+y^2)/z=m\,;\\ (x^2+y^2)/z=n\,;\\ xy=a^2\,;\\ xy=b^2\,;\\ y/x=\alpha\,;\\ y/x=\beta\end{cases}\longleftrightarrow\widetilde{V}:\begin{cases}u=m\,;\\ u=n\,;\\ v=a^2\,;\\ v=b^2\,;\\ w=\alpha\,;\\ w=\beta\end{cases}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_m^n u^{-3}\,du\cdot\int\limits_{a^2}^{b^2}v^3\,dv\cdot\int\limits_\alpha^\beta\left(w^{-3}+2w^{-1}+w\right)\,dw=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{b^8 - a^8}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \left(b^8 - a^8 \right) \left(\left(\beta^2 - \alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right)$$

Ответ:

$$\iiint\limits_V xyz \, dxdydz =$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \left(b^8 - a^8 \right) \left(\left(\beta^2 - \alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right)$$

- -

2.2.2 Занятие 21

Непосредственно из определения тройного интеграла следует, что V_D – объём ограниченной области D может быть вычислен по формуле

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz\,.$$

Задача 21.1 (№4104 [1]). Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$az = x^2 + y^2\,,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\ \ (a > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

1. Сечение плоскостью $x = 0$ тела, объём которого ищется, изображено на Рис.21.1.

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ z = z \end{cases} , |J| = r \right\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{D}} r\,drd\varphi dz = \left\{ D: \begin{cases} az = x^2 + y^2\,; \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \longleftrightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} az = r^2\,; \\ z = r \end{cases} \rightarrow \right.$$

$$\left. \rightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ 0 \leqslant z \leqslant a\,; \\ z \leqslant r \leqslant \sqrt{az} \end{cases} \right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a dz \int\limits_z^{\sqrt{az}} r\,dr = \pi \int\limits_0^a \left(az - z^2\right) dz =$$

$$= \pi \left(\frac{az^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=a} = \pi \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi a^3}{6}$$

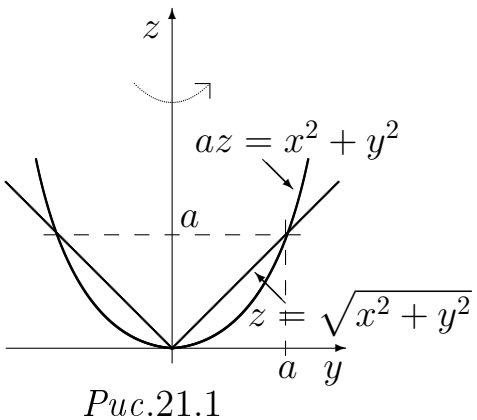

*Рис.*21.1

2. Поверхность $z = \sqrt{x^2+y^2}$, частично ограничивающая заданное тело, является одной из координатных поверхностей сферической системы координат. Используем сферические координаты для вычисления объёма тела.

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,; \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad , \quad |J| = r^2\sin\theta \right\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{D}} r^2\sin\theta\,dr d\varphi d\theta = \left\{ D : \begin{cases} az = x^2+y^2\,; \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} a\cos\theta = r\sin^2\theta\,; \\ \cos\theta = \sin\theta \end{cases} \quad \to \widetilde{D} : \begin{cases} a\cos\theta = r\sin^2\theta \geqslant 0\,; \\ \theta = \pi/4 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant a\cos\theta/\sin^2\theta \end{cases} \right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a\cos\theta/\sin^2\theta} r^2\sin\theta\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{a\cos\theta/\sin^2\theta} r^2\,dr = 2\pi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\theta/\sin^2\theta} \right) d\theta =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3\theta}{\sin^5\theta}\,d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2\theta}{\sin^5\theta}\,d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin^{-5}\theta - \sin^{-3}\theta\right) d(\sin\theta) = \frac{2\pi a^3}{3} \left(-\frac{\sin^{-4}\theta}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^{-2}\theta}{2} \right)\Big|_{\sin\theta=1/\sqrt{2}}^{\sin\theta=1} = \frac{2\pi a^3}{3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - 1 \right) = \frac{\pi a^3}{6}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{\pi a^3}{6}$$

Задача 21.2 (№4111 [1]). Вычислить объём тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h} \quad (a, b, c, h > 0 \text{ параметры}).$$

Р е ш е н и е:

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi\,; \\ y = br\sin\theta\sin\varphi\,; \\ z = cr\cos\theta \end{cases} , \quad |J| = abcr^2\sin\theta \right\} =$$

$$= abc \iiint\limits_{\widetilde{D}} r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta = \left\{ D : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h} \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : r^3 = \frac{a}{h}\sin\theta\cos\varphi \to \widetilde{D} : r = \sqrt[3]{\frac{a}{h}\sin\theta\cos\varphi} \to \cos\varphi \geqslant 0 \to$$

$$\to \widetilde{D} : \left\{ \begin{array}{c} -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\,; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{a}{h}\sin\theta\cos\varphi} \end{array} \right\} =$$

$$= abc \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{(a/h)\sin\theta\cos\varphi}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{abc}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left(r^3\Big|_{r=0}^{r=\sqrt[3]{(a/h)\sin\theta\cos\varphi}} \right) d\theta = \frac{a^2bc}{3h} \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{a^2bc}{6h} \cdot \left(\sin\varphi\Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} \right) \cdot \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \cos(2\theta)\right) d\theta = \frac{\pi a^2bc}{3h}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{\pi a^2bc}{3h}$$

- -

Задача 21.3 (№4118(а) [1]). Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ z \geqslant 0 \quad (a, b, c > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Используем обобщённые сферические координаты, связанные с декартовыми прямоугольными координатами соотношениями $x = ar\sin^\beta\theta\cos^\alpha\varphi$,

$y = br\sin^{\beta}\theta\sin^{\alpha}\varphi\,,\ z = cr\cos^{\beta}\theta\,.$ Если выбрать параметры $\alpha = 4$ и $\beta = 4\,,$ то уравнение поверхности $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}+\sqrt{\dfrac{z}{c}} = 1$ примет наиболее простой вид $\sqrt{r} = 1\,.$

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\sin^4\theta\cos^4\varphi; \\ y = br\sin^4\theta\sin^4\varphi; \\ z = cr\cos^4\theta \end{cases} \right.,$$

$$|J| = 16abcr^2\cos^3\varphi\sin^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta\big\} =$$

$$= 16abc\iiint\limits_{\widetilde{D}} r^2\cos^3\varphi\sin^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta\,drd\varphi d\theta =$$

$$= \left\{ D: \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}+\sqrt{\dfrac{z}{c}} = 1\ ; \\ x = 0\ ; \\ y = 0\ ; \\ z = 0 \end{cases} \right. \longleftrightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} r = 1\ ; \\ \cos^4\varphi = 0\ ; \\ \sin^4\varphi = 0\ ; \\ \cos^4\theta = 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} r = 1\ ; \\ \varphi = \pi/2\ ; \\ \varphi = 0\ ; \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \quad \rightarrow \widetilde{D}: \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\ ; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases} \right\} =$$

$$= 16abc\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7\theta\cos^3\theta\,d\theta\cdot\int\limits_0^1 r^2\,dr =$$

$$= \frac{16abc}{3}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^3\varphi\,d(\sin\varphi)\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7\theta\cos^2\theta\,d(\sin\theta) =$$

$$= \{\text{Замена переменных: } u = \sin\varphi\ \ ,\ \ v = \sin\theta\} =$$

$$= \frac{16abc}{3}\cdot\int\limits_0^1\left(1-u^2\right)u^3\,du\cdot\int\limits_0^1 v^7\left(1-v^2\right)\,dv =$$

$$= \frac{16abc}{3}\cdot\left(\frac{u^4}{4}-\frac{u^6}{6}\right)\Big|_{u=0}^{u=1}\cdot\left(\frac{v^8}{8}-\frac{v^{10}}{10}\right)\Big|_{v=0}^{v=1} =$$

$$= \frac{16abc}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right) = \frac{abc}{90}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{abc}{90}$$

- -

Задача 21.4 (№4119 [1]). Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$z = x^2 + y^2\,,\ z = 2\left(x^2 + y^2\right)\,,\ xy = a^2\,,\ xy = 2a^2\,,\ x = 2y\,,\ 2x = y$

$(x, y > 0\,,\ a > 0 -$ параметр$)\,.$

Р е ш е н и е:

Поверхности, ограничивающие тело D, принадлежат трём семействам поверхностей: $\dfrac{x^2+y^2}{z} = const\,,\ xy = const\,,\ \dfrac{y}{x} = const\,.$ Если семейства поверхностей использовать в качестве новых независимых переменных, то образом области D будет прямоугольный параллелепипед.

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = (x^2+y^2)/z\,; \\ v = xy\,; \\ w = y/x \end{cases} ,\ |J| = \frac{v(1+w^2)}{2u^2w^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint\limits_{\widetilde{D}} \frac{v(1+w^2)}{u^2w^2}\, dudvdw =$$

$$= \left\{ D: \begin{cases} (x^2+y^2)/z = 1\,; \\ (x^2+y^2)/z = 1/2\,; \\ xy = a^2\,; \\ xy = 2a^2\,; \\ y/x = 1/2\,; \\ y/x = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \widetilde{D}: \begin{cases} u = 1\,; \\ u = 1/2\,; \\ v = a^2\,; \\ v = 2a^2\,; \\ w = 1/2\,; \\ w = 2 \end{cases} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{1/2}^{1} u^{-2}\, du \cdot \int\limits_{a^2}^{2a^2} v\, dv \cdot \int\limits_{1/2}^{2} \left(1 + w^{-2}\right)\, dw =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-u^{-1}\right)\Big|_{u=1/2}^{u=1} \cdot \left(\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_{v=a^2}^{v=2a^2} \cdot \left(\left(w - w^{-1}\right)\Big|_{w=1/2}^{w=2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1+2) \cdot \left(\frac{4a^4}{2} - \frac{a^4}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9a^4}{4}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{9a^4}{4}$$

- -

Задача 21.5 (№4128 [1]). Найти объём тела, ограниченного поверхностью

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2\,,$$

если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (h > 0\,,\ a_i\,,\ b_i\,,\ c_i\ \ (i = \overline{1,3}) -$ параметры$)\,.$

Р е ш е н и е:

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z\,; \\ v = a_2x + b_2y + c_2z\,; \\ w = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} ,\ |J| = \frac{1}{|\Delta|} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \iiint\limits_{\widetilde{D}} dudvdw =$$

$$= \Big\{ D : (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : u^2 + v^2 + w^2 = h^2 \Big\} =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = r\sin\theta\cos\varphi; \\ v = r\sin\theta\sin\varphi; \\ w = r\cos\theta \end{cases} ,\ |J| = r^2\sin\theta \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \iiint\limits_{\widehat{D}} r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \left\{ \widetilde{D} : u^2 + v^2 + w^2 = h^2 \longleftrightarrow \widehat{D} : r^2 = h^2 \to \widehat{D} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,; \\ 0 \leqslant r \leqslant h \end{cases} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int\limits_0^{h} r^2\, dr =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \cdot \left(\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) \cdot \left(-\cos\theta\big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) \cdot \left(\frac{r^3}{3}\bigg|_{r=0}^{r=h} \right) = \frac{1}{|\Delta|} \cdot \frac{4\pi h^3}{3}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{1}{|\Delta|} \cdot \frac{4\pi h^3}{3}$$

- -

Задача 21.6 (№4107 [1]). Переходя к сферическим координатам, вычислить объём, ограниченный поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \ , \ \ x^2 + y^2 \leqslant z^2 \ \ (a > 0 - \text{параметр})\,.$$

Р е ш е н и е:

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,; \\ z = r\cos\theta \end{cases} , \ |J| = r^2\sin\theta \right\} =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{D}} r^2 \sin\theta\, drd\varphi d\theta = \left\{ D : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2az\ ; \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r = 2a\cos\theta\ ; \\ \sin^2\theta = \cos^2\theta \end{cases} \to \widetilde{D} : \begin{cases} r = 2a\cos\theta \geqslant 0\ ; \\ \theta = \pi/4 \end{cases} \to$$

$$\left. \to \widetilde{D} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta \end{cases} \right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} r^2\, dr =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta \left(\left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=0}^{r=2a\cos\theta} \right) d\theta = \frac{16\pi a^3}{3} \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta\cos^3\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{16\pi a^3}{3} \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \cos^3\theta\, d\left(\cos\theta\right) = -\frac{4\pi a^3}{3} \left(\left. \cos^4\theta \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \right) = \pi a^3$$

О т в е т:

$$V_D = \pi a^3$$

- -

Задача 21.7 (№4113 [1]). Вычислить объём тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ , \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z}{c} \ \ (a, b, c > 0 - \text{параметры})\,.$$

Р е ш е н и е:

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} x = ar\cos\varphi\,; \\ y = br\sin\varphi\,; \\ z = ch \end{cases} ,\ |J| = abcr \right\} =$$

$$= abc \iiint\limits_{\widetilde{D}} r\,drd\varphi dh = \left\{ D : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\ ; \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c} \end{cases} \longleftrightarrow \right.$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r^2 + h^2 = 1\ ;\ (\to h \leqslant 1) \\ r^2 = h\ (\to h \geqslant 0) \end{cases} \to\ h_* : h_* + h_*^2 = 1 \to$$

$$\left. \to h_* = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \to \widetilde{D} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant h \leqslant h_* \quad h_* \leqslant h \leqslant 1\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{h} \quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1-h^2} \end{cases} \right\} =$$

$$= abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{h_*} dh \int\limits_0^{\sqrt{h}} r\,dr + \int\limits_{h_*}^1 dh \int\limits_0^{\sqrt{1-h^2}} r\,dr \right) =$$

$$= \pi abc \cdot \left(\int\limits_0^{h_*} \left(r^2 \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{h}} \right) dh + \int\limits_{h_*}^1 \left(r^2 \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-h^2}} \right) dh \right) =$$

$$= \pi abc \cdot \left(\int\limits_0^{h_*} h\,dh + \int\limits_{h_*}^1 \left(1 - h^2\right) dh \right) = \pi abc \cdot \left(\left(\frac{h^2}{2} \Bigg|_{h=0}^{h=h_*} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(h - \frac{h^3}{3} \right) \Bigg|_{h=h_*}^{h=1} \right) = \pi abc \cdot \left(\frac{h_*^2}{2} + 1 - \frac{1}{3} - h_* + \frac{h_*^3}{3} \right) =$$

$$= \pi abc \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{8} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}{24} \right) = \pi abc \cdot \frac{5\left(3-\sqrt{5}\right)}{12}$$

О т в е т:

$$V_D = \pi abc \cdot \frac{5\left(3-\sqrt{5}\right)}{12}$$

- -

Задача 21.8 (№4127 [1]). Найти объём параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i \;\;,\;\; (i = 1,2,3) \;\;,\;\; (h_i > 0)\,,$$

если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0\,.$

Р е ш е н и е:

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 z\,; \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z\,; \\ w = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} \;,\; |J| = \frac{1}{|\Delta|} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \iiint\limits_{\widetilde{D}} dudvdw =$$

$$= \left\{ D : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm h_1\,; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm h_2\,; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h_3 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} u = \pm h_1\,; \\ v = \pm h_2\,; \\ w = \pm h_3 \end{cases} \quad \to \right.$$

$$\to \widehat{D} : \left\{ \begin{cases} -h_1 \leqslant u \leqslant h_1\,; \\ -h_2 \leqslant v \leqslant h_2\,; \\ -h_3 \leqslant w \leqslant h_3 \end{cases} \right\} = \frac{1}{|\Delta|} \cdot \int\limits_{-h_1}^{h_1} du \cdot \int\limits_{-h_2}^{h_2} dv \cdot \int\limits_{-h_3}^{h_3} dw =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \cdot \left(u|_{u=-h_1}^{u=h_1} \right) \cdot \left(v|_{v=-h_2}^{v=h_2} \right) \cdot \left(w|_{w=-h_3}^{w=h_3} \right) = \frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}$$

О т в е т:

$$V_D = \frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}$$

- -

2.3 Кратные собственные интегралы

2.3.1 Занятие 22

Теорема 1. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в ограниченной области Ω, определяемой неравенствами

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \bar{\bar{x}}_1 \,; \\ \bar{x}_2(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \bar{\bar{x}}_2(x_1) \,; \\ \vdots \\ \bar{x}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \bar{\bar{x}}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \,, \end{cases}$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{\bar{x}}_1$ – постоянные числа, $\bar{x}_2(x_1)$, $\bar{\bar{x}}_2(x_1)$, $\ldots$, $\bar{x}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\bar{\bar{x}}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ – непрерывные функции, то кратный собственный интеграл от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по области Ω может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_{\Omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ = \int\limits_{\bar{x}_1}^{\bar{\bar{x}}_1} dx_1 \int\limits_{\bar{x}_2(x_1)}^{\bar{\bar{x}}_2(x_1)} dx_2 \cdots \int\limits_{\bar{x}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}^{\bar{\bar{x}}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n \,.$$

Теорема 2. Пусть:

1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равномерно непрерывна в ограниченной области Ω;

2. Непрерывно дифференцируемые функции

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

осуществляют взаимно однозначное отображение области Ω в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на ограниченную область $\widetilde{\Omega}$ в пространстве переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$;

3. Якобиан отображения $J = \dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} \neq 0$ в области $\widetilde{\Omega}$.

Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{\Omega}}\cdots\int f(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\,|J|\;d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_n\,.$$

- -

Задача 22.1 (№4205 [1]). Вычислить многократный интеграл

$$I_n = \int\limits_{\Omega}\cdots\int dx_1dx_2\ldots dx_n\;,$$

если область

$$\Omega:\;\; x_1\geqslant 0\,,\;\; x_2\geqslant 0\,,\ldots,x_n\geqslant 0\,,\; x_1+x_2+\;\ldots\;+x_n\leqslant a\;\;(a>0-\text{параметр})\,.$$

Р е ш е н и е:

1. Пусть $n=1\,.\to$

$$\to\Omega:\;\; 0\leqslant x_1\leqslant a\to I_1=\int\limits_0^a dx_1=a$$

2. Пусть $n=2\,.\to$

$$\to\Omega:\;\begin{cases}0\leqslant x_1\leqslant a\;;\\ 0\leqslant x_2\leqslant a-x_1\end{cases}\qquad\to I_2=\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{a-x_1}dx_2=\int\limits_0^a(a-x_1)\;dx_1=$$

$$=\left(-\frac{(a-x_1)^2}{2}\right)\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=a}=\frac{a^2}{2}$$

3. Пусть $n=3\,.\to$

$$\to\Omega:\;\begin{cases}0\leqslant x_1\leqslant a\;;\\ 0\leqslant x_2\leqslant a-x_1\;;\\ 0\leqslant x_3\leqslant a-x_1-x_2\end{cases}\qquad\to I_3=\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{a-x_1}dx_2\int\limits_0^{a-x_1-x_2}dx_3=$$

$$=\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{a-x_1}(a-x_1-x_2)\;dx_2=\int\limits_0^a\left(-\frac{(a-x_1-x_2)^2}{2}\right)\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=a-x_1}dx_1=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^a(a-x_1)^2\;dx_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{(a-x_1)^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=a}=\frac{a^3}{3!}$$

4. $n \geqslant 4 \;\to$

$$\to \Omega : \begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant a \,; \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant a - x_1 \,; \\ \quad \vdots \\ 0 \leqslant x_n \leqslant a - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} \end{cases} \to I_n = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{a-x_1} dx_2 \ldots$$

$$\cdots \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n =$$

$$= \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{a-x_1} dx_2 \quad \ldots$$

$$\cdots \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1})\, dx_{n-1} =$$

$$= \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{a-x_1} dx_2 \quad \ldots$$

$$\cdots \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \left(-\frac{(a - x_1 \cdots - x_{n-2} - x_{n-1})^2}{2} \right) \Bigg|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1\cdots-x_{n-2}} dx_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{a-x_1} dx_2 \quad \cdots \int\limits_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2})^2 \, dx_{n-2} = \ldots$$

$$\cdots = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^a (a - x_1)^{n-1} \, dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left(-\frac{(a - x_1)^n}{n} \right) \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=a} = \frac{a^n}{n!}$$

О т в е т:

$$I_n = \frac{a^n}{n!}$$

Задача 22.2 (№4207 [1]). Вычислить многократный интеграл

$$\int\limits_\Omega \cdots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \,,$$

если область

$$\Omega : \; x_1 \geqslant 0 \,, \; x_2 \geqslant 0 \,, \ldots, x_n \geqslant 0 \,, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1 \,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int\sqrt{x_1+x_2+\,\ldots\,+x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases}\xi_1=x_1+x_2+\,\ldots\,+x_n\;;\\ \xi_2=x_2\;;\\ \quad\vdots\\ \xi_n=x_n\end{cases},\right.$$

$$\left.J^{-1}=\begin{vmatrix}1&1&1&&\ldots&1\\0&1&0&&\ldots&0\\0&0&1&0&\ldots&0\\&&&\ddots&&\\0&\ldots&&0&1&0\\0&\ldots&&&0&1\end{vmatrix}=1\right\}=\int\limits_{\widetilde{\Omega}}\cdots\int\sqrt{\xi_1}\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_n=$$

$$=\left\{\widetilde{\Omega}:\begin{cases}0\leqslant\xi_1\leqslant1\;;\\ 0\leqslant\xi_2\leqslant\xi_1\;;\\ 0\leqslant\xi_3\leqslant\xi_1-\xi_2\;;\\ \quad\vdots\\ 0\leqslant\xi_n\leqslant\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}\end{cases}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^1\sqrt{\xi_1}\,d\xi_1\underbrace{\int\limits_0^{\xi_1}d\xi_2\int\limits_0^{\xi_1-\xi_2}d\xi_3\quad\cdots\quad\int\limits_0^{\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}}d\xi_n}_{=\;\xi_1^{n-1}/(n-1)!\;\;\text{(см. Задача 22.1.)}}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1\xi_1^{n-1/2}\,d\xi_1=\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}\cdot\left(\xi_1^{n+1/2}\Big|_{\xi_1=0}^{\xi_1=1}\right)=$$

$$=\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$$

О т в е т:

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int\sqrt{x_1+x_2+\,\ldots\,+x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n=\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$$

- -

Задача 22.3 (№4201 [1]). Пусть $K(x,y)$ – непрерывная функция в области $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ и

$$N_n(x,y)=\int\limits_{\Omega_n}\cdots\int K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\;\ldots\;K(t_n,y)\,dt_1dt_2\ldots dt_n\;,$$

где область $\Omega_n:\ a \leqslant t_1 \leqslant b\,,\ a \leqslant t_2 \leqslant b\,,\ \ldots\,,\ a \leqslant t_n \leqslant b\,.$ Доказать, что

$$N_{n+m+1}(x,y) = \int\limits_a^b N_n(x,t)\, N_m(t,y)\, dt\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned}
&N_{n+m+1}(x,y) = \\
&= \int\limits_{\Omega_{n+m+1}} \cdots \int K(x,u_1)\, K(u_1,u_2)\, \ldots\, K(u_n,t) K(t,w_1)\, K(w_1,w_2)\, \ldots \\
&\ldots\, K(w_m,y)\, du_1 du_2 \ldots du_n dt dw_1 dw_2 \ldots dw_m = \\
&= \int\limits_a^b K(x,u_1)\, du_1 \int\limits_a^b K(u_1,u_2)\, du_2\, \ldots \\
&\cdots \int\limits_a^b K(u_n,t)\, dt \underbrace{\int\limits_a^b K(t,w_1)\, dw_1 \int\limits_a^b K(w_1,w_2)\, dw_2\, \ldots \int\limits_a^b K(w_m,y)\, dw_m}_{=\ N_m(t,y)} = \\
&= \int\limits_{\Omega_{n+1}} \cdots \int K(x,u_1)\, K(u_1,u_2)\, \ldots\, K(u_n,t)\, N_m(t,y)\, dt du_1 du_2 \ldots du_n = \\
&= \int\limits_a^b N_m(t,y)\, dt \underbrace{\int\limits_a^b K(x,u_1)\, du_1 \int\limits_a^b K(u_1,u_2)\, du_2\, \ldots \int\limits_a^b K(u_n,t)\, du_n}_{=\ N_n(x,t)} = \\
&= \int\limits_a^b N_m(t,y)\, N_n(x,t)\, dt
\end{aligned}$$

- -

Задача 22.4 (№4209 [1]). Найти объём $n-$ мерной пирамиды

$$\Omega:\ \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1\ ,\ x_i \geqslant 0\ (i = 1,2,\ldots,n)\ ,\ (a_i > 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,n).$$

Р е ш е н и е:

$$V_\Omega = \int\limits_\Omega \cdots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных:} \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{x_1}{a_1}\ ; \\ \xi_2 = \dfrac{x_2}{a_2}\ ; \\ \vdots \\ \xi_n = \dfrac{x_n}{a_n} \end{cases} , \right.$$

$$J^{-1} = \left. \begin{vmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & 0 & 1/a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1/a_n \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1\, a_1 \dots a_n} \right\} =$$

$$= a_1\, a_1 \dots a_n \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$

$$= \left\{ \widetilde{\Omega}:\ \xi_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \dots, n)\ ,\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leqslant 1 \to \right.$$

$$\left. \to (\text{см. Задача 22.1.}) \to V_{\widetilde{\Omega}} = \frac{1}{n!} \right\} = \frac{a_1\, a_1 \dots a_n}{n!}$$

О т в е т:

$$V_{\Omega} = \frac{a_1\, a_1 \dots a_n}{n!}$$

- -

2.4 Кратные несобственные интегралы

2.4.1 Занятие 23

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых множеств монотонно исчерпывает множество D, если :

1. Для любого n множество $\bar{D}_n$ содержится в D_{n+1};

2. Объединение всех множеств D_n совпадает с множеством D.

Определение. Если для любой последовательности $\{D_n\}$ существует предел числовой последовательности $\left\{\int\limits_{\bar{D}_n}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k\right\}$, который не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции f по множеству D и обозначается символом $\int\limits_{D}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k$. При этом несобственный интеграл называется сходящимся.

Относительно множества D и функции f предполагается, что либо множество D неограничено, либо функция f неограничена на каком-либо подмножестве множества D.

Пусть функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$ в области D. Тогда для кратных несобственных интегралов от знакоопределённых функций f справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Для сходимости несобственного интеграла от неотрицательной в области D функции f необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, была бы ограниченной числовая последовательность

$$a_n=\int\limits_{\bar{D}_n}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k\,.$$

Теорема 2. Пусть неотрицательные функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ и $g(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ всюду в открытом множестве D удовлетворяют условию $f\leqslant g$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{D}\cdots\int g(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{D}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k$ и из расходимости несобствен-

ного интеграла $\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$ следует расходимость несобственного интеграла $\int\limits_D \cdots \int g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – знакопеременная функция в области D.

Определение. Будем говорить, что несобственный кратный интеграл $\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$ сходится абсолютно, если сходится несобственный кратный интеграл $\int\limits_D \cdots \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_k)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$.

Для несобственных кратных интегралов от знакопеременных функций верны следующие утверждения.

Теорема 3. Из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла $\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$ следует его сходимость.

Теорема 4. Если кратный несобственный интеграл $\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$ сходится, то он сходится абсолютно.

Для кратных несобственных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.

- -

Задача 23.1 (№4167 [1]). Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{|x|\leqslant n\,,\ |y|\leqslant n} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy = \pi\,,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy = 0\,,$$

где $n-$ натуральное число.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим интеграл $I_{1n} = \iint\limits_{D_n'} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy$, где

$D_n' = \{|x| \leqslant n\ ,\ |y| \leqslant n\}$.

Верны следующие преобразования:

$$I_{1n} = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dy = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} \left(\sin x^2 \cos y^2 + \right.$$

$$\left. + \cos x^2 \sin y^2\right)\, dy = \int\limits_{-n}^{n} \sin x^2\, dx \int\limits_{-n}^{n} \cos y^2\, dy + \int\limits_{-n}^{n} \cos x^2\, dx \int\limits_{-n}^{n} \sin y^2\, dy =$$

$$= 2\int\limits_{-n}^{n} \sin x^2\,dx \int\limits_{-n}^{n} \cos x^2\,dx = 8\int\limits_{0}^{n} \sin x^2\,dx \int\limits_{0}^{n} \cos x^2\,dx\,.$$

Выполнив предельный переход при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n} = 8\int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2\,dx \int\limits_{0}^{\infty} \cos x^2\,dx\,.$$

Интегралы $\int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2\,dx$ и $\int\limits_{0}^{\infty} \cos x^2\,dx$ называются интегралами Френеля и каждый из них равен $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n} = 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi\,.$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_{2n} = \iint\limits_{D_n''} \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, где

$D_n'' = \left\{0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\pi n\right\}$. Сделаем замену переменных в этом интеграле: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$I_{2n} = \iint\limits_{D_n''} \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy = \iint\limits_{\widetilde{D_n''}} \sin r^2\,|J|\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{2\pi n}} \sin r^2\, r\,dr = \pi \int\limits_{0}^{\sqrt{2\pi n}} \sin r^2\,dr^2 = \pi\left(-\cos r^2\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2\pi n}}\right) = 0\,.$$

Итак получили, что для несобственного двойного интеграла

$\iint\limits_{|x|<\infty\,,\,|y|<\infty} \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$ существуют две различные монотонно исчерпывающие плоскость $\{|x|<\infty\,,\ |y|<\infty\}$ последовательности областей D_n' и D_n'', для которых соответствующие числовые последовательности значений двойных интегралов I_{1n} и I_{2n} сходятся к различным пределам.

В соответствии с определением сходимости кратного несобственного интеграла это означает, что двойной несобственный интеграл

$\iint\limits_{|x|<\infty\,,\,|y|<\infty} \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$ является расходящимся.

О т в е т:

Двойной несобственный интеграл $\iint\limits_{|x|<\infty\,,\,|y|<\infty} \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$ расходится.

- -

Задача 23.2 (№4161 [1]). Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy\,,$$

если

$$m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M \quad , \quad (p - \text{параметр})\ .$$

Р е ш е н и е:

Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости несобственного интеграла I_1 от модуля подынтегральной функции

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy\,.$$

Так как $m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$, то по признаку сравнения из сходимости несобственного двойного интеграла $I_2 = M \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$ следует сходимость интегралов I_1, I, а из расходимости интеграла $I_3 = m \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$ следует расходимость интегралов I_1 и I.

Для исследования на сходимость несобственных интегралов I_2 и I_3, рассмотрим числовую последовательность $\alpha_n = \iint\limits_{\bar{D}_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, где

$D_n : 1 \leqslant x^2+y^2 < n^2$, $n = 2,3,\ldots$. Элементы этой последовательности равны

$$\alpha_n = \iint\limits_{\bar{D}_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{D}} \frac{r\,drd\varphi}{r^{2p}} = \left\{ \bar{D}_n : \begin{cases} x^2+y^2 = 1\ ; \\ x^2+y^2 = n^2 \end{cases} \longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r = 1\ ; \\ r = n \end{cases} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\ ; \\ 1 \leqslant r \leqslant n \end{cases} \right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^n r^{1-2p}\,dr =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \dfrac{1}{2-2p}\left(r^{2-2p}\Big|_{r=1}^{r=n}\right) \quad , \text{ при } p \neq 1\ ; \\ \ln r\Big|_{r=1}^{r=n} \quad , \text{ при } p = 1 \end{cases} =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \dfrac{1}{2-2p}\left(n^{2-2p}-1\right) \ , & \text{при } \ p<1\,; \\ \dfrac{1}{2p-2}\left(1-\dfrac{1}{n^{2p-2}}\right) \ , & \text{при } \ p>1\,; \\ \ln n \ , & \text{при } \ p=1 \end{cases} .$$

Конечный предел последовательности $\{\alpha_n\}$ существует только при $p>1$ и равен

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{2p-2}}\right) = \frac{\pi}{p-1}\,.$$

Так как $I_3 \leqslant I_1 \leqslant I_2$, то несобственный интеграл I_1, а следовательно и I, сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

О т в е т:

Несобственный интеграл $I = \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \dfrac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy$

сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

- -

Задача 23.3 (№4162 [1]). Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\iint\limits_{|x|<+\infty\,,\ |y|<+\infty} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)\,(1+|y|^q)} \qquad (p,q-\text{параметры})\ .$$

Р е ш е н и е:

$$\alpha_n = \iint\limits_{\bar{D}_n:\ |x|\leqslant n\,,\ |y|\leqslant n} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)\,(1+|y|^q)} = 4\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant n\,,\ 0\leqslant y\leqslant n} \frac{dxdy}{(1+x^p)\,(1+y^q)} =$$

$$= 4\int\limits_0^n \frac{dx}{1+x^p}\int\limits_0^n \frac{dy}{1+y^q}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 4\cdot \underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^p}}_{\text{Сходится при } p>1.} \cdot \underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{dy}{1+y^q}}_{\text{Сходится при } q>1.}$$

Следовательно, конечный предел последовательности $\{\alpha_n\}$ существует только при $p>1$ и $q>1$.

О т в е т:

Несобственный интеграл $\iint\limits_{|x|<+\infty\,,\,|y|<+\infty} \dfrac{dxdy}{(1+|x|^p)\,(1+|y|^q)}$

сходится при $p>1$ и $q>1$.

- -

Задача 23.4 (№4182 [1]). Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл от разрывной функции

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dxdy\quad (0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)\ ,\ (p-\text{параметр})\,.$$

Р е ш е н и е:

Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости несобственного интеграла I_1 от модуля подынтегральной функции

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{|\varphi(x,y)|}{|x^2+xy+y^2|^p}\,dxdy\,.$$

Так как $m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$, то по признаку сравнения из сходимости несобственного двойного интеграла $I_2=M\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{dxdy}{|x^2+xy+y^2|^p}$ следует сходимость интегралов I_1, I, а из расходимости интеграла

$I_3=m\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{dxdy}{|x^2+xy+y^2|^p}$ следует расходимость интегралов I_1 и I.

Для исследования на сходимость несобственных интегралов I_2 и I_3, рассмотрим числовую последовательность $\alpha_n=\iint\limits_{\bar D_n}\dfrac{dxdy}{|x^2+xy+y^2|^p}$, где

$D_n: 1/n^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$, $n=2,3,\ldots$. Элементы этой последовательности равны

$$\alpha_n=\iint\limits_{\bar D_n}\frac{dxdy}{|x^2+xy+y^2|^p}=\left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases}x=r\cos\varphi;\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\right\}=$$

$$=\iint\limits_{\widetilde D}\frac{r^{1-2p}\,drd\varphi}{|1+\cos\varphi\sin\varphi|^p}=\left\{\bar D_n:\begin{cases}x^2+y^2=1/n^2\ ;\\ x^2+y^2=1\end{cases}\quad\longleftrightarrow\right.$$

$$\left.\longleftrightarrow\widetilde D:\begin{cases}r=1/n\ ;\\ r=1\end{cases}\quad\to\widetilde D:\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\ ;\\ 1/n\leqslant r\leqslant 1\end{cases}\right\}=\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|1+\cos\varphi\sin\varphi|^p}}_{=A}\,.$$

$$\cdot \int\limits_{1/n}^{1} r^{1-2p}\,dr = A \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{2-2p}\left(r^{2-2p}\big|_{r=1/n}^{r=1}\right) & , \text{ при } p \neq 1\,; \\ \ln r\big|_{r=1/n}^{r=1} & , \text{ при } p = 1 \end{cases} =$$

$$= A \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{2-2p}\left(1 - \dfrac{1}{n^{2-2p}}\right) & , \text{ при } p < 1\,; \\ \dfrac{1}{2-2p}\left(1 - n^{2p-2}\right) & , \text{ при } p > 1\,; \\ \ln n & , \text{ при } p = 1 \end{cases} .$$

Конечный предел последовательности $\{\alpha_n\}$ существует только при $p < 1$ и равен

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A}{2-2p}\left(1 - \frac{1}{n^{2-2p}}\right) = \frac{A}{2-2p}\,.$$

Так как $I_3 \leqslant I_1 \leqslant I_2$, то несобственный интеграл I_1, а следовательно и I, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

О т в е т:

Несобственный двойной интеграл $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dxdy$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Задача 23.5 (№4187 [1]). Вычислить двойной несобственный интеграл

$$\iint\limits_{D:\, x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

Подынтегральная функция $\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, $y = 0$. Используем последовательность монотонно исчерпывающую заданную область D вида $D_n : 1/n^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда, заданный интеграл равен

$$\iint\limits_D \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \right\} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\widetilde{D}} \ln\frac{1}{r}\,r\,drd\varphi =$$

$$= \left\{ D_n : \begin{cases} x^2+y^2 = 1/n^2\,; \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r = 1/n\,; \\ r = 1 \end{cases} \rightarrow \right.$$

$$\to \widetilde{D}: \left\{ \begin{matrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \\ 1/n \leqslant r \leqslant 1 \end{matrix} \right\} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1/n}^{1} r \ln \frac{1}{r}\, dr =$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{1}{r} \Big|_{r=1/n}^{r=1} + \frac{1}{2} \int\limits_{1/n}^{1} r\, dr \right) = \pi \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln n}{n^2} + \frac{r^2}{2} \Big|_{r=1/n}^{r=1} \right) =$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_{D\colon x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \frac{\pi}{2}$$

- -

Задача 23.6 (№4163 [1]). Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечной областью интегрирования

$$I = \iint\limits_{D\colon 0\leqslant y\leqslant 1\,,\ |x|<+\infty} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\, dxdy \quad (0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M) \quad ,$$

$(p - \text{параметр})$.

Р е ш е н и е:

Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости несобственного интеграла I_1 от модуля подынтегральной функции

$$I_1 = \iint\limits_D \frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\, dxdy\,.$$

Так как $m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$, то по признаку сравнения из сходимости несобственного двойного интеграла $I_2 = M \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$ следует сходимость интегралов I_1, I, а из расходимости интеграла

$I_3 = m \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$ следует расходимость интегралов I_1 и I.

Для исследования на сходимость несобственных интегралов I_2 и I_3, рассмотрим числовую последовательность $\alpha_n = \iint\limits_{\bar{D}_n} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$, где

$\bar{D}_n$: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-n \leqslant x \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$. Элементы этой последовательности равны

$$\alpha_n = \iint\limits_{\bar{D}_n} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-n}^{n}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}=\int\limits_0^1 dy\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}}_{\text{Сходится при }\ 2p>1\,.}$$

Конечный предел последовательности $\{\alpha_n\}$ существует при $p>\dfrac{1}{2}$.

Так как $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$, то несобственный интеграл I_1, а следовательно и I, сходится при $p>\dfrac{1}{2}$ и расходится при $p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

О т в е т:

Несобственный двойной интеграл $I=\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1\,,\ |x|<+\infty}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dxdy$

сходится при $p>\dfrac{1}{2}$ и расходится при $p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

- -

Задача 23.7 (№4169 [1]). Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{D:\ xy\geqslant 1\,,\ x\geqslant 1}\frac{dxdy}{x^py^q}\quad(p,q>0-\text{параметры})\ .$$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_D\frac{dxdy}{x^py^q}=\left\{\text{Замена переменных: }\begin{cases}u=x\ ;\\ v=xy\end{cases}\ ,\ J^{-1}=\frac{D\,(u\,,\,v)}{D\,(x\,,\,y)}=\right.$$

$$\left.=\begin{vmatrix}1 & y\\ 0 & x\end{vmatrix}=x=u\right\}=\iint\limits_{\widetilde{D}:\ u\geqslant 1\,,\ v\geqslant 1}\frac{dudv}{u^{p-q+1}v^q}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n:\ 1\leqslant u\leqslant n\,,\ 1\leqslant v\leqslant n}\frac{dudv}{u^{p-q+1}v^q}=\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n u^{q-p-1}du\cdot\int\limits_1^n v^{-q}dv=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left(u^{q-p}\Big|_{u=1}^{u=n}\right)\cdot\frac{1}{1-q}\left(v^{1-q}\Big|_{v=1}^{v=n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left(n^{q-p}-1\right)\cdot\frac{1}{1-q}\left(n^{1-q}-1\right)=\{\text{Конечный предел}$$

существует при $\begin{cases}q-p<0\ ;\\ 1-q<0\end{cases}$, то есть при $1<q<p\Big\}=$

$$=\frac{1}{(q-1)\,(p-q)}$$

О т в е т:

$$\text{Несобственный интеграл} \iint\limits_{D:\, xy\geqslant 1\,,\; x\geqslant 1} \frac{dxdy}{x^p y^q} = \frac{1}{(q-1)\,(p-q)}$$

при $1 < q < p$.

- -

Задача 23.8 (№4177 [1]). Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл

$$\iint\limits_{D:\, |x|<\infty\,,\; |y|<\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right.$$

$$\left.|J| = r\right\} = \iint\limits_{\widetilde{D}} e^{-r^2} \sin r^2\, r dr d\varphi = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n:\, 0\leqslant\varphi<2\pi\,,\; 0\leqslant r\leqslant n} e^{-r^2} \sin r^2 r dr d\varphi =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{n} e^{-r^2} \sin r^2\, r\, dr = \left\{\text{Замена переменной: } t = r^2\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \pi \underbrace{\int\limits_0^{n^2} e^{-t} \sin t\, dt}_{=\,I(n)} = \pi \lim_{n\to\infty} I(n)$$

Вычислим интеграл $I(n)$:

$$I(n) = \int\limits_0^{n^2} e^{-t} \sin t\, dt = -\, e^{-t} \cos t\Big|_{t=0}^{t=n^2} - \int\limits_0^{n^2} e^{-t} \cos t\, dt = 1 - e^{-n^2} \cos n^2 -$$

$$- \int\limits_0^{n^2} e^{-t}\, d\left(\sin t\right) = 1 - e^{-n^2} \cos n^2 - e^{-t} \sin t\Big|_{t=0}^{t=n^2} - \underbrace{\int\limits_0^{n^2} e^{-t} \sin t\, dt}_{=\,I(n)} =$$

$$= 1 - e^{-n^2} \cos n^2 - e^{-n^2} \sin n^2 - I(n)\,.$$

Отсюда следует, что

$$I(n) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-n^2} \cos n^2 - e^{-n^2} \sin n^2\right)\,.$$

Тогда,

$$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy = \pi \lim_{n\to\infty} I(n) =$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-n^2}\cos n^2 - e^{-n^2}\sin n^2\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dxdy = \frac{\pi}{2}$$

- -

Задача 23.9 (№4181 [1]). Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}\ ,$$

где область D определяется условиями : $|y| \leqslant x^2$, $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Р е ш е н и е:

Область интегрирования D изображена на Рис.23.1.

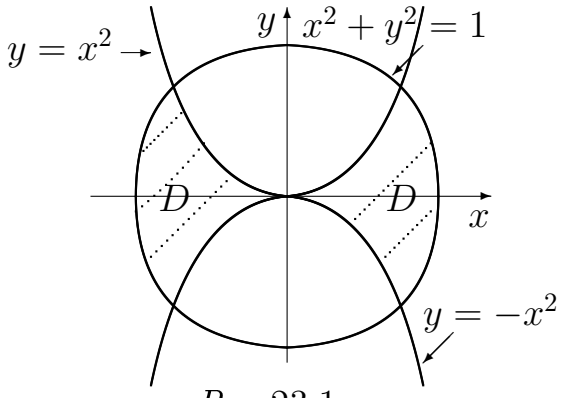

*Рис.*23.1

Подынтегральная функция $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ имеет особенность в точке $x=0\,,\ y=0$. Используем в качестве последовательности монотонно исчерпывающей заданную область D следующую последовательность областей D_n : $|y| \leqslant x^2$, $1/n^2 < x^2+y^2 \leqslant 1$.

Соответствующая числовая последовательность значений двойного интеграла по области D_n имеет элементы равные

$$\alpha_n = \iint\limits_{D_n} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}\right\} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{D}} \frac{r\,drd\varphi}{r^2} = \left\{\widetilde{D}:\ \frac{1}{n} \leqslant r \leqslant 1\ ,\ -\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) + \pi k \leqslant\right.$$

$$\leqslant \varphi \leqslant \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) + \pi k\ ,\ k=1,2\Bigg\} =$$

$$= 4\int\limits_{1/n}^{1} \frac{dr}{r} \int\limits_{0}^{\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right)} d\varphi = 4\int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{r}\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) dr\,.$$

Предел последовательности $\{\alpha_n\}$ равен

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 4\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{r}\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) dr\,.$$

Подынтегральная функция $\dfrac{1}{r}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right)$ имеет предельное значение в точке $r=0$, равное

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\arcsin\left(\frac{1+2r^2+\underline{O}\left(r^4\right)-1}{2r}\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\arcsin\left(r+\underline{O}\left(r^3\right)\right)}{r} = 1\,.$$

Тогда, интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{r}\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}\right) dr$$

является определённым интегралом, равным конечному числу.

Следовательно, заданный двойной несобственный интеграл $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$ сходится.

- -

2.5 Поверхностные интегралы

2.5.1 Занятие 24

Вычисление площади поверхности в 3-х мерном пространстве.

1. Явное задание поверхности.

Если уравнение поверхности задано явно, то есть $z = z(x, y)$, где

$(x, y) \in D-$ ограниченная замкнутая область, являющаяся проекцией поверхности на плоскость переменных x и y, то площадь поверхности равна

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,.$$

2. Параметрическое задание поверхности.

Если поверхность задана параметрически, то есть $x = x(u, v)$,

$y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $(u, v) \in D-$ ограниченная замкнутая область и функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в области D, то площадь поверхности равна

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\,,\quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\,,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

- -

Задача 24.1 (№4036 [1]). Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

Р е ш е н и е:

$z = \dfrac{xy}{a}$, $D:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2 -$ случай явного задания поверхности.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2}\,,\right.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}\Bigg\} = \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}}\,dxdy =$$

$$= \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\cos\varphi; \\ y = ar\sin\varphi \end{cases},\ |J| = a^2 r\right\} =$$

$$= a^2 \iint\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{1+r^2}\,r\,drd\varphi = \Big\{D : x^2+y^2 = a^2 \longleftrightarrow \widetilde{D} : r = 1\ \to$$

$$\to \widetilde{D} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}\Bigg\} = a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+r^2}\,r\,dr =$$

$$= \pi a^2 \int\limits_0^1 \sqrt{1+r^2}\,d\left(r^2\right) = \frac{2\pi a^2}{3}\left(\left(1+r^2\right)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=1}\right) = \frac{2\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

О т в е т:

$$S = \frac{2\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Задача 24.2 (№4040 [1]). Найти площадь части поверхности $x^2+y^2+z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2+y^2 = \pm ax \quad (a>0)$.

Р е ш е н и е:

$z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2\ ; \\ \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{4} \end{cases}$ — случай явного задания поверхности.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \left\{D_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2\ ; \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{4}; \\ x \geqslant 0\ ,\ \ y \geqslant 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= 8\iint\limits_{D_1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}\ ,\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}\right\} = 8a\iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= \left\{\text{Замена переменных: } \begin{cases} x = ar\cos\varphi; \\ y = ar\sin\varphi \end{cases},\ |J| = a^2 r\right\} =$$

$$= 8a^2 \iint\limits_{\widetilde{D}} \frac{r\,dr d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} = \left\{ D_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2\ ; \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \dfrac{a^2}{4}; \\ x \geqslant 0\ \ ,\ \ y \geqslant 0 \end{cases} \right. \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \widetilde{D} : \begin{cases} r = 1\ ; \\ r = \cos\varphi\ ; \\ \varphi = \pi/2\ \ ,\ \ \varphi = 0 \end{cases} \qquad \to \widetilde{D} : \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\ ; \\ \cos\varphi \leqslant r \leqslant 1 \end{cases} \right\} =$$

$$= 8a^2 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{1} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = 4a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(-2\left(1-r^2\right)^{1/2} \Big|_{r=\cos\varphi}^{r=1} \right) d\varphi =$$

$$= 8a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = 8a^2 \left(-\cos\varphi |_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \right) = 8a^2\,.$$

О т в е т:

$$S = 8a^2$$

- -

Задача 24.3 (№4048 [1]). Найти площадь части геликоида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, где $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Р е ш е н и е:

Поверхность задана параметрически.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dr d\varphi = \left\{ E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1\ \ , \right.$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2\ \ ,\ \ F = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} +$$

$$\left. + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \right\} = \iint\limits_D \sqrt{r^2+h^2}\, dr d\varphi = \left\{ D : \begin{cases} 0 < r < a\ ; \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{cases} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{a} \sqrt{r^2+h^2}\, dr = 2\pi \left(\left(\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \frac{h^2}{2} \ln\left(r + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sqrt{r^2+h^2} \right) \right) \Big|_{r=0}^{r=a} \right) = \pi \left(a\sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h} \right)\,.$$

О т в е т:

$$S = \pi \left(a\sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h} \right)$$

Поверхностные интегралы.

1. Поверхностный интеграл 1-ого рода.

Пусть $\Phi -$ гладкая двусторонняя ограниченная поверхность. В каждой точке поверхности задана функция $f(x,y,z)$.

Разобъём поверхность Φ кусочно-гладкими кривыми на части Φ_i. Через S_i обозначим площадь части Φ_i. В каждой части Φ_i выберем произвольную точку $\{x_i, y_i, z_i\}$ и вычислим значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$. Составим конечную сумму

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i, z_i)\, S_i.$$

Определение. Если последовательность $\{\sigma\}$, возникающая при бесконечном измельчении разбиения Φ на части Φ_i, имеет предел, который не зависит от способа разбиения на части Φ_i и выбора точек $\{x_i, y_i, z_i\}$, то этот предел называют поверхностным интегралом 1-ого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности Φ и обозначают символом

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\, dS\,.$$

Теорема 1. Пусть поверхность Φ задана параметрически, то есть

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, где $(u,v) \in \Omega -$ ограниченная замкнутая область и функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в точках области Ω. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в точках поверхности Φ, то поверхностный интеграл 1-ого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности Φ существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_{\Omega} f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right) \sqrt{EG - F^2}\, du dv\,,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

2. Поверхностный интеграл 2-ого рода.

Пусть в каждой точке поверхности Φ задан переменный вектор

$\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и единичный вектор нормали к поверхности Φ, который обозначим $\vec{n}(x,y,z) = \{\cos\alpha(x,y,z),$

$\cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z)\}$. Здесь $P, Q, R-$ компоненты вектора $\vec{A}$ в декартовой координатной системе и $\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), \gamma(x,y,z)-$ углы между вектором $\vec{n}$ и координатными осями x, y, z, соответственно (см. Рис.24.1) .

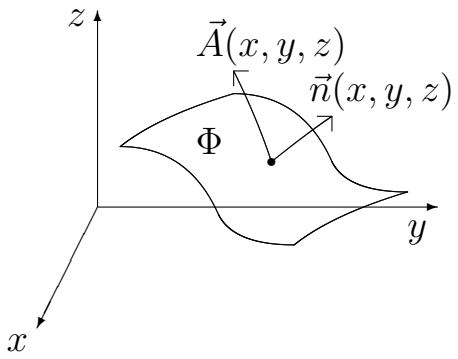

*Рис.*24.1

Зададим на поверхности Φ функцию $f(x,y,z)$, равную скалярному произведению векторов $\vec{A}$ и $\vec{n}$:

$$f(x,y,z) = \left(\vec{A}(x,y,z)\,,\,\vec{n}(x,y,z)\right) = P(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z) + \\ + Q(x,y,z)\cos\beta(x,y,z) + R(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\,.$$

Определение. Интеграл

$$\iint\limits_{\Phi} \left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)\,dS$$

называется поверхностным интегралом 2-ого рода от функции $f = \left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)$ по поверхности Φ .

Используются следующие формы записи поверхностного интеграла 2-ого рода :

$$\iint\limits_{\Phi} \left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)\,dS = \iint\limits_{\Phi} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\,dS = \\ = \{\cos\alpha\,dS = dydz \text{ – проекция элемента площади } dS \text{ на координатную плоскость } (y,z)\,,\ \cos\beta\,dS = dzdx\,,\ \cos\gamma\,dS = dxdy\} = \\ = \iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,.$$

Теорема 2. Пусть поверхность Φ задана параметрически, то есть $x = x(u,v)\,,\ y = y(u,v)\,,\ z = z(u,v)$, где $(u,v) \in \Omega$ и функции $x = x(u,v)\,,\ y = y(u,v)\,,\ z = z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в точках области Ω. Если векторы $\vec{A}(x,y,z)$ и $\vec{n}(x,y,z)$ непрерывны в точках

поверхности Φ, то поверхностный интеграл 2-ого рода от функции $\left(\vec{A},\,\vec{n}\right)$ по поверхности Φ существует и может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Phi}\left(\vec{A},\,\vec{n}\right)\,dS=\iint\limits_{\Omega}\left(P\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cos\alpha+\right.$$
$$+Q\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cos\beta+R\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cos\gamma)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\left\{\text{ где }\ \cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\right.$$
$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,,$$
$$\left.B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,,\ C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\ \text{ и }\ \sqrt{EG-F^2}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right\}=$$
$$=\pm\iint\limits_{\Omega}\left(P\cdot A+Q\cdot B+R\cdot C\right)\,dudv\,.$$

Выбор знака перед двойным интегралом согласуется с выбором стороны двусторонней поверхности Φ, по которой проводится интегрирование.

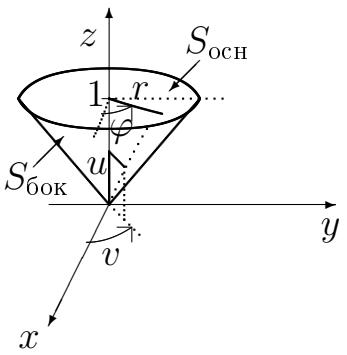

*Рис.*24.2

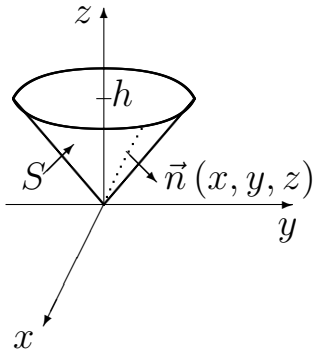

*Рис.*24.3

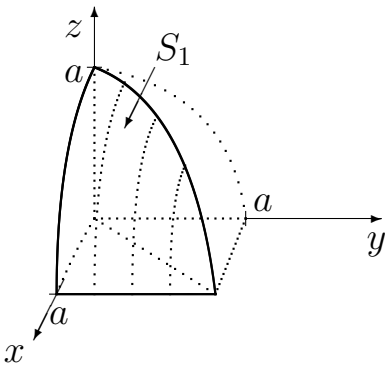

*Рис.*24.4

Задача 24.4 (№4344 [1]). Вычислить поверхностный интеграл 1-ого рода

$$\iint\limits_{S}\left(x^2+y^2\right)\,dS\,,$$

где $S-$ граница тела $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

Р е ш е н и е:

Заданное тело является конусом. Поверхность S состоит из боковой поверхности конуса $(S_{\text{бок}})$ и поверхности основания конуса $(S_{\text{осн}})$ (см. Рис.24.2).

Возможна отдельная параметризация боковой поверхности и поверхности основания конуса.

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\,dS = \iint\limits_{S_{\text{осн}}} \left(x^2+y^2\right)\,dS + \iint\limits_{S_{\text{бок}}} \left(x^2+y^2\right)\,dS =$$

$$= \left\{ S_{\text{осн}} : \begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi\ ; \\ z = 1 \end{cases} \to D_{\text{осн}} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases} ,\ E = 1\ ,\ G = r^2, \right.$$

$$F = 0\ ;\ \ S_{\text{бок}} : \begin{cases} x = u\cos v\ ; \\ y = u\sin v\ ; \\ z = u \end{cases} \to D_{\text{бок}} : \begin{cases} 0 \leqslant v < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \end{cases} ,\ \ E = 2\ ,$$

$$\left. G = u^2\ ,\ F = 0 \right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\, r\, dr + \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^1 u^2\,\sqrt{2}\,u\,du =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{4} + 2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\ .$$

О т в е т:

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\,dS = \frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

- -

Задача 24.5 (№4364 [1]). Вычислить поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\iint\limits_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy\,,$$

где S – внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2\ \ (0 \leqslant z \leqslant h)$.

Р е ш е н и е:

Единичная нормаль к внешней стороне конической поверхности S имеет компоненты $\vec{n}(x,y,z) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где $\cos\gamma = \text{const} < 0$ (см. Рис.24.3).

$$\iint\limits_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_S \left((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma\right)\,dS =$$

$$= \left\{ S : \begin{cases} x = u\cos v\ ; \\ y = u\sin v\ ; \\ z = u \end{cases} \to \Omega : \begin{cases} 0 \leqslant v < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant u \leqslant h \end{cases} ,\ \ E = 2\ ,\ G = u^2\ , \right.$$

$$F=0\ ,\ A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin v & 1\\ u\cos v & 0\end{vmatrix}=-u\cos v\ ,$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\cdots=-u\sin v\ ,\ C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\cdots=u\ ,\ \sqrt{EG-F^2}=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=u\sqrt{2}\ ,\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Так как интеграл вычисляется по внешней стороне конической поверхности, то $\cos\gamma=\text{const}<0$. Потому, в формулах для компонент единичной нормали выбирается нижний знак $(-)$. $\rightarrow$

$$\rightarrow\cos\alpha=\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v\ ,\ \cos\beta=\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\ ,\ \cos\gamma=\frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\}=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left((u\sin v-u)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v+(u-u\cos v)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v-(u\cos v-\right.$$

$$\left.-u\sin v)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sqrt{2}\,dudv=2\iint\limits_{\Omega}u^2\,(\sin v-\cos v)\ dudv=$$

$$=2\cdot\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}(\sin v-\cos v)\ dv}_{=0}\cdot\int\limits_0^h u^2\,du=0\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_S(y-z)\,dydz+(z-x)\,dzdx+(x-y)\,dxdy=0$$

- -

Задача 24.6 (№4037 [1]). Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

Р е ш е н и е:

Поверхность тела симметрична относительно всех трёх координатных плоскостей декартовой прямоугольной системы координат. Кроме того, в области $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ поверхность симметрична относительно плоскости $x=y$. Поэтому, искомая площадь равна $S=16\cdot S_1$, где S_1 – площадь поверхности, изображённой на Рис.24.4.

$$S = 16 \cdot S_1 = 16 \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \left\{ z = \sqrt{a^2 - x^2} \;\to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}\,,\; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \right\} =$$

$$= 16a \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left\{ D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a; \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \right\} = 16a \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= 16a \int\limits_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \left(- \left(a^2 - x^2\right)^{1/2} \Big|_{x=0}^{x=a} \right) = 16a^2 \,.$$

О т в е т:

$$S = 16a^2$$

- -

Задача 24.7 (№4041 [1]). Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Р е ш е н и е:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – поверхность задана явно. Область изменения переменных $D:\; x^2 + y^2 \leqslant 2x$ – круг единичного радиуса.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2} \;\to \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,,\; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \;\to \right.$$

$$\left. \to \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2} \right\} = \sqrt{2} \cdot \iint\limits_D dxdy = \sqrt{2} \cdot \underbrace{S_D}_{=\pi} = \pi\sqrt{2} \,.$$

О т в е т:

$$S = \pi\sqrt{2}$$

- -

Задача 24.8 (№4049 [1]). Найти площадь части поверхности

$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi\,,\; y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi\,,\; z = a\sin\psi \;\; (0 < a \leqslant b\,,\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,,\; 0 \leqslant \psi < 2\pi\,,$ см. Рис.24.5), ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1\,,\; \varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1\,,\; \psi = \psi_2$. Чему равна площадь поверхности всего тора?

Р е ш е н и е:

Поверхность задана параметрически.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\psi = \Bigg\{ E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \dots$$

$$\cdots = (b + a\cos\psi)^2 \ , \ G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = \cdots = a^2 \ ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi} = \cdots = 0 \Bigg\} =$$

$$= \iint\limits_D a\,(b + a\cos\psi)\ d\varphi d\psi = \left\{ D : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \ ; \\ \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2 \end{cases} \right\} =$$

$$= a \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} (b + a\cos\psi)\ d\psi =$$

$$= a \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot (b \cdot (\psi_2 - \psi_1) + a \cdot (\sin\psi_2 - \sin\psi_1)) \ .$$

Площадь поверхности всего тора равна

$$S_{\text{тора}} = a \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot (b \cdot (\psi_2 - \psi_1) + a \cdot (\sin\psi_2 - \sin\psi_1)) = \{\varphi_1 = 0 \ , \ \varphi_2 = 2\pi \ , \ \psi_1 = 0 \ , \ \psi_2 = 2\pi\} = a \cdot 2\pi \cdot (b \cdot 2\pi + a \cdot 0) = 4\pi^2 ab \, .$$

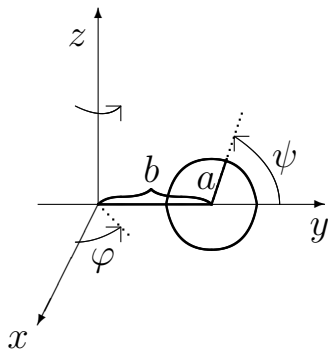

*Рис.*24.5

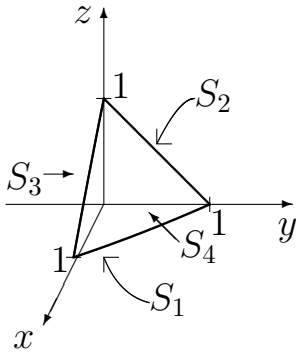

*Рис.*24.6

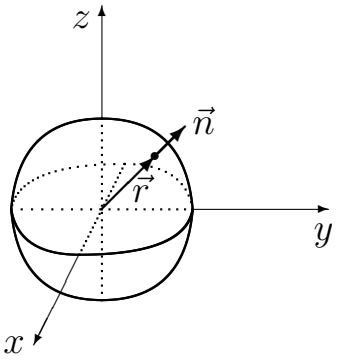

*Рис.*24.7

Задача 24.9 (№4341 [1]). На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы

$$I_1 = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dS \ \ , \ \ I_2 = \iint\limits_P \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dP \, ,$$

где S – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и P – поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| = a \ \ (a > 0)$, вписанного в эту сферу?

Р е ш е н и е:

$$I_1 = \iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right) dS = \left\{ S: \begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi; \\ y = a\sin\theta\sin\varphi; \\ z = a\cos\theta \end{cases} \quad \to E = a^2\sin^2\theta, \right.$$

$$\left. G = a^2\ ,\ F = 0\ ,\ \sqrt{EG-F^2} = a^2\sin\theta \right\} = \iint\limits_D a^2\cdot a^2\sin\theta\, d\varphi d\theta =$$

$$= \left\{ D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases} \right\} = a^4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = a^4\cdot 2\pi\cdot\left(-\cos\theta\big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right) =$$

$$= 4\pi a^4$$

$$I_2 = \iint\limits_P \left(x^2+y^2+z^2\right) dP = \left\{ P_1: \begin{cases} x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ z \geqslant 0\ ; \\ x+y+z = a \end{cases} \right\} =$$

$$= 8\iint\limits_{P_1} \left(x^2+y^2+z^2\right) dP = \left\{ D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a\ ; \\ 0 \leqslant y \leqslant a-x \end{cases} \quad ,\ z = a-x-y\ , \right.$$

$$\left. \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3} \right\} =$$

$$= 8\sqrt{3}\iint\limits_D \left(x^2+y^2+(a-x-y)^2\right) dxdy =$$

$$= 8\sqrt{3}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \left(x^2+y^2+(a-x-y)^2\right) dy = 8\sqrt{3}\int\limits_0^a \left(x^2\left(y\big|_{y=0}^{y=a-x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(y^3\big|_{y=0}^{y=a-x}\right)-\frac{1}{3}\left((a-x-y)^3\Big|_{y=0}^{y=a-x}\right)\right) dx = 8\sqrt{3}\int\limits_0^a \left(x^2(a-x)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(a-x)^3\right) dx = 8\sqrt{3}\left(\frac{a}{3}\left(x^3\big|_{x=0}^{x=a}\right)-\frac{1}{4}\left(x^4\big|_{x=0}^{x=a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left((a-x)^4\Big|_{x=0}^{x=a}\right)\right) = 8\sqrt{3}\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{6}\right) = 2\sqrt{3}\,a^4$$

О т в е т:

$$I_1 - I_2 = 2\left(2\pi-\sqrt{3}\right)a^4$$

- -

Задача 24.10 (№4345 [1]). Вычислить поверхностный интеграл 1-ого рода

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}\,,$$

где S – граница тетраэдра $x+y+z\leqslant 1\,,\ x\geqslant 0\,,\ y\geqslant 0\,,\ z\geqslant 0\,.$

Р е ш е н и е:

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \{\text{Поверхность } S \text{ состоит из треугольников } S_1\,,$$

$$S_2\,,\ S_3\,,\ S_4 \text{ (см. Рис.24.6)}\} = \underbrace{\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{(1+x+y)^2}}_{=I_1} + \underbrace{\iint\limits_{S_2} \frac{dS}{(1+x+y)^2}}_{=I_2} +$$

$$+ \underbrace{\iint\limits_{S_3} \frac{dS}{(1+x+y)^2}}_{=I_3} + \underbrace{\iint\limits_{S_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2}}_{=I_4}$$

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \left\{ S_1 : \begin{cases} x = u\,; \\ y = v\,; \\ z = 0 \end{cases} \to D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 1\,; \\ 0 \leqslant v \leqslant 1-u \end{cases} \right.,$$

$$\left. E = G = 1\,,\ F = 0\,,\ \sqrt{EG-F^2} = 1 \right\} = \iint\limits_{D_1} \frac{dudv}{(1+u+v)^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \frac{dv}{(1+u+v)^2} = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{1+u+v}\bigg|_{v=0}^{v=1-u} \right) du =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+u} \right) du = -\frac{1}{2}\cdot u\big|_{u=0}^{u=1} + \ln(1+u)\big|_{u=0}^{u=1} = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \left\{ S_2 : \begin{cases} x = 0\,; \\ y = u\,; \\ z = v \end{cases} \to D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 1\,; \\ 0 \leqslant v \leqslant 1-u \end{cases} \right.,$$

$$\left. E = G = 1\,,\ F = 0\,,\ \sqrt{EG-F^2} = 1 \right\} = \iint\limits_{D_2} \frac{dudv}{(1+u)^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{du}{(1+u)^2} \int\limits_0^{1-u} dv = \int\limits_0^1 \frac{1-u}{(1+u)^2}\,du = \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{(1+u)^2} - \frac{1}{1+u} \right) du =$$

$$= 2\left(-\left.\frac{1}{1+u}\right|_{u=0}^{u=1}\right) - \left(\ln(1+u)\Big|_{u=0}^{u=1}\right) = 1 - \ln 2$$

$$I_3 = \iint\limits_{S_3} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \left\{ S_3 : \begin{cases} x = u\ ; \\ y = 0\ ; \\ z = v \end{cases} \to D_3 : \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 1\ ; \\ 0 \leqslant v \leqslant 1-u \end{cases} \right. ,$$

$$\left. E = G = 1\ ,\ F = 0\ ,\ \sqrt{EG - F^2} = 1 \right\} = \iint\limits_{D_3} \frac{dudv}{(1+u)^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{du}{(1+u)^2} \int\limits_0^{1-u} dv = \int\limits_0^1 \frac{1-u}{(1+u)^2}\, du = \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{(1+u)^2} - \frac{1}{1+u}\right) du =$$

$$= 2\left(-\left.\frac{1}{1+u}\right|_{u=0}^{u=1}\right) - \left(\ln(1+u)\Big|_{u=0}^{u=1}\right) = 1 - \ln 2$$

$$I_4 = \iint\limits_{S_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \left\{ S_4 : \begin{cases} x = u\ ; \\ y = v\ ; \\ z = 1-u-v \end{cases} \to D_4 : \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 1\ ; \\ 0 \leqslant v \leqslant 1-u \end{cases} \right.$$

$$\left. E = G = 2\,,\ F = 1\,,\ \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{3} \right\} = \sqrt{3} \iint\limits_{D_4} \frac{dudv}{(1+u+v)^2} =$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \frac{dv}{(1+u+v)^2} = \sqrt{3} \int\limits_0^1 \left(-\left.\frac{1}{1+u+v}\right|_{v=0}^{v=1-u}\right) du =$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+u}\right) du = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} \cdot u\Big|_{u=0}^{u=1} + \ln(1+u)\Big|_{u=0}^{u=1}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3} - 1\right) \ln 2$$

О т в е т:

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3} - 1\right) \ln 2$$

- -

Задача 24.11 (№4362 [1]). Вычислить поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy\,,$$

где $S-$ внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$.

Р е ш е н и е:

1) $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy = \Big\{\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}=\{x,y,z\}=\vec{r}-$

$-$радиус-вектор точки $\{x,y,z\}\} = \iint\limits_S \left(\vec{A},\,\vec{n}\right)\,dS =$

$= \Big\{S: x^2+y^2+z^2=a^2\ -\$ сфера радиуса a (см. Рис.24.7) $\to \vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{r}\,,$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big\} = \iint\limits_S \left(\vec{r},\,\dfrac{\vec{r}}{r}\right)\,dS = \iint\limits_S \underbrace{r}_{=a \text{ на сфере } S}\,dS =$

$$= a\cdot \underbrace{\iint\limits_S dS}_{\substack{=4\pi a^2-\text{площадь}\\ \text{сферы радиуса } a}} = 4\pi a^3\,.$$

2) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$

$= \left\{ S: \begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi; \\ y=a\sin\theta\sin\varphi; \\ z=a\cos\theta \end{cases} ,\ D: \begin{cases} 0\leqslant\varphi<2\pi\ ; \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \end{cases} ,\ A=\dfrac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)} = \right.$

$= \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -a\sin\theta \end{vmatrix} = -a^2\sin^2\theta\cos\varphi\ ,\ B=\dfrac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)} = \cdots =$

$= -a^2\sin^2\theta\sin\varphi\ ,\ C=\dfrac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)} = \cdots = -a^2\sin\theta\cos\theta\ ,$

$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = a^2\sin\theta\ ,\ \cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$

$= \dfrac{-a^2\sin^2\theta\cos\varphi}{\pm a^2\sin\theta} = \mp\sin\theta\cos\varphi\ .$ При $0<\varphi<\pi/2$ и $0<\theta<\pi/2$ должно выполняться неравенство $\cos\alpha>0$. Потому, в формулах для компонент единичной нормали выбирается нижний знак $(-).\Big\} =$

$= -\iint\limits_D (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,d\varphi d\theta = -\iint\limits_D \left(-a^3\sin^3\theta\cos^2\varphi-\right.$

$$-a^3\sin^3\theta\sin^2\varphi - a^3\cos^2\theta\sin\theta\big)\ d\varphi d\theta = \iint\limits_D a^3\sin\theta\, d\varphi d\theta =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = a^3\, 2\pi\left(-\cos\theta\big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right) = 4\pi a^3\,.$$

О т в е т:

$$\iint\limits_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy = 4\pi a^3$$

- -

2.6 Криволинейные интегралы

2.6.1 Занятие 25

1. Криволинейный интеграл 1-ого рода.

Пусть L – гладкая конечная кривая в 3-х мерном пространстве. В каждой точке кривой L задана функция $f(x,y,z)$.

Разобъём кривую L на части l_i (конечное число). Через Δl_i обозначим длину части l_i. В каждой части l_i выберем произвольную точку $\{x_i, y_i, z_i\}$ и вычислим значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$. Составим конечную сумму

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i.$$

Определение. Если последовательность $\{\sigma\}$, возникающая при бесконечном измельчении разбиения L на части l_i, имеет предел, который не зависит от способа разбиения на части l_i и выбора точек $\{x_i, y_i, z_i\}$, то этот предел называется криволинейным интегралом 1-ого рода от функции $f(x,y,z)$ по кривой L и обозначают символом

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl\,.$$

Теорема 1. Пусть кривая L задана параметрически, то есть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и функции $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$z = z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции переменной t. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в точках кривой L, то криволинейный интеграл 1-ого рода от функции $f(x,y,z)$ по кривой L существует и может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}\,dt\,.$$

2. Криволинейный интеграл 2-ого рода.

Пусть в каждой точке гладкой кривой L задан переменный вектор $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и единичный вектор касательный к кривой L, который обозначим $\vec{\tau}(x,y,z) = \{\cos\alpha(x,y,z),$

$\cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z)\}$. Здесь $P, Q, R-$ компоненты вектора $\vec{A}$ в декартовой координатной системе и $\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), \gamma(x,y,z)-$ углы между вектором $\vec{\tau}$ и координатными осями x, y, z, соответственно (см. Рис.25.1) .

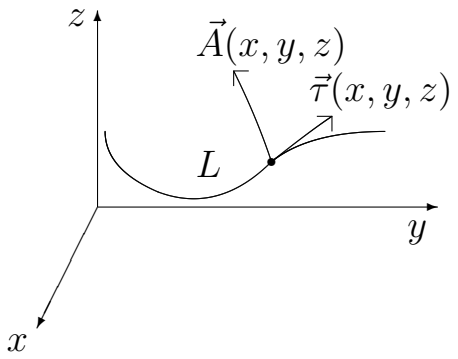

*Рис.*25.1

Зададим на кривой L функцию $f(x,y,z)$, равную скалярному произведению векторов $\vec{A}$ и $\vec{\tau}$:

$$f(x,y,z) = \left(\vec{A}(x,y,z)\,,\,\vec{\tau}(x,y,z)\right) = P(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z) + \\ + Q(x,y,z)\cos\beta(x,y,z) + R(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\,.$$

Определение. Интеграл

$$\int\limits_L \left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)\,dl$$

называется криволинейным интегралом 2-ого рода от функции $f = \left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)$ по кривой L.

Используются следующие формы записи криволинейного интеграла 2-ого рода :

$$\int\limits_L \left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)\,dl = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\,dl = \\ = \{\cos\alpha\,dl = dx \;-\text{ проекция элемента длины } dl \text{ на координатную} \\ \text{ось } x\,,\ \cos\beta\,dl = dy\,,\ \cos\gamma\,dl = dz\} = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Теорема 2. Пусть кривая L задана параметрически, то есть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (t_1- соответствует началу кривой L, t_2- соответствует концу кривой L) и функции $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$z = z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции переменной t. Если векторы $\vec{A}(x,y,z)$ и $\vec{\tau}(x,y,z)$ непрерывны в точках кривой L, то криволинейный интеграл 2-ого рода от функции $\left(\vec{A}, \vec{\tau}\right)$ по кривой L существует и может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_L \left(\vec{A}, \vec{\tau}\right) dl = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) x'\left(t\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) y'\left(t\right) + R\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) z'\left(t\right)\right) dt\,.$$

Случай полного дифференциала.

Если в криволинейном интеграле 2-ого рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ интегрируется полный дифференциал, то есть $Pdx + Qdy + Rdz = du(x,y,z)$, где $u(x,y,z)$ является однозначной функцией в 3-х мерной области V, содержащей кривую L, то независимо от вида кривой L, имеет место равенство

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)\,,$$

где $\{x_1, y_1, z_1\}$ – начальная и $\{x_2, y_2, z_2\}$ – конечная точка кривой L.

Теорема 3. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным в области V, то для того, чтобы выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ было полным дифференциалом необходимо и достаточно выполнение равенств $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$.

Тогда, функцию $u(x,y,z)$ можно найти по формуле

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz\,,$$

где $\{x_0, y_0, z_0\}$ – произвольная фиксированная точка области V.

- -

Задача 25.1 (№4226 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS\,,$$

где C – выпуклый контур, составленный линиями $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$

(r и φ – полярные координаты).

Р е ш е н и е:

Замкнутый контур C состоит из частей C_1 , C_2 и C_3 , допускающих параметризацию (см. Рис.25.2).

$$\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \int\limits_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS + \int\limits_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS + \int\limits_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS =$$

$$= \left\{ C_1 : \begin{cases} x = x\ ; \\ y = 0\ ; \\ z = 0 \end{cases} ,\ 0 \leqslant x \leqslant a\ ,\ \sqrt{x_x^2 + y_x^2 + z_x^2} = 1\ \ ; \right.$$

$$C_2 : \begin{cases} x = a\cos\varphi\ ; \\ y = a\sin\varphi\ ; \\ z = 0 \end{cases} ,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4\ ,\ \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2} = a\ \ ;$$

$$\left. C_3 : \begin{cases} x = r\cos(\pi/4)\ ; \\ y = r\sin(\pi/4)\ ; \\ z = 0 \end{cases} ,\ 0 \leqslant r \leqslant a\ ,\ \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} = 1 \right\} =$$

$$= \int\limits_0^a e^x\,dx + ae^a \cdot \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi + \int\limits_0^a e^r\,dr = e^a - 1 + ae^a\frac{\pi}{4} + e^a - 1 = 2\,(e^a - 1) + ae^a\frac{\pi}{4}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = 2\,(e^a - 1) + ae^a\frac{\pi}{4}$$

- -

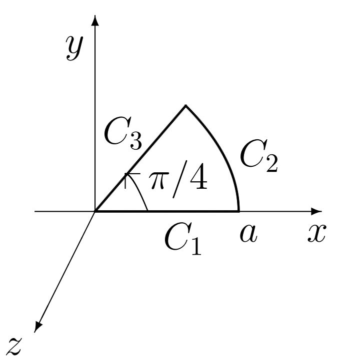

Рис.25.2

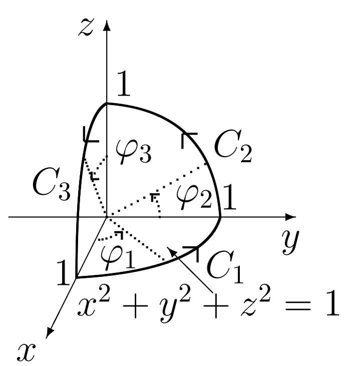

Рис.25.3

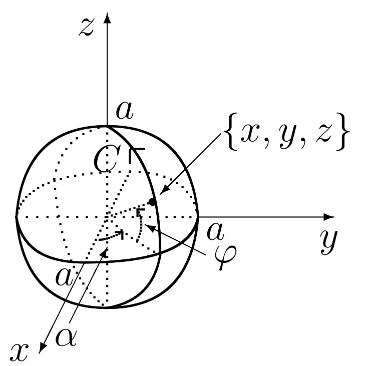

Рис.25.4

- -

Задача 25.2 (№4232 [1]). Найти длину пространственной кривой

$x = e^{-t}\cos t\,,\ y = e^{-t}\sin t\,,\ z = e^{-t}$, при $0 < t < +\infty$.

Р е ш е н и е:

$$d_L = \int\limits_L dl = \left\{ L : \begin{cases} x = e^{-t}\cos t\,; \\ y = e^{-t}\sin t\,; \\ z = e^{-t} \end{cases} ,\ 0 < t < +\infty\,,\ \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} = \right.$$

$$= \sqrt{\left(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\right)^2 + \left(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\right)^2 + \left(-e^{-t}\right)^2} =$$

$$\left. = \sqrt{3}e^{-t} \right\} = \sqrt{3}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \sqrt{3}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_L dl = \sqrt{3}$$

- -

Задача 25.3 (№4248 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 2-ого рода

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx\,,$$

где $O-$ начало координат и точка A имеет координаты $\{1, 2\}$, если:

а) $OA-$ отрезок прямой линии ;

б) $OA-$ парабола, ось которой есть Oy ;

в) $OA-$ ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA , параллельного оси Oy .

Р е ш е н и е:

а) $$\int\limits_L x\,dy - y\,dx = \left\{ L : y = 2x \to \begin{cases} x = t\,; \\ y = 2t\,; \\ z = 0 \end{cases} ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 (t \cdot 2 - 2t)\ dt = 0\,;$$

б) $$\int\limits_L x\,dy - y\,dx = \left\{ L : y = 2x^2 \to \begin{cases} x = t\,; \\ y = 2t^2\,; \\ z = 0 \end{cases} ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(t \cdot 4t - 2t^2\right)\, dt = 2 \int\limits_0^1 t^2\, dt = \frac{2}{3}\,;$$

в) $\displaystyle\int\limits_L x\,dy - y\,dx = \int\limits_{L_1} x\,dy - y\,dx + \int\limits_{L_2} x\,dy - y\,dx = \left\{ L_1 : \begin{cases} x = t\,; \\ y = 0\,; \\ z = 0 \end{cases} \right.$,

$0 \leqslant t \leqslant 1\,,\ L_2 : \left.\begin{cases} x = 1\,; \\ y = t\,; \\ z = 0 \end{cases} \right.,\ 0 \leqslant t \leqslant 2 \Bigg\} =$

$$= \int\limits_0^1 (t \cdot 0 - 0 \cdot 1)\, dt + \int\limits_0^2 (1 - t \cdot 0)\, dt = 2\,.$$

О т в е т:

а) $\displaystyle\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = 0\,;$

б) $\displaystyle\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = \frac{2}{3}\,;$

в) $\displaystyle\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = 2\,.$

- -

Задача 25.4 (№4283 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 2-ого рода

$$\int\limits_C \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz\,,$$

где C – контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ z \geqslant 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остаётся слева.

Р е ш е н и е:

Контур интегрирования C состоит из частей $C_1\,,\ C_2$ и C_3 (см. Рис.25.3).

$$\int\limits_C \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz = \int\limits_{C_1} \left(y^2 - z^2\right) dx +$$

$$+ \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz + \int\limits_{C_2} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz +$$

$$+\int\limits_{C_3}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz=\left\{C_1:\begin{cases}x=\cos\varphi_1\,;\\ y=\sin\varphi_1\,;\\ z=0\end{cases}\right.,$$

$$0\leqslant\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}\;\;;\;\;C_2:\begin{cases}x=0\,;\\ y=\cos\varphi_2\,;\\ z=\sin\varphi_2\end{cases},\;0\leqslant\varphi_2\leqslant\frac{\pi}{2}\;\;;$$

$$C_3:\left.\begin{cases}x=\sin\varphi_3\,;\\ y=0\,;\\ z=\cos\varphi_3\end{cases},\;0\leqslant\varphi_3\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}=-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3\varphi_1+\cos^3\varphi_1\right)\,d\varphi_1-$$

$$-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3\varphi_2+\cos^3\varphi_2\right)\,d\varphi_2-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^3\varphi_3+\sin^3\varphi_3\right)\,d\varphi_3=$$

$$=-3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi-3\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)\,d\left(\cos\varphi\right)-$$

$$-3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\varphi\right)\,d\left(\sin\varphi\right)=3\left(\left(\cos\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right)-\frac{1}{3}\left(\cos^3\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right)\right)-$$

$$-3\left(\left(\sin\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right)-\frac{1}{3}\left(\sin^3\varphi\big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right)\right)=-4\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_C\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz=-4$$

- -

Задача 25.5 (№4252 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 2-ого рода

$$\oint\limits_C(x+y)\,dx+(x-y)\,dy\;,\;\;\text{где } C-\text{ эллипс }\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

пробегаемый против хода часовой стрелки.

Р е ш е н и е:

На замкнутом контуре C задан вектор

$$\vec{A}(x,y,z)=\left\{\underbrace{x+y}_{=P},\,\underbrace{x-y}_{=Q},\,\underbrace{0}_{=R}\right\}\,.$$

В двумерной области, содержащей весь контур C, компоненты вектора $\vec{A}$ и их частные производные по всем переменным непрерывны. Покажем, что $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ является полным дифференциалом.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=0\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=0\ ,\ \frac{\partial R}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=0\to$$
$$\to\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\to$$
$$\to(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=du\,(x,y)\to$$
$$\to\oint\limits_C(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=u\,(x_2,y_2)-u\,(x_1,y_1)=\{\text{ Точки }\ \{x_2,y_2\}\ \text{и}$$
$\{x_1,y_1\}$ совпадают, так как контур интегрирования замкнут.$\}=0$.

О т в е т:
$$\oint\limits_C(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$$

- -

Задача 25.6 (№4286 [1]). Найти криволинейный интеграл от полного дифференциала
$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,$$
где точка $\{x_1,y_1,z_1\}$ расположена на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$, а точка $\{x_2,y_2,z_2\}$ расположена на сфере $x^2+y^2+z^2=b^2\ \ (a>0\,,\ b>0)$.

Р е ш е н и е:

Подынтегральное выражение $\dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\ Pdx+Qdy+Rdz$, где $P=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и $R=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ является полным дифференциалом, так как :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\partial P}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\partial Q}{\partial z}=$$

$$= \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\partial R}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = u\left(x_2,y_2,z_2\right) - u\left(x_1,y_1,z_1\right)\ ,$$

где

$$u\left(x,y,z\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}} + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}} =$$

$$= \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{x=x_0}^{x=x}\right) + \left(\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}\Big|_{y=y_0}^{y=y}\right) +$$

$$+ \left(\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}\Big|_{z=z_0}^{z=z}\right) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\,.$$

Тогда,

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = u\left(x_2,y_2,z_2\right) - u\left(x_1,y_1,z_1\right) =$$

$$= \sqrt{\underbrace{x_2^2+y_2^2+z_2^2}_{=b^2}} - \sqrt{\underbrace{x_1^2+y_1^2+z_1^2}_{=a^2}} = b - a\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = b - a$$

- -

Задача 25.7 (№4290 [1]). Найти первообразную функции u, если

$$du = \left(x^2 - 2yz\right) dx + \left(y^2 - 2xz\right) dy + \left(z^2 - 2xy\right) dz \,.$$

Р е ш е н и е:

$$u\,(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(x^2 - 2yz\right)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} \left(y^2 - 2x_0 z\right)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} \left(z^2 - 2x_0 y_0\right)\, dz =$$

$$= \{\text{Пусть}\ \ x_0 = y_0 = z_0 = 0\} = \int\limits_{0}^{x} \left(x^2 - 2yz\right)\, dx + \int\limits_{0}^{y} y^2\, dy + \int\limits_{0}^{z} z^2\, dz =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 2xyz + \text{const}$$

О т в е т:

$$u\,(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 2xyz + \text{const}$$

- -

Задача 25.8 (№4222 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_C y^2\, dS\,,$$

где $C -$ арка циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_C y^2\, dS = \int\limits_0^{2\pi} y^2(t)\sqrt{x_t^2 + y_t^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} a^2\,(1 - \cos t)^2\, a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= a^3\sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{5/2}\, dt = a^3\sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{5/2} dt = 8a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^5\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -16a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos^2\frac{t}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos^4\frac{t}{2}\right)\, d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16a^3 \left(\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right) - \frac{2}{3}\left(\cos^3\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left(\cos^5\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right)\right) = -16a^3\left(-2 - \frac{2}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{5}\cdot(-2)\right) = \frac{256}{15}a^3$$

О т в е т:

$$\int\limits_C y^2\,dS = \frac{256}{15}a^3$$

- -

Задача 25.9 (№4237 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_C \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dS\,,$$

где C – часть винтовой линии $x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ z = bt\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_C \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dS = \int\limits_0^{2\pi} \left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)\sqrt{x_t^2+y_t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t\Big|_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{b^2}{3}\,t^3\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

О т в е т:

$$\int\limits_C \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dS = \frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

- -

Задача 25.10 (№4254 [1]). Вычислить криволинейный интеграл 2-ого рода

$$\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}\,,$$

где C – окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Р е ш е н и е:

На замкнутом контуре C задан вектор

$$\vec{A}(x,y,z) = \left\{ \underbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}_{=P}\,,\ \underbrace{\frac{y-x}{x^2+y^2}}_{=Q}\,,\ \underbrace{0}_{=R} \right\}\,.$$

Точка $x=0\,,\ y=0\,,$ находящаяся внутри контура C, является точкой разрыва для компонент вектора $\vec{A}$.

$$\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\left\{\text{Параметризация контура } C:\begin{cases}x=a\cos\varphi\,;\\ y=a\sin\varphi\end{cases},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-a^2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)\sin\varphi-a^2\left(\cos\varphi-\sin\varphi\right)\cos\varphi}{a^2}\,d\varphi=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\,d\varphi=-2\pi$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}=-2\pi$$

Задача 25.11 (№4281 [1]). Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\,,$$

где $C-$ окружность $x^2+y^2+z^2=a^2\,,\ y=x\operatorname{tg}\alpha\ \ (0<\alpha<\pi)\,,$ пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x (см. Рис.25.4).

Р е ш е н и е:

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz=$$

$$=\left\{\text{Параметризация } C:\begin{cases}x=a\cos\varphi\cos\alpha\,;\\ y=a\cos\varphi\sin\alpha\,;\\ z=a\sin\varphi\end{cases},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\left(a\cos\varphi\sin\alpha-a\sin\varphi\right)a\cos\alpha\sin\varphi-\left(a\sin\varphi-a\cos\varphi\cos\alpha\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot a\sin\varphi\sin\alpha+\left(a\cos\varphi\cos\alpha-a\cos\varphi\sin\alpha\right)a\cos\varphi\right)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi a^2\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 2\pi a^2\,(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

- -

Задача 25.12 (№4265 [1]). Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\{x_1,y_1\}}^{\{x_2,y_2\}} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy\,, \quad \text{где } \varphi \text{ и } \psi - \text{ непрерывные функции.}$$

Р е ш е н и е:

Задан вектор

$$\vec{A}(x,y,z) = \left\{ \underbrace{\varphi(x)}_{=P}, \underbrace{\psi(y)}_{=Q}, \underbrace{0}_{=R} \right\}.$$

Компоненты вектора $\vec{A}$ и их частные производные по всем переменным непрерывны. Покажем, что $\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$ является полным дифференциалом.

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\psi(y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial z} = 0$$

Следовательно,

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = du(x,y)\,,$$

где

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy\,.$$

Тогда,

$$\int\limits_{\{x_1,y_1\}}^{\{x_2,y_2\}} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_2} \varphi(x)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y_2} \psi(y)\, dy - \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{y_0}^{y_1} \psi(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)\, dy\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{\{x_1,y_1\}}^{\{x_2,y_2\}} \varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)\, dy$$

- -

Задача 25.13 (№4289 [1]). Найти следующий криволинейный интеграл от полного дифференциала

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\ ,$$

где f – непрерывная функция.

Р е ш е н и е:

Задан вектор $\vec{A}(x,y,z) = \left\{ \underbrace{xf}_{=P}, \underbrace{yf}_{=Q}, \underbrace{zf}_{=R} \right\}$. Компоненты вектора $\vec{A}$ и их частные производные по всем переменным непрерывны. Покажем, что $f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ является полным дифференциалом.

$$\frac{\partial xf}{\partial y} = \frac{xyf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial yf}{\partial x} = \frac{xyf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial yf}{\partial z} = \frac{yzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial zf}{\partial y} = \frac{yzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial zf}{\partial x} = \frac{xzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial xf}{\partial z} = \frac{xzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Следовательно,

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = du\,(x,y,z)\ ,$$

где

$$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)x\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} f\left(\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}\right)y\,dy+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z} f\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}\right)z\,dz=\{\text{Замена переменных: } x^2=t^2-y^2-z^2\,,$$

$$x\,dx=t\,dx\ ;\ \ y^2=v^2-x_0^2-z^2\,,\ y\,dy=v\,dv\ ;\ \ z^2=w^2-x_0^2-y_0^2\,,$$

$$z\,dz=w\,dw\}=\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f(t)\,t\,dt+\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}}^{\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}} f(v)\,v\,dv+$$

$$+\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}} f(w)\,w\,dw=\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f(t)\,t\,dt\,.$$

Тогда,

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=$$

$$=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1)=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} f(t)\,t\,dt-\int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} f(t)\,t\,dt=\int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} f(t)\,t\,dt\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{\{x_1,y_1,z_1\}}^{\{x_2,y_2,z_2\}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=\int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} f(t)\,t\,dt$$

Задача 25.14 (№4291 [1]). Найти первообразную функции u, если

$$du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}\,dz\,.$$

Р е ш е н и е:

$$u\left(x,y,z\right)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{x_0}{z}+\frac{x_0}{y^2}\right)\,dy-\int\limits_{z_0}^{z}\frac{x_0y_0}{z^2}\,dz=$$

$$=\{\text{Пусть}\ \ x_0=0\}=\int\limits_{0}^{x}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\,dx=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+\mathrm{const}$$

О т в е т:

$$u\left(x,y,z\right)=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+\mathrm{const}$$

- -

2.7 Формулы Грина, Стокса, Остроградского

2.7.1 Занятие 26

Формула Грина.

Пусть $L-$ замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область D. Направление обхода контура L выбрано так, что область D остаётся слева. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области D и на её границе.

Тогда имеет место формула Грина

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L P\,(x,y)\;dx + Q\,(x,y)\;dy\,.$$

Следствие формулы Грина.

Площадь плоской области D, ограниченной кусочно-гладким контуром L равна

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx\,.$$

Контур интегрирования L пробегается так, что ограниченная им область D остаётся слева.

- -

Задача 26.1 (№4302 [1]). На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy\,,$$

где $AmB-$ прямая, соединяющая точки $A\{1,1\}$ и $B\{2,6\}$, и $AnB-$ парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

Р е ш е н и е:

$$I_1 - I_2 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy - \int\limits_{AnB} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy =$$

$$= -\int\limits_{BmA} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy - \int\limits_{AnB} (x+y)^2\;dx - (x-y)^2\;dy =$$

$$= \{\text{Замкнутый контур } L = AnB \cup BmA\} =$$

$$= -\oint\limits_L \underbrace{(x+y)^2}_{=P}\, dx \underbrace{-(x-y)^2}_{=Q}\, dy = \{\text{Используем формулу Грина}\} =$$

$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x+y) =\right.$$

$$\left. = -4x\right\} = 4\iint\limits_D x\, dxdy = \left\{D : \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2\,; \\ 2x^2 - x \leqslant y \leqslant 5x - 4 \end{cases}\right\} =$$

$$= 4\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x^2-x}^{5x-4} x\, dy = 4\int\limits_1^2 \left(6x^2 - 4x - 2x^3\right) dx =$$

$$= 4\left(2\left(2^3 - 1\right) - 2\left(2^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(2^4 - 1\right)\right) = 2$$

О т в е т:

$$I_1 - I_2 = 2$$

- -

Задача 26.2 (№4308 [1]). С помощью криволинейных интегралов вычислить площадь, ограниченную кривой $x = a\cos t\,,\ y = b\sin t\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (эллипс) .

Р е ш е н и е:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

О т в е т:

$$S = \pi ab$$

- -

Задача 26.3 (№4303 [1]). Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AnO} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy\,,$$

где $AnO-$ верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A\{a, 0\}$ до точки $O\{0, 0\}$.

У к а з а н и е . Дополнить путь AnO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси x.

Р е ш е н и е:

$$I + \int\limits_{OA} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy = \{\text{Замкнутый контур}$$

$$L = OA \cup AnO \;\; ; \;\; P = e^x \sin y - my \;,\; Q = e^x \cos y - m\} =$$

$$= \oint\limits_L P\, dx + Q\, dy = \{\text{Используем формулу Грина}\} =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = m \right\} =$$

$$= m \cdot \underbrace{\iint\limits_D dxdy}_{\substack{\text{площадь} \\ \text{полукруга радиуса } a/2}} = m \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi m a^2}{8}$$

Интеграл

$$\int\limits_{OA} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy =$$

$$= \left\{ \text{Параметризация контура } OA : \begin{cases} x = t \;; \\ y = 0 \end{cases} \;, \; 0 \leqslant t \leqslant a \right\} =$$

$$= \int\limits_0^a 0\, dt = 0\,.$$

Следовательно,

$$I = \frac{\pi m a^2}{8}\,.$$

О т в е т:

$$I = \frac{\pi m a^2}{8}$$

- -

Задача 26.4 (№4307 [1]). Вычислить

$$I = \oint\limits_C \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}\,,$$

где C – простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

У к а з а н и е . Рассмотреть два случая:

1) Начало координат находится вне контура C;

2) Контур C окружает начало координат.

Р е ш е н и е:

1) Начало координат находится вне контура C.

$$I = \oint\limits_C \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=Q(x,y)}\, dy \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{=P(x,y)}\, dx = \left\{ P(x,y)\ ,\ Q(x,y)\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \cdots = \right.$$

$$= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ \left.\frac{\partial Q}{\partial x} = \cdots = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \right.$$ непрерывны в области $\bar{D}$, ограниченной контуром C. Следовательно, применима

$$\text{формула Грина. } \} = \iint\limits_D \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0} \right) dxdy = 0$$

2) Контур C окружает начало координат.

Точка $O\{0,0\}$, лежащая внутри контура C, является точкой разрыва функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, нарушены условия применимости формулы Грина.

Контур C определяется заданием функции $r(\varphi)$. Тогда,

$$I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \left\{ \text{Параметризация контура } C : \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi; \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \right.,$$

$$\left. 0 \leqslant \varphi < 2\pi \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(r(\varphi)\cos\varphi \cdot \left(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \right) - r(\varphi)\sin\varphi \cdot \left(r'(\varphi)\cos\varphi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - r(\varphi)\sin\varphi \right) \right) / r^2(\varphi)\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,.$$

О т в е т:

$$1)\quad \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$$

$$2)\quad \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

Задача 26.5 (№4311 [1]). С помощью криволинейных интегралов вычислить площадь, ограниченную кривой $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$ (петля декартова листа) .

У к а з а н и е . Положить $y=tx$ $(t-$ параметр$)$.

Р е ш е н и е:

Проведём параметризацию линии $x^3+y^3=3axy$. Пусть $y=tx$. Тогда, уравнение линии $x^3+y^3=3axy$ принимает вид $x^3+t^3x^3=3atx^2$. Следовательно, $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$ и $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$, где параметр $-\infty<t<+\infty$. На Рис.26.1 для интервалов $-\infty<t<-1$, $-1<t<0$ и $0<t<+\infty$ представлена линия $x^3+y^3=3axy$.

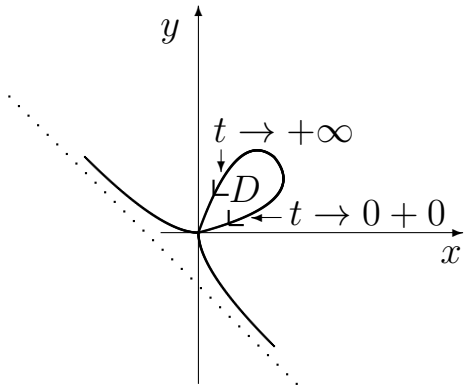

*Рис.*26.1

Линия $x^3+y^3=3axy$ ограничивает конечную область D при изменении параметра параметризации в диапазоне $0<t<+\infty$.

$$S_D=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx=\left\{\text{Параметризация контура } C:\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3};\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases},\right.$$

$$\left.0\leqslant t<+\infty\ ;\ dx=\cdots=3a\,\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}\,dt\ ,\ dy=\cdots=3a\,\frac{t\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(9a^2\,\frac{t^2\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}-9a^2\,\frac{t^2\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}\right)\,dt=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{\left(1+t^3\right)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\left(1+t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{3a^2}{2}\left(\left(-\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right)=\frac{3a^2}{2}$$

О т в е т:

$$S_D = \frac{3a^2}{2}$$

- -

Формула Стокса.

Пусть задан простой замкнутый кусочно-гладкий контур C. Пусть

$S-$ любая кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, опирающаяся на заданный контур C. В каждой точке повехности S задан переменный вектор $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и единичный вектор нормали $\vec{n}(x,y,z) = \{\cos\alpha(x,y,z), \cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z)\}$ к повехности S. Пусть в некоторой окрестности поверхности S функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Тогда верно соотношение

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \\ = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz\,,$$

которое называется формулой Стокса. На контуре C выбрано такое направление обхода, при котором, с учётом выбора стороны поверхности S (направления вектора нормали $\vec{n}$), поверхность S остаётся слева.

Формы записи формулы Стокса.

Построенный по заданному вектору $\vec{A} = \{P, Q, R\}$ вектор с компонентами $\left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$ принято обозначать

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(определитель раскрывается по первой строке) .

Тогда

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \\ = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta +\right.$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\Bigg)\,dS=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=$$

$$=\iint\limits_S\left(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)dS\,.$$

Так как криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_C\left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)\,dl\,,$$

где $\vec{\tau}(x,y,z)-$ единичный вектор касательный к контуру C, то формулу Стокса можно записать в виде

$$\iint\limits_S\left(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)dS=\oint\limits_C\left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)\,dl\,.$$

Формула Грина является частным случаем формулы Стокса.

Пусть $S-$ конечная часть координатной плоскости (x,y), ограниченная контуром C. Тогда $\vec{n}=\{0,0,1\}$. Пусть $\vec{A}=\{P,Q,0\}$. В этом случае формулы Грина и Стокса совпадают.

- -

2.7.2 Занятие 27

Формула Остроградского.

Пусть $S-$ замкнутая кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, $\vec{n}(x,y,z) = \{\cos\alpha(x,y,z), \cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z)\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S и $V-$ конечная часть 3-х мерного пространства, ограниченная поверхностью S. Пусть на поверхности S и в области V задан переменный вектор $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ такой, что функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Тогда верно соотношение

$$\oiint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz\,,$$

которое называется формулой Остроградского.

Формы записи формулы Остроградского.

$$\oiint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\;dS = \\ = \oiint\limits_S \left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)\,dS$$

Построенную по заданному вектору $\vec{A} = \{P,Q,R\}$ скалярную функцию $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ принято обозначать

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Тогда формулу Остроградского можно записать в виде

$$\oiint\limits_S \left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dxdydz\,.$$

Следствие формулы Остроградского.

Пусть вектор $\vec{A}(x,y,z) = \{x,y,z\} = \vec{r}-$ радиус-вектор точки с координатами x,y,z. Тогда $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\vec{r} = 3$ и формула Остроградского принимает

вид

$$\oiint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = 3 \cdot \underbrace{\iiint\limits_V dxdydz}_{= \text{ объём области } V} .$$

Следовательно, объём области, ограниченной замкнутой поверхностью S, равен

$$\frac{1}{3}\oiint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy .$$

- -

Задача 27.1 (№4367 [1]). Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz ,$$

где $C-$ окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Р е ш е н и е:

Плоскость $x + y + z = 0$ проходит через центр сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Следовательно, контур C является окружностью радиуса a, лежащей в плоскости $x + y + z = 0$.

Функции $P = y$, $Q = z$, $R = x$ и их частные производные первого порядка непрерывны во всём 3-х мерном пространстве. Используем формулу Стокса

$$\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint\limits_S \left(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\right) dS ,$$

где $S-$ любая поверхность, опирающаяся на контур C. Пусть $S-$ круг в плоскости $x + y + z = 0$, ограниченный контуром C. В любой точке этой поверхности S единичный вектор нормали $\vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Вектор

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \{-1, -1, -1\} .$$

Скалярное произведение $\left(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\right) = -\sqrt{3}$ на поверхности S.

Тогда,

$$\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz = \iint\limits_S \Big(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\Big)\,dS = -\sqrt{3}\cdot \underbrace{\iint\limits_S dS}_{\substack{\text{площадь}\\ \text{круга радиуса } a}} = -\sqrt{3}\pi a^2\,.$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -\pi\sqrt{3}\,a^2$$

- -

Задача 27.2 (№4373 [1]). Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \left(y^2-z^2\right)\,dx + \left(z^2-x^2\right)\,dy + \left(x^2-y^2\right)\,dz\,,$$

где $C-$ сечение поверхности куба $0\leqslant x\leqslant a\,,\ 0\leqslant y\leqslant a\,,\ 0\leqslant z\leqslant a$ плоскостью $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Р е ш е н и е:

Сечение куба $0\leqslant x\leqslant a\,,\ 0\leqslant y\leqslant a\,,\ 0\leqslant z\leqslant a$ плоскостью $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ является правильным шестиугольником со стороной $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (см. Рис.27.1) .

Функции $P=y^2-z^2\,,\ Q=z^2-x^2\,,\ R=x^2-y^2$ и их частные производные первого порядка непрерывны во всём 3-х мерном пространстве. Используем формулу Стокса

$$\oint\limits_C \left(y^2-z^2\right)\,dx + \left(z^2-x^2\right)\,dy + \left(x^2-y^2\right)\,dz = \iint\limits_S \Big(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\Big)\,dS\,,$$

где $S-$ любая поверхность, опирающаяся на контур C. Пусть $S-$ правильный шестиугольник со стороной $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ в плоскости $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, ограниченный контуром C. В любой точке этой поверхности S единичный вектор нормали $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Вектор

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} = -2\left\{y+z, z+x, x+y\right\}\,.$$

Скалярное произведение $\Big(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\Big)$ на поверхности S равно

$$\Big(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\Big) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,(x+y+z) =$$

$$= \left\{\text{Поверхность } S:\ x+y+z=\frac{3a}{2}\right\} = -2\sqrt{3}\,a\,.$$

Тогда,

$$\oint\limits_C \left(y^2-z^2\right)\,dx + \left(z^2-x^2\right)\,dy + \left(x^2-y^2\right)\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \Big(\operatorname{rot}\vec{A}\,,\,\vec{n}\Big)\,dS = -2\sqrt{3}\,a\cdot \underbrace{\iint\limits_S dS}_{\substack{=S_6-\text{ площадь}\\ \text{шестиугольника}}} =$$

$$= \left\{S_6 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4}\right\} = -\frac{9a^3}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \left(y^2-z^2\right)\,dx + \left(z^2-x^2\right)\,dy + \left(x^2-y^2\right)\,dz = -\frac{9a^3}{2}$$

- -

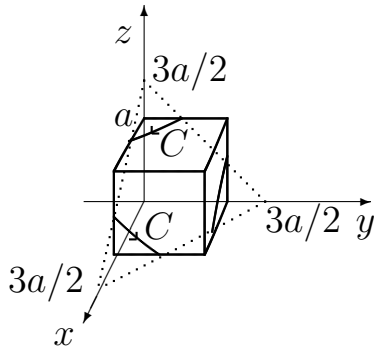

*Рис.*27.1

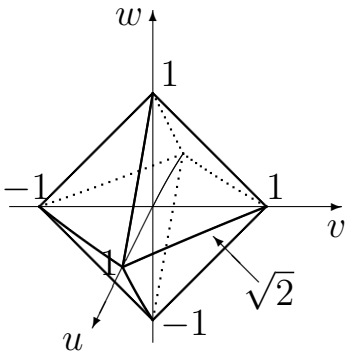

*Рис.*27.2

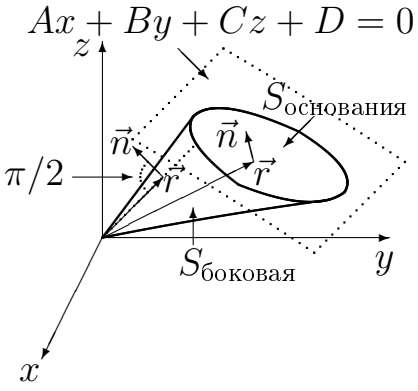

*Рис.*27.3

- -

Задача 27.3 (№4388 [1]). С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\oiint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy\,,$$

где $S-$ внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Р е ш е н и е:

Поверхность S замкнутая (сфера). Функции $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$ и их частные производные первого порядка непрерывны во всех точках 3-х мерного пространства. Используем формулу Остроградского :

$$\oiint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \{V - \text{шар радиуса } a\ ;$$

$$\text{Замена переменных } \left\{\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ; \\ z = r\cos\theta \end{array}\right. ,\ |J| = r^2\sin\theta \Bigg\} =$$

$$= 3\iiint\limits_{\widetilde{V}} r^4\sin\theta\,drd\varphi d\theta = \left\{\widetilde{V} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}\right\} =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{a} r^4\,dr = 3\cdot 2\pi\cdot\left(-\cos\theta|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right)\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{12\pi a^5}{5}\,.$$

О т в е т:

$$\oiint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy = \frac{12\pi a^5}{5}$$

- -

Задача 27.4 (№4389 [1]). С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\oiint\limits_S (x - y + z)\ dydz + (y - z + x)\ dzdx + (z - x + y)\ dxdy\,,$$

где $S-$ внешняя сторона поверхности $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

Р е ш е н и е:

Функции $P = x - y + z$, $Q = y - z + x$, $R = z - x + y$ и их частные производные первого порядка непрерывны во всех точках 3-х мерного пространства. Используем формулу Остроградского :

$$\oiint\limits_S (x - y + z)\ dydz + (y - z + x)\ dzdx + (z - x + y)\ dxdy =$$

$$= \{S - \text{внешняя сторона поверхности } |x - y + z| + |y - z + x| +$$

$$+ |z - x + y| = 1\ ;\ D - \text{3-х мерная область, ограниченная}$$

$$\text{поверхностью } S\} = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial (x-y+z)}{\partial x} + \frac{\partial (y-z+x)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (z-x+y)}{\partial z} \right) dxdydz = 3 \iiint\limits_D dxdydz =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменных } \begin{cases} u = x-y+z\,; \\ v = y-z+x\,; \\ w = z-x+y \end{cases} , \; J^{-1} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \right.$$

$$\left. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \right\} = \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\iiint\limits_{\widetilde{D}} dudvdw}_{\substack{= V_{\widetilde{D}} - \text{ объём} \\ \text{области } \widetilde{D}}} =$$

$$= \Big\{ \text{Граница области } \widetilde{D} : |u| + |v| + |w| = 1 \text{ (см. Рис.27.2)} \to$$

$$\to V_{\widetilde{D}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{S_{\text{основания}}}_{= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \underbrace{H}_{=1} \right) = \frac{4}{3} \Big\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1\,.$$

О т в е т:

$$\oiint\limits_S (x-y+z)\; dydz + (y-z+x)\; dzdx + (z-x+y)\; dxdy = 1$$

Задача 27.5 (№4368 [1]). Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{AmB} \left(x^2 - yz\right)\, dx + \left(y^2 - xz\right)\, dy + \left(z^2 - xy\right)\, dz\,,$$

взятый по куску винтовой линии $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi} \cdot \varphi$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ от точки $A\{a, 0, 0\}$ до точки $B\{0, 0, h\}$.

У к а з а н и е. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком BnA и применить формулу Стокса.

Р е ш е н и е:

Контур $C = AmB \cup BnA$ является замкнутым контуром.

Функции $P = x^2 - yz$, $Q = y^2 - xz$, $R = z^2 - xy$ и их частные производные первого порядка непрерывны во всех точках 3-х мерного пространства. Используем формулу Стокса :

$$I + \int\limits_{BnA} \left(x^2 - yz\right)\, dx + \left(y^2 - xz\right)\, dy + \left(z^2 - xy\right)\, dz =$$

$$= \oint\limits_{C} \left(x^2 - yz\right)\, dx + \left(y^2 - xz\right)\, dy + \left(z^2 - xy\right)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}_{=0} \right) dydz + \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}_{=0} \right) dzdx + \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0} \right) dxdy = 0.$$

Тогда, искомый интеграл I равен

$$I = -\int\limits_{BnA} \left(x^2 - yz\right)\, dx + \left(y^2 - xz\right)\, dy + \left(z^2 - xy\right)\, dz =$$

$$= \left\{ \text{Параметризация контура } BnA : \begin{cases} x = a\,; \\ y = 0\,; \\ z = t\,; \end{cases} , \; 0 \leqslant t \leqslant h \right\} =$$

$$= -\int\limits_{h}^{0} t^2\, dt = \left(\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=h} \right) = \frac{h^3}{3}\,.$$

О т в е т:

$$I = \frac{h^3}{3}$$

- -

Задача 27.6 (№4383 [1]). Доказать, что объём конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F\left(x, y, z\right) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot H$, где $S -$ площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и $H -$ высота конуса .

Р е ш е н и е:

Пусть вершина конуса расположена в начале координатной системы, $S_{\text{боковая}} -$ боковая поверхность конуса, задаваемая уравнением $F\left(x, y, z\right) = 0$, и $S_{\text{основания}} -$ поверхность основания конуса, лежащая в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (см. Рис.27.3).

Поверхность $S_{\text{конуса}} = S_{\text{боковая}} \cup S_{\text{основания}}$ является замкнутой поверхностью, ограничивающей конус.

Используем формулу для вычисления объёма области, ограниченной замкнутой поверхностью $S_{\text{конуса}}$.

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S_{\text{конуса}}} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\{\vec{r}=\{x,y,z\}-\text{радиус-вектор}$$

точки на поверхности $S_{\text{конуса}}$; $\vec{n}(x,y,z)=\{\cos\alpha(x,y,z),\cos\beta(x,y,z),$ $\cos\gamma(x,y,z)\}-$ единичная внешняя нормаль к поверхности $S_{\text{конуса}}\}=$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S_{\text{конуса}}}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S_{\text{конуса}}}(\vec{r},\,\vec{n})\,dS=$$

$$=\{S_{\text{конуса}}=S_{\text{боковая}}\cup S_{\text{основания}}\}=$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_{\text{боковая}}}\underbrace{(\vec{r},\,\vec{n})}_{=0}dS+\frac{1}{3}\iint\limits_{S_{\text{основания}}}(\vec{r},\,\vec{n})\,dS=\{\text{На поверхности } S_{\text{боковая}}$$

векторы $\vec{r}$ и $\vec{n}$ ортогональны$\}=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{S_{\text{основания}}}(\vec{r},\,\vec{n})\,dS=\{\text{Поверхность}$

$S_{\text{основания}}$ лежит в плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, которому соответствует нормальная форма записи уравнения плоскости вида $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, где $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – направляющие косинусы единичной нормали к плоскости, а $p=\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – расстояние от начала координат до плоскости. То есть, $p=H$, где $H-$ высота конуса. Итак, на поверхности $S_{\text{основания}}$ нормальная форма записи уравнения плоскости имеет вид $(\vec{r},\,\vec{n})=H\}=\dfrac{1}{3}\cdot H\cdot\underbrace{\iint\limits_{S_{\text{основания}}}dS}_{=S-\text{ площадь основания конуса}}=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot H$

Задача 27.7 (№4385.2 [1]). Найти объём тела, ограниченного тором $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z=a\sin\psi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\psi<2\pi$ $(0<a<b)$.

Р е ш е н и е:

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=$$

$$=\left\{D:\begin{cases}0\leqslant\varphi<2\pi\ ;\\ 0\leqslant\psi<2\pi\end{cases}\right\}=\frac{1}{3}\iint\limits_{D}(x\,(\varphi\,,\,\psi)\cos\alpha\,(\varphi\,,\,\psi)+y\,(\varphi\,,\,\psi)\cdot$$

$$\cdot \cos\beta\,(\varphi\,,\,\psi) + z\,(\varphi\,,\,\psi)\cos\gamma\,(\varphi\,,\,\psi))\,\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi d\psi =$$

$$= \left\{ \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\gamma = \right.$$

$$= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ A = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,\psi)} = \cdots = a\,(b+a\cos\psi)\cos\psi\cos\varphi\,,$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\varphi,\psi)} = \cdots = a\,(b+a\cos\psi)\cos\psi\sin\varphi\,,\ C = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,\psi)} = \cdots =$$

$$= a\,(b+a\cos\psi)\sin\psi\} = \frac{1}{3}\left|\iint\limits_D (x\,(\varphi\,,\,\psi)\cdot A + y\,(\varphi\,,\,\psi)\cdot B +\right.$$

$$\left.+z\,(\varphi\,,\,\psi)\cdot C)\ d\varphi d\psi\right| = \frac{1}{3}\left|\iint\limits_D \Big(a\,(b+a\cos\psi)^2\cos\psi\cos^2\varphi +\right.$$

$$\left.+a\,(b+a\cos\psi)^2\cos\psi\sin^2\varphi + a^2\,(b+a\cos\psi)\sin^2\psi\Big)\ d\varphi d\psi\right| =$$

$$= \frac{a}{3}\left|\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^{2\pi}\Big((b+a\cos\psi)^2\cos\psi + a\,(b+a\cos\psi)\sin^2\psi\Big)\ d\psi\right| =$$

$$= \frac{2\pi a}{3}\left|\left(b^2\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi}_{=0} + ab\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} d\psi}_{=2\pi} + ab\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos(2\psi)\,d\psi}_{=0} + a^2\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\psi\,d\psi}_{=0} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{ab}{2}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} d\psi}_{=2\pi} - \frac{ab}{2}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos(2\psi)\,d\psi}_{=0} + a^2\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\sin^2\psi\,d\psi}_{=0}\right)\right| =$$

$$= \frac{2\pi a}{3}\,(2\pi ab + \pi ab) = 2\pi^2 a^2 b$$

Ответ:

$$V = 2\pi^2 a^2 b$$

Задача 27.8 (№4393 [1]). Доказать, что если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и $S-$ гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V, то справедливы следующие формулы :

$$\text{а)} \quad \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \Delta u \, dxdydz \, ;$$

$$\text{б)} \quad \oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right) dxdydz + \\ + \iiint\limits_V u\, \Delta u \, dxdydz \, .$$

Здесь $u(x,y,z)-$ функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V+S$, а

$\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\operatorname{grad} u\,,\, \vec{n})$ – производная по направлению внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S, равная скалярному произведению векторов

$\operatorname{grad} u = \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x}\,,\, \dfrac{\partial u}{\partial y}\,,\, \dfrac{\partial u}{\partial z} \right\}$ и $\vec{n} = \{\cos\alpha\,,\, \cos\beta\,,\, \cos\gamma\}$.

Р е ш е н и е:

$$\text{а)} \quad \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \oiint\limits_S (\operatorname{grad} u\,,\, \vec{n})\, dS = \oiint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \right) dS = \oiint\limits_S \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=P} dydz + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=Q} dzdx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{=R} dxdy = \{\text{Используем}$$

$$\text{формулу Остроградского.}\} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz = \iiint\limits_V \Delta u \, dxdydz \, ;$$

$$\text{б)} \quad \oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \oiint\limits_S u\,(\operatorname{grad} u\,,\, \vec{n})\, dS = \oiint\limits_S u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \right) dS = \oiint\limits_S \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{=P} dydz + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial y}}_{=Q} dzdx + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial z}}_{=R} dxdy = \{\text{Используем}$$

$$\text{формулу Остроградского.}\} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \, \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \, \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dxdydz + \iiint\limits_V u \, \Delta u \, dxdydz \ .$$

- -

2.8 Элементы теории поля

2.8.1 Занятие 28

Градиент скалярного поля.

Пусть $u(x,y,z)$ – заданное непрерывно дифференцируемое скалярное поле (функция). Градиентом этого поля называется вектор, имеющий в декартовых прямоугольных координатах вид

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\,,\,\frac{\partial u}{\partial y}\,,\,\frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Введём обозначение для псевдо-вектора «набла»

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\,\frac{\partial}{\partial z}\right\} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Тогда, $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ скалярного поля $u(x,y,z)$ в направлении вектора

$$\vec{l} = \vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\cos\beta + \vec{k}\,\cos\gamma = \{\cos\alpha\,,\,\cos\beta\,,\,\cos\gamma\}$$

определяется равенством

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\operatorname{grad} u\,,\,\vec{l}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\,\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\,\cos\gamma\,.$$

Дивергенция векторного поля.

Пусть переменное векторное поле

$$\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$$

имеет непрерывно дифференцируемые компоненты $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, и $R(x,y,z)$. Тогда, скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{A} = \left(\nabla\,,\,\vec{A}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией векторного поля $\vec{A}$.

Ротор (ротация) векторного поля.

Пусть $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, где P , Q , $R-$ непрерывно дифференцируемые функции. Тогда, вектор

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left[\nabla\,,\,\vec{A}\right]$$

называется ротором (ротацией) векторного поля $\vec{A}$.

Поток вектора через поверхность.

Пусть $S-$ заданная в 3-х мерном пространстве поверхность,

$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ заданный на поверхности S переменный вектор, $\vec{n}(x,y,z)=\{\cos\alpha(x,y,z),\cos\beta(x,y,z),\cos\gamma(x,y,z)\}-$ единичный вектор нормали к поверхности S. Тогда, поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\iint\limits_S\left(\vec{A}\,,\,\vec{n}\right)\,dS=\iint\limits_S\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\,dS$$

называется потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность S.

Работа вектора.

Пусть $C-$ кусочно-гладкая кривая в 3-х мерном пространстве,

$\vec{A}=\{P,Q,R\}$ $-$ заданный на кривой C вектор, $\vec{\tau}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}-$ единичный касательный вектор к кривой C. Тогда, криволинейный интеграл 2-ого рода

$$\int\limits_C\left(\vec{A}\,,\,\vec{\tau}\right)dl=\int\limits_C\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dl=\int\limits_C Pdx+Qdy+Rdz$$

называется работой вектора $\vec{A}$ вдоль кривой C.

Если контур C является замкнутой кривой, то рассматриваемый криволинейный интеграл 2-ого рода называется циркуляцией вектора $\vec{A}$ вдоль контура C.

Псевдо-вектор «набла».

Если «набла» действует на произведение нескольких сомножителей, то результатом этого действия будет сумма, число слагаемых в которой равно числу сомножителей в исходном выражении. Каждое слагаемое повторяет структуру исходного выражения, но «набла» в каждом слагаемом действует только на один из сомножителей, а все другие следует считать постоянными величинами.

- -

Задача 28.1 (№4408 [1]). Доказать формулы :

а) $\operatorname{grad}(u+C)=\operatorname{grad}u \quad (C-\text{постоянно})$;

б) $\operatorname{grad}Cu=C\operatorname{grad}u \quad (C-\text{постоянно})$;

в) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$;

г) $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$;

д) $\operatorname{grad}\left(u^2\right)=2u\operatorname{grad}u$;

е) $\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u$.

Р е ш е н и е:

а) $$\operatorname{grad}(u+C)=\left\{\frac{\partial(u+C)}{\partial x},\frac{\partial(u+C)}{\partial y},\frac{\partial(u+C)}{\partial z}\right\}= \\ =\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\operatorname{grad}u\ ;$$

б) $$\operatorname{grad}Cu=\left\{\frac{\partial Cu}{\partial x},\frac{\partial Cu}{\partial y},\frac{\partial Cu}{\partial z}\right\}=C\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=C\operatorname{grad}u\ ;$$

в) $$\operatorname{grad}(u+v)=\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v\ ;$$

г) $$\operatorname{grad}(uv)=\nabla uv=\nabla_u uv+\nabla_v uv=v\nabla_u u+u\nabla_v v= \\ =v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v\ ;$$

д) $$\operatorname{grad}\left(u^2\right)=\operatorname{grad}(uu)=2u\operatorname{grad}u\ ;$$

е) $$\operatorname{grad}f(u)=\left\{\frac{\partial f(u)}{\partial x},\frac{\partial f(u)}{\partial y},\frac{\partial f(u)}{\partial z}\right\}= \\ =\left\{f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},f'(u)\frac{\partial u}{\partial y},f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=f'(u)\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}= \\ =f'(u)\operatorname{grad}u\ .$$

Задача 28.2 (№4409 [1]). Вычислить :

а) $\operatorname{grad}r$;

б) $\operatorname{grad}r^2$;

в) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$,

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Р е ш е н и е:

а) $\operatorname{grad} r = \left\{ \dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \right\} =$

$$= \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\,\{x\,,\,y\,,\,z\} = \frac{\vec{r}}{r}\,;$$

б) $\operatorname{grad} r^2 = 2r \operatorname{grad} r = 2\vec{r}\,;$

в) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^2} \operatorname{grad} r = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

Задача 28.3 (№4435 [1]). Доказать, что :

а) $\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}\,;$

б) $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad} u\,,\,\vec{a}]$.

Р е ш е н и е:

а) 1-ый вариант вычислений

$$\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$$

2-ой вариант вычислений

$$\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left[\nabla\,,\,\vec{a}+\vec{b}\right] = [\nabla\,,\,\vec{a}] + \left[\nabla\,,\,\vec{b}\right] = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}\,;$$

б) $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = [\nabla\,,\,u\vec{a}] = [\nabla_u\,,\,u\vec{a}] + [\nabla_{\vec{a}}\,,\,u\vec{a}] = [\nabla_u u\,,\,\vec{a}] + u\,[\nabla_{\vec{a}}\,,\,\vec{a}] =$

$$= [\operatorname{grad} u\,,\,\vec{a}] + u \operatorname{rot}\vec{a}\ .$$

Задача 28.4 (№4442.1 [1]). Найти поток вектора $\vec{r}$:

а) через боковую поверхность конуса $x^2+y^2 \leqslant z^2 \quad (0 \leqslant z \leqslant h)$;

б) через основание этого конуса .

Р е ш е н и е:

Пусть $S_{\text{бок}}$ – боковая поверхность конуса и $S_{\text{осн}}$ – поверхность в основании конуса (см. Рис.28.1).

а) $\displaystyle\iint\limits_{S_{\text{бок}}} \underbrace{(\vec{r},\,\vec{n}_{\text{бок}})}_{=0}\,dS = 0\,;$

б) $\displaystyle\underbrace{\iint\limits_{S_{\text{бок}}} (\vec{r},\,\vec{n}_{\text{бок}})\,dS}_{=0} + \iint\limits_{S_{\text{осн}}} (\vec{r},\,\vec{n}_{\text{осн}})\,dS = \oiint\limits_{S=S_{\text{осн}}\cup S_{\text{бок}}} (\vec{r},\,\vec{n})\,dS =$

$= \{\text{Формула Остроградского}\} = \displaystyle\iiint\limits_V \underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3}\,dxdydz = 3\underbrace{\iiint\limits_V dxdydz}_{\text{Объём конуса}} =$

$= 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\underbrace{S_{\text{основания}}}_{=\pi h^2}\cdot h\right) = \pi h^3\ .$

Следовательно, $\displaystyle\iint\limits_{S_{\text{осн}}} (\vec{r},\,\vec{n}_{\text{осн}})\,dS = \pi h^3\ .$

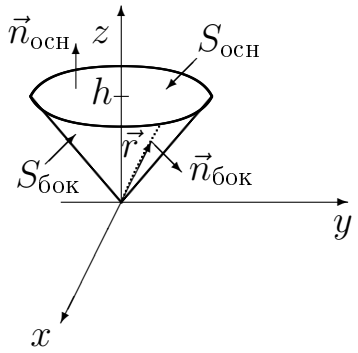

*Рис.*28.1

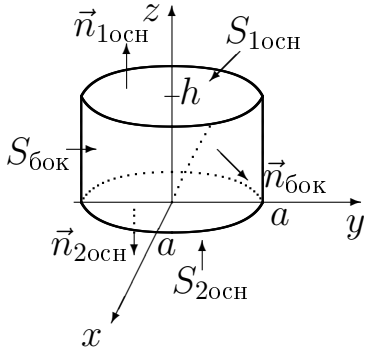

*Рис.*28.2

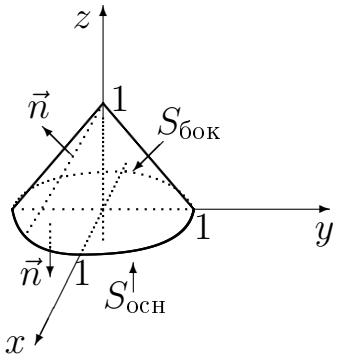

*Рис.*28.3

Задача 28.5 (№4452.3 [1]). Найти работу поля $\vec{a} = e^{y-z}\,\vec{i} + e^{z-x}\,\vec{j} + e^{x-y}\,\vec{k}$ вдоль прямолинейного отрезка между точками $O\{0,0,0\}$ и $M\{1,3,5\}$.

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_C (\vec{a}\,,\,\vec{\tau})\,dl = \int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_C e^{y-z}\,dx + e^{z-x}\,dy + e^{x-y}\,dz =$$

$$= \left\{ \text{Параметризация контура } C : \begin{cases} x = t\,; \\ y = 3t\,; \\ z = 5t \end{cases},\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(e^{-2t} + e^{4t}\cdot 3 + e^{-2t}\cdot 5\right)\,dt = 6\int\limits_0^1 e^{-2t}\,dt \; + \; 3\int\limits_0^1 e^{4t}\,dt =$$

$$= -3\left(e^{-2t}\Big|_{t=0}^{t=1}\right) + \frac{3}{4}\left(e^{4t}\Big|_{t=0}^{t=1}\right) = \frac{3}{4}\left(e^4 - 4e^{-2} + 3\right)$$

- -

Задача 28.6 (№4411 [1]). Найти $\operatorname{grad}\left(\vec{C}\,,\,\vec{r}\right)$, где $\vec{C}$ – постоянный вектор и $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор из начала координат .

Р е ш е н и е:

$$\operatorname{grad}\left(\vec{C}\,,\,\vec{r}\right) = \operatorname{grad}\left(C_x\,x + C_y\,y + C_z\,z\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(C_x\,x + C_y\,y + C_z\,z\right)\,,\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(C_x\,x + C_y\,y + C_z\,z\right)\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(C_x\,x + C_y\,y + C_z\,z\right)\right\} = \{C_x\,,\,C_y\,,\,C_z\} = \vec{C}$$

- -

Задача 28.7 (№4412 [1]). Найти $\operatorname{grad}\left|\left[\vec{C},\vec{r}\right]\right|^2$ $\left(\vec{C} - \text{постоянный вектор}\right)$.

Р е ш е н и е:

$$\left[\vec{C},\vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ C_x & C_y & C_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{C_y\,z - C_z\,y\,,\ C_z\,x - C_x\,z\,,\ C_x\,y - C_y\,x\}$$

$$\left|\left[\vec{C},\vec{r}\right]\right|^2 = \underbrace{(C_y\,z - C_z\,y)^2 + (C_z\,x - C_x\,z)^2 + (C_x\,y - C_y\,x)^2}_{=\,f(x,y,z)}$$

$$\operatorname{grad}\left|\left[\vec{C},\vec{r}\right]\right|^2 = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}\,,\,\frac{\partial f}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x} = 2\left(C_z\,x - C_x\,z\right)C_z - \right.$$

$$-2\left(C_x\,y - C_y\,x\right)C_y = 2\left(C_y^2\,x + C_z^2\,x - C_x\left(C_y\,y + C_z\,z\right)\right) =$$

$$= 2\left(\left(\underbrace{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}_{=\,(\vec{C},\vec{C})}\right)\cdot x - C_x\cdot\left(\underbrace{C_x\,x + C_y\,y + C_z\,z}_{=\,(\vec{C},\vec{r})}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\cdot x - 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\cdot C_x\ \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots = 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\cdot y - 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\cdot C_y \ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cdots = 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\cdot z - 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\cdot C_z\Big\} = 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\cdot \underbrace{\{x,y,z\}}_{=\vec{r}} -$$
$$- 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\cdot \underbrace{\{C_x,C_y,C_z\}}_{=\vec{C}} = 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\vec{r} - 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{C}$$

О т в е т:

$$\operatorname{grad}\left|\left[\vec{C},\vec{r}\right]\right|^2 = 2\left(\vec{C},\vec{C}\right)\vec{r} - 2\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{C}$$

- -

Задача 28.8 (№4430 [1]). Найти :

а) $\operatorname{div}(u\ \operatorname{grad} u)$;

б) $\operatorname{div}(u\ \operatorname{grad} v)$.

Р е ш е н и е:

а) $\operatorname{div}(u\ \operatorname{grad} u) = (\nabla, u\nabla u) = (\nabla_u, u\nabla u) + (\nabla_{\nabla u}, u\nabla u) = (\nabla_u u, \nabla u) +$
$+ u\,(\nabla_{\nabla u}, \nabla u) = |\nabla u|^2 + u\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\right) =$
$= |\operatorname{grad} u|^2 + u\Delta u$;

б) $\operatorname{div}(u\ \operatorname{grad} v) = (\nabla, u\nabla v) = (\nabla_u, u\nabla v) + (\nabla_{\nabla v}, u\nabla v) = (\nabla_u u, \nabla v) +$
$+ u\,(\nabla_{\nabla v}, \nabla v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.

- -

Задача 28.9 (№4436.1 [1]). Найти :

а) $\operatorname{rot}\vec{r}$;

б) $\operatorname{rot}\left(f(r)\,\vec{r}\right)$.

Р е ш е н и е:

а) $\operatorname{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{r}] = \{0\,,\,0\,,\,0\}$;

б) $\operatorname{rot}\left(f(r)\,\vec{r}\right) = [\nabla, f(r)\,\vec{r}] = [\nabla_{\vec{r}}, f(r)\,\vec{r}] + \left[\nabla_{f(r)}, f(r)\,\vec{r}\right] =$

$$= f(r)\underbrace{\left[\nabla_{\vec{r}}, \vec{r}\right]}_{=0} + \left[\nabla_{f(r)} f(r), \vec{r}\right] = \left[f'(r)\operatorname{grad} r, \vec{r}\right] = f'(r)\underbrace{\left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{r}\right]}_{=0} = 0 .$$

Задача 28.10 (№4436.2 [1]). Найти модуль и направление $\operatorname{rot}\vec{a}$ в точке $M\{1, 2, -2\}$, если $\vec{a} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$.

Р е ш е н и е:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \left\{-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}, -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}, -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right\}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}|_M = \left\{-\frac{5}{4}, -1, \frac{5}{2}\right\} \qquad , \qquad |\operatorname{rot}\vec{a}|_M| = \sqrt{\frac{25}{16} + 1 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{141}}{4}$$

$$\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \frac{\operatorname{rot}\vec{a}|_M}{|\operatorname{rot}\vec{a}|_M|} = \left\{-\frac{5}{\sqrt{141}}, -\frac{4}{\sqrt{141}}, \frac{10}{\sqrt{141}}\right\}$$

Задача 28.11 (№4442.2 [1]). Найти поток вектора $\vec{a} = yz\,\vec{i} + zx\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$:

а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2 \quad (0 \leqslant z \leqslant h)$;

б) через полную поверхность этого цилиндра .

Р е ш е н и е:

Пусть $S_{\text{бок}}$ – боковая поверхность цилиндра, $S_{1\text{осн}}$ – верхняя граница цилиндра и $S_{2\text{осн}}$ – нижняя граница цилиндра (см. Рис.28.2).

б) $$\oiint\limits_{S=S_{\text{бок}}\cup S_{1\text{осн}}\cup S_{2\text{осн}}} (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \{\text{Формула Остроградского}\} =$$

$$= \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = \left\{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial zx}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0\right\} = 0 ;$$

Тогда,

а) $$\iint\limits_{S_{\text{бок}}} (\vec{a}, \vec{n}_{\text{бок}})\, dS = -\iint\limits_{S_{1\text{осн}}} (\vec{a}, \vec{n}_{1\text{осн}})\, dS - \iint\limits_{S_{2\text{осн}}} (\vec{a}, \vec{n}_{2\text{осн}})\, dS =$$

$= \left\{\vec{n}_{1\text{осн}} = \{0, 0, 1\}\ ,\ \vec{n}_{2\text{осн}} = \{0, 0, -1\}\ ,\ (\vec{a}, \vec{n}_{1\text{осн}})|_{S_{1\text{осн}}} = xy\ ,\right.$
$\left.(\vec{a}, \vec{n}_{2\text{осн}})|_{S_{2\text{осн}}} = -xy\right.$; Параметризация поверхности $S_{1\text{осн}}$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi\ ; \\ z = h \end{cases}, \to D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}, \ \sqrt{EG - F^2} = r\ ;$$

Параметризация поверхности $S_{2\text{осн}}: \begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi\ ; \\ z = 0 \end{cases}, \to$

$$\to D: \left\{ \begin{cases} 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ; \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}, \ \sqrt{EG - F^2} = r \right\} =$$

$$= -\iint\limits_D r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, r\, d\varphi dr + \iint\limits_D r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, r\, d\varphi dr = 0\ .$$

- -

Задача 28.12 (№4443 [1]). Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$ через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\ \ (0 \leqslant z \leqslant 1)$.

Р е ш е н и е:

Пусть $S_{\text{бок}}$ – боковая поверхность конуса и $S_{\text{осн}}$ – поверхность в основании конуса (см. Рис.28.3).

$$\oiint\limits_{S=S_{\text{осн}}\cup S_{\text{бок}}} (\vec{r}, \vec{n})\, dS = \{\text{Формула Остроградского}\} = \iiint\limits_V \underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3}\, dxdydz =$$

$$= 3\underbrace{\iiint\limits_V dxdydz}_{\text{Объём конуса}} = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\underbrace{S_{\text{основания}}}_{=\pi}\cdot 1\right) = \pi\ .$$

- -

2.9 Собственные интегралы, зависящие от параметра

2.9.1 Занятие 29

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D (см. Рис.29.1). Тогда на отрезке $y \in [c\,,\,d]$ определена функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx -$ собственный интеграл зависящий от параметра.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D, то функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ является непрерывной функцией на сегменте $c \leqslant y \leqslant d$.

Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D, то существуют и равны повторные интегралы

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Теорема 3. Пусть в области D определены и непрерывны функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Тогда, на интервале $c < y < d$ верна формула Лейбница

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\,.$$

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D' (см. Рис.29.2). Тогда на отрезке $y \in [c\,,\,d]$ определена функция $I(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx -$ собственный интеграл с переменными пределами интегрирования.

Теорема 3′. Пусть в области D' определены и непрерывны функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Пусть функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ являются дифференцируемыми функциями переменной y и $a < \varphi(y) < b$, $a < \psi(y) < b$ при

$c < y < d$. Тогда, на интервале $c < y < d$ верна формула

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)\ .$$

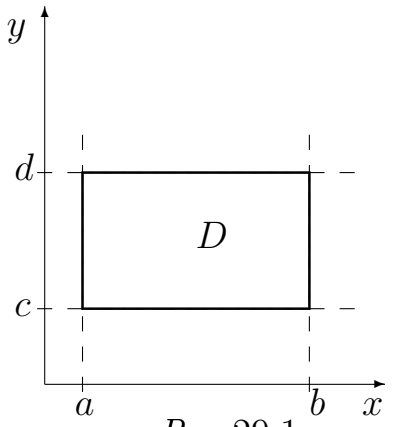

*Рис.*29.1

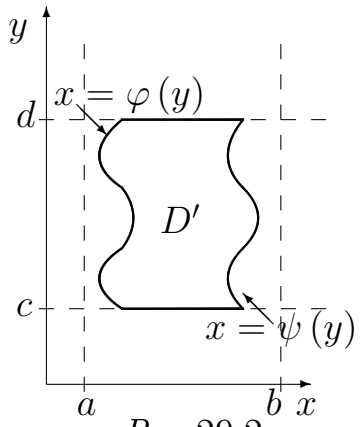

*Рис.*29.2

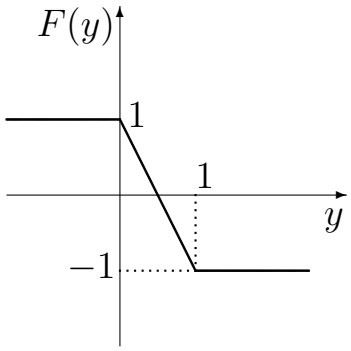

*Рис.*29.3

Задача 29.1 (№3713(а) [1]). Найти

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x\,,\,\alpha)=\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, $\varphi(\alpha)=\alpha$, $\psi(\alpha)=1+\alpha$ определены и непрерывны при любых x и α. Следовательно (Теорема 1), функция

$I(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ – непрерывная функция при любых α. Тогда,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}\ .$$

О т в е т:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 29.2 (№3717 [1]). Вычислить $F'(x)$, если

$$F(x) = \int\limits_{x}^{x^2} e^{-xy^2}\,dy\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x,y) = e^{-xy^2}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y^2\,e^{-xy^2}$ определены и непрерывны при любых x и y. Производные функций $\varphi(x) = x$ и $\psi(x) = x^2$ существуют при любых x. Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\int\limits_{x}^{x^2} y^2\,e^{-xy^2}\,dy + e^{-x^5}\cdot 2x - e^{-x^3}\cdot 1\,.$$

О т в е т:

$$F'(x) = -\int\limits_{x}^{x^2} y^2\,e^{-xy^2}\,dy + 2x\,e^{-x^5} - e^{-x^3}$$

- -

Задача 29.3 (№3718(а) [1]). Найти $F'(\alpha)$, если

$$F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x,\alpha) = e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}$ и $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}$ определены и непрерывны при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и любых α. Производные функций

$\varphi(\alpha) = \sin\alpha$ и $\psi(\alpha) = \cos\alpha$ существуют при любых α.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$F'(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx - e^{\alpha|\sin\alpha|}\cdot\sin\alpha - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cdot\cos\alpha\,.$$

О т в е т:

$$F'(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx - \sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|} - \cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$$

Задача 29.4 (№3728 [1]). Показать, что функция

$$u(x)=\int\limits_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy\,,\ \text{где}\quad K(x,y)=\begin{cases}x(1-y)\ ,\ \text{если}\ \ x\leqslant y\,;\\ y(1-x)\ ,\ \text{если}\ \ x>y\end{cases}$$

и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению $u''(x)=-v(x)\ \ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

Р е ш е н и е:

Пусть функция $f(x,y)=K(x,y)\,v(y)$. Тогда, функция

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=v(y)\cdot\begin{cases}1-y\ ,\ \text{если}\ \ x\leqslant y;\\ -y\ ,\ \text{если}\ \ x>y\end{cases}$ имеет разрыв при $x=y$. Следовательно, не все условия «Теоремы 3» для функции $u(x)=\int\limits_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy$ выполнены.

Запишем заданную функцию $u(x)$ в следующем виде

$$u(x)=\int\limits_0^x y(1-x)\,v(y)\,dy+\int\limits_x^1 x(1-y)\,v(y)\,dy\,.$$

Тогда, функции $f_1(x,y)=y(1-x)\,v(y)\ ,\ \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}=-y\,v(y)\ ,$

$f_2(x,y)=x(1-y)\,v(y)\ ,\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}=(1-y)\,v(y)$ определены и непрерывны. Производные функций $\varphi_1(x)=0$, $\psi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x$, $\psi_2(x)=1$ существуют.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$u'(x)=-\int\limits_0^x y\,v(y)\,dy+x(1-x)\,v(x)+\int\limits_x^1(1-y)\,v(y)\,dy-$$

$$-x(1-x)\,v(x)=-\int\limits_0^x y\,v(y)\,dy+\int\limits_x^1(1-y)\,v(y)\,dy\ .$$

Вычислим вторую производную функции $u(x)$.

Функции $f_3(x,y)=-y\,v(y)\ ,\ \dfrac{\partial f_3(x,y)}{\partial x}=0\,,\ f_4(x,y)=(1-y)\,v(y)\ ,$ $\dfrac{\partial f_4(x,y)}{\partial x}=0$ определены и непрерывны. Производные функций $\varphi_3(x)=0$, $\psi_3(x)=x$, $\varphi_4(x)=x$, $\psi_4(x)=1$ существуют.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$u''(x) = \int\limits_0^x 0\,dy - x\,v(x) + \int\limits_x^1 0\,dy - (1-x)\;v(x) = -v(x)\;\;.$$

- -

Задача 29.5 (№3711 [1]). Показать, что интеграл

$$F(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)\;dx$$

от разрывной функции $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)$ является функцией непрерывной. Построить график функции $F(y)$.

Р е ш е н и е:

$$F(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\;dx = \{t = x-y\;\;,\;\;dt = dx\} = \int\limits_{-y}^{1-y} \operatorname{sgn} t\,dt\;\;,$$

где $\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1\;,\;\text{если}\;\;t<0\;; \\ \;\;0\;,\;\text{если}\;\;t=0\;; \\ \;\;1\;,\;\text{если}\;\;t>0 \end{cases}$.

Тогда, если $1-y<0\;\;\;(y>1)$, то

$$F(y) = \int\limits_{-y}^{1-y} (-1)\,dt = -1\;.$$

Если $-y>0\;\;\;(y<0)$, то

$$F(y) = \int\limits_{-y}^{1-y} (+1)\,dt = 1\;.$$

Если $\begin{cases} -y<0 \\ 1-y>0 \end{cases}\qquad (0<y<1)$, то

$$F(y) = \int\limits_{-y}^{0} (-1)\,dt + \int\limits_0^{1-y} (+1)\,dt = 1-2y\;.$$

Так как, $F(0) = \int\limits_0^1 \operatorname{sgn} x\, dx = 1$ и $F(1) = \int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-1)\, dx = -1$, то функция $F(y)$ является непрерывной функцией и имеет следующий вид

$$F(y) = \begin{cases} 1\,, \text{ если } y < 0\,; \\ 1-2y\,, \text{ если } 0 \leqslant y \leqslant 1\,; \\ -1\,, \text{ если } y > 1 \end{cases} \qquad \text{(см. Рис.29.3)}\ .$$

- -

Задача 29.6 (№3713(в) [1]). Найти

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^2 x^2 \cos(\alpha x)\, dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Функция $f(x\,,\,\alpha) = x^2\cos(\alpha x)$ определена и непрерывна при любых x и α. Следовательно (Теорема 1), функция $I(\alpha) = \int\limits_0^2 x^2\cos(\alpha x)\, dx$ является непрерывной функцией при любых α. Тогда,

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^2 x^2 \cos(\alpha x)\, dx = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \int\limits_0^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}\,.$$

О т в е т:

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^2 x^2 \cos(\alpha x)\, dx = \frac{8}{3}$$

- -

Задача 29.7 (№3718(б) [1]). Найти $F'(\alpha)$, если

$$F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x,\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}$ и $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \cos(\alpha x)$ определены и непрерывны при любых x и α. Производные функций $\varphi(\alpha) = a+\alpha$ и $\psi(\alpha) = b+\alpha$ существуют при любых α.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$F'(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \cos(\alpha x)\, dx + \frac{\sin(\alpha(b+\alpha))}{b+\alpha} - \frac{\sin(\alpha(a+\alpha))}{a+\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_{x=a+\alpha}^{x=b+\alpha} + \frac{\sin(\alpha(b+\alpha))}{b+\alpha} - \frac{\sin(\alpha(a+\alpha))}{a+\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right)\sin(\alpha(b+\alpha)) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right)\sin(\alpha(a+\alpha)) \ .$$

- -

Задача 29.8 (№3719 [1]). Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int\limits_0^x (x+y)\, f(y)\, dy\,,$$

где $f(y)$ − дифференцируемая функция.

Р е ш е н и е:

Функции $f_1(x,y) = (x+y)\, f(y)$, $\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = f(y)$ определены и непрерывны при любых x и y. Производные функций $\varphi_1(x) = 0$, $\psi_1(x) = x$ существуют.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$F'(x) = \int\limits_0^x f(y)\, dy + 2x\, f(x) \ .$$

Вычислим вторую производную функции $F(x)$.

Функции $f_2(x,y) = f(y)$, $\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = 0$ определены и непрерывны при любых x и y. Производные функций $\varphi_2(x) = 0$, $\psi_2(x) = x$ существуют.

Следовательно (Теорема 3′), применима формула Лейбница. Тогда,

$$F''(x) = \int\limits_0^x 0\, dy + f(x) + 2f(x) + 2x\, f'(x) = 3f(x) + 2x\, f'(x) \ .$$

- -

2.9.2 Занятие 30

Задача 30.1 (№3732 [1]). Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Интеграл $I\,(a\,,\,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)\,dx$ при $a \neq 0\,,\ b \neq 0$ является собственным интегралом, зависящим от параметров a и $b\,.$

Функции $f\,(x\,,\,a\,,\,b) = \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,,$ $\dfrac{\partial f}{\partial b} = \dfrac{2b\cos^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ определены и непрерывны при любых x и $a\,,\,b \neq 0\,.$ Следовательно (Теорема 1 , Теорема 3), интеграл $I\,(a\,,\,b)$ является непрерывной функцией и применима формула Лейбница.

Вычислим производную $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial a}\,.$

$$\frac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial a} = 2a\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \left\{\operatorname{tg} x = t \to dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\} =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{(a^2t^2+b^2)\,(1+t^2)} = \left\{\frac{t^2}{(a^2t^2+b^2)\,(1+t^2)} = \frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{a^2t^2+b^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\ ,\ a^2 \neq b^2\right\} = \frac{2a}{b^2-a^2}\cdot\left(b^2\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{b^2+a^2t^2} - \int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= \frac{2a}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{at}{b}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right) - \left(\operatorname{arctg} t\big|_{t=0}^{t=\infty}\right)\right) =$$

$$= \frac{2a}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{|b|}{|a|} - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi a}{b^2-a^2}\cdot\frac{|b|-|a|}{|a|} = \frac{\pi\operatorname{sgn} a}{|b|+|a|}$$

Итак, $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial a} = \dfrac{\pi \operatorname{sgn} a}{|b| + |a|}$ при $a^2 \neq b^2$. Если $a^2 = b^2$, то

$$\frac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial a} = \frac{2}{a}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\;dx = \frac{\pi}{2a}$$

и формула для $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial a}$ верна и при $a^2 = b^2$.

Тогда,

$$I\,(a\,,\,b) = \int \frac{\pi \operatorname{sgn} a\,da}{|b| + |a|} = \pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C_1\,(b) \quad (*)\ .$$

Вычислим производную $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial b}$.

$$\frac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial b} = 2b\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \left\{\operatorname{tg} x = t \to dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\} =$$

$$= 2b\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2t^2 + b^2)\,(1+t^2)} = \left\{\frac{1}{(a^2t^2 + b^2)\,(1+t^2)} = \frac{-a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{1}{a^2t^2 + b^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b^2 - a^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\ ,\ a^2 \neq b^2\right\} = \frac{2b}{b^2 - a^2}\cdot\left(-a^2\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{b^2 + a^2t^2} + \int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= \frac{2b}{b^2 - a^2}\cdot\left(-\frac{a}{b}\left(\operatorname{arctg}\frac{at}{b}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right) + \left(\operatorname{arctg} t\big|_{t=0}^{t=\infty}\right)\right) =$$

$$= \frac{2b}{b^2 - a^2}\cdot\left(-\frac{a}{b}\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi b}{b^2 - a^2}\cdot\left(1 - \frac{|a|}{|b|}\right) =$$

$$= \frac{\pi b}{b^2 - a^2}\cdot\frac{|b| - |a|}{|b|} = \frac{\pi \operatorname{sgn} b}{|b| + |a|}$$

Итак, $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial b} = \dfrac{\pi \operatorname{sgn} b}{|b| + |a|}$ при $a^2 \neq b^2$. Если $a^2 = b^2$, то

$$\frac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial b} = \frac{2}{b}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{b}\int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\;dx = \frac{\pi}{2b}$$

и формула для $\dfrac{\partial I\,(a\,,\,b)}{\partial b}$ верна и при $a^2 = b^2$.

Тогда,

$$I\,(a\,,\,b) = \int \frac{\pi \operatorname{sgn} b\, db}{|b| + |a|} = \pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C_2\,(a) \quad (**)\ .$$

Выражения $(*)$ и $(**)$ равны друг другу. То есть,

$$\pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C_1\,(b) = \pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C_2\,(a) \quad \to$$

$$\to C_1\,(b) = C_2\,(a) = C = \text{const}\,.$$

Тогда,

$$I\,(a\,,\,b) = \pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C\ .$$

Вычислим частное значение интеграла

$$I\,(1\,,\,1) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\ln 1}_{=\,0}\,dx = 0\ .$$

Интеграл $I\,(a\,,\,b)$ является непрерывной функцией параметров. Поэтому

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ b\to 1}} I\,(a\,,\,b) = I\,(1\,,\,1)\ .$$

То есть,

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ b\to 1}} \left(\pi \ln\left(|b| + |a|\right) + C\right) = \pi \ln 2 + C = 0\,.$$

Отсюда следует, что $C = -\pi \ln 2\,.$

Итак, интеграл $I\,(a\,,\,b)$ равен

$$I\,(a\,,\,b) = \pi \ln\left(|b| + |a|\right) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)\,dx = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}$$

- -

Задача 30.2 (№3737 [1]). Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \quad (a > 0\,,\,b > 0)\ .$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \left\{ \int\limits_a^b x^t dt = \frac{1}{\ln x} \cdot \left(x^t \Big|_{t=a}^{t=b} \right) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \right\} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^t dt =$$

$$= \left\{ f(x\,,\,t) = x^t - \text{ непрерывная функция переменных } x\,,\ t. \text{ Тогда,} \right.$$

$$\left. \text{применима Теорема 2.} \right\} = \int\limits_a^b dt \int\limits_0^1 x^t\, dx = \int\limits_a^b \left(\frac{x^{t+1}}{1+t} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_{t=a}^{t=b} = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Задача 30.3 (№3738(а) [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \qquad (a > 0\,,\ b > 0)\ .$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \left\{ \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^t dt \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) dx \int\limits_a^b x^t dt = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot x^t dt =$$

$$= \left\{ f(x\,,\,t) = \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot x^t - \text{ непрерывная функция при } \ 0 < x < 1\ , \right.$$

$$\left. a < t < b\ . \text{ Применима Теорема 2.} \right\} = \int\limits_a^b dt \underbrace{\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot x^t\, dx}_{= J} =$$

$$= \left\{ J = \int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot x^t\, dx = \left\{ \text{Замена переменной :} \quad \ln \frac{1}{x} = y \to \right. \right.$$

$$\to x = e^{-y} \;\;,\;\; dx = -e^{-y}dy\Big\} = \int\limits_0^{\infty} \sin y \cdot e^{-(1+t)y}\, dy =$$

$$= -\int\limits_0^{\infty} e^{-(1+t)y}\, d(\cos y) = \underbrace{-\left(\cos y\; e^{-(1+t)y}\Big|_{y=0}^{y=\infty}\right)}_{=1} -$$

$$-(1+t)\int\limits_0^{\infty} \cos y \cdot e^{-(1+t)y}\, dy = 1 - (1+t)\int\limits_0^{\infty} e^{-(1+t)y}\, d(\sin y) =$$

$$= 1 - (1+t)\left(\underbrace{\left(\sin y\; e^{-(1+t)y}\Big|_{y=0}^{y=\infty}\right)}_{=0} + (1+t)\underbrace{\int\limits_0^{\infty} \sin y \cdot e^{-(1+t)y}\, dy}_{=J}\right) =$$

$$= 1 - (1+t)^2 \cdot J \to J = 1 - (1+t)^2 \cdot J \to J = \frac{1}{1+(1+t)^2}\Bigg\} =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{dt}{1+(1+t)^2} = \operatorname{arctg}(1+t)\Big|_{t=a}^{t=b} = \operatorname{arctg}(1+b) - \operatorname{arctg}(1+a) =$$

$$= \left\{\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right\} = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}\;.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Пусть в полуполосе D (Рис.30.1) определена непрерывная функция $f(x,y)$ такая, что при любом $c < y < d$ существует (сходится) интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\; dx$, являющийся несобственным интегралом, зависящим от параметра.

По определению, сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\; dx$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и заданного $c < y < d$ существует число $B(\varepsilon, y)$ такое, что при всяком $b > B(\varepsilon, y)$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_b^{\infty} f(x,y)\; dx\right| < \varepsilon$.

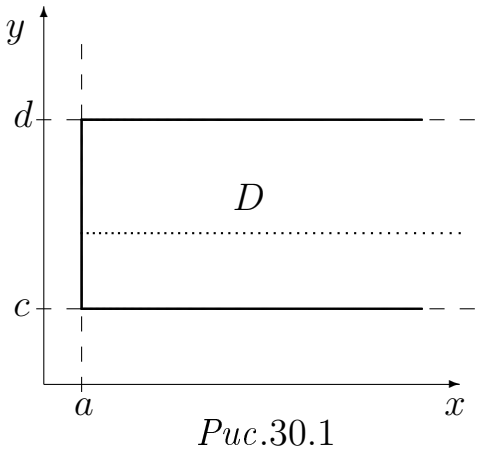

*Рис.*30.1

Задача 30.4 (№3741 [1]). Определить область сходимости интеграла

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x\,,\,a) = \dfrac{e^{-ax}}{1+x^2}$ при $a \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$f(x\,,\,a) = \frac{e^{-ax}}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = F(x)\ .$$

Так как, интеграл $\int\limits_0^\infty F(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ сходится, то и интеграл $I(a) = \int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$ сходится (по признаку сравнения).

При $a < 0$ функции $f(x\,,\,a) = \dfrac{e^{-ax}}{1+x^2}$ с ростом x неограничено возрастает. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$ при $a < 0$ расходится.

О т в е т:

Интеграл $I(a) = \int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$ существует (сходится) при $a \geqslant 0$

Задача 30.5 (№3734 [1]). Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\ \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Функции $f(x,\,a)=\dfrac{\operatorname{arctg}(a\ \operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}$ определены и непрерывны при $0<x<\pi/2$ и любых a. Следовательно (Теорема1 , Теорема3), интеграл $I(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\operatorname{arctg}(a\ \operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$ является непрерывной функцией и применима формула Лейбница.

Вычислим производную $\dfrac{dI(a)}{da}$.

$$\frac{dI(a)}{da}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}=\left\{\operatorname{tg}x=t\to dx=\frac{dt}{1+t^2}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}=\left\{\frac{1}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}=-\frac{a^2}{1-a^2}\cdot\frac{1}{1+a^2t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\ ,\ a\neq\pm1\right\}=\frac{-1}{1-a^2}\cdot\left(a^2\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+a^2t^2}-\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\left(-a\left(\operatorname{arctg}(at)\big|_{t=0}^{t=\infty}\right)+\left(\operatorname{arctg}t\big|_{t=0}^{t=\infty}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\left(-a\cdot\operatorname{sgn}a\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-|a|}{1-a^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+|a|}$$

Итак, $\dfrac{dI(a)}{da}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+|a|}$ при $a\neq\pm1$ $(*)$. Если $a=\pm1$, то

$$\frac{dI(a)}{da}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+cos2x)\ dx=\frac{\pi}{4}$$

и формула $(*)$ верна и при $a=\pm1$.

Тогда,

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{1+|a|}=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}a\cdot\ln(1+|a|)+C\ .$$

Частное значение интеграла $I(0)=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\operatorname{arctg}(0)}{\operatorname{tg}x}\,dx=0$.

Интеграл $I(a)$ является непрерывной функцией. Поэтому,

$$\lim_{a\to0}I(a)=\lim_{a\to0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}a\cdot\ln(1+|a|)+C\right)=C=0\,.$$

Итак, интеграл $I(a)$ равен

$$I(a) = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1 + |a|) \ .$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \ \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1 + |a|)$$

Задача 30.6 (№3738(б) [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \qquad (a > 0\,,\ b > 0) \ .$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \left\{ \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^t dt \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx \int\limits_a^b x^t dt = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot x^t dt =$$

$$= \Bigg\{ f(x\,,\,t) = \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot x^t - \text{ непрерывная функция при } 0 < x < 1,$$

$a < t < b$. Применима Теорема 2.$\Big\} = \int\limits_a^b dt \underbrace{\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot x^t\, dx}_{= J} =$

$$= \left\{ J = \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot x^t\, dx = \Big\{ \text{Замена переменной}: \quad \ln\frac{1}{x} = y \to \right.$$

$$\to x = e^{-y} \ , \ \ dx = -e^{-y} dy \Big\} = \int\limits_0^\infty \cos y \cdot e^{-(1+t)y}\, dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-(1+t)y}\, d(\sin y) = \underbrace{\left(\sin y\, e^{-(1+t)y} \Big|_{y=0}^{y=\infty} \right)}_{= 0} +$$

$$+ (1+t) \int\limits_0^\infty \sin y \cdot e^{-(1+t)y}\, dy = -(1+t) \int\limits_0^\infty e^{-(1+t)y}\, d(\cos y) =$$

$$= -(1+t)\left(\underbrace{\left(\cos y\, e^{-(1+t)y}\Big|_{y=0}^{y=\infty}\right)}_{=-1} + (1+t)\underbrace{\int\limits_0^\infty \cos y\cdot e^{-(1+t)y}\,dy}_{=J}\right) =$$

$$= (1+t) - (1+t)^2\cdot J \to J = (1+t) - (1+t)^2\cdot J \to$$

$$\to J = \frac{1+t}{1+(1+t)^2}\Bigg\} = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{d\,(1+t)^2}{1+(1+t)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+(1+t)^2\right)\Big|_{t=a}^{t=b} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+(1+b)^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+(1+a)^2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$$

Задача 30.7 (№3742 [1]). Определить область сходимости интеграла

$$I\,(p,q) = \int\limits_\pi^\infty \frac{x\,\cos x}{x^p+x^q}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Интеграл

$$I\,(p,q) = \int\limits_\pi^\infty \frac{x\,\cos x}{x^p+x^q}\,dx = \int\limits_\pi^\infty \underbrace{\cos x}_{=f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^{p-1}+x^{q-1}}}_{=g(x,p,q)}\,dx$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметров.

Функция $f\,(x) = \cos x$, входящая в подынтегральное выражение, имеет ограниченную первообразную при $\pi < x < \infty$.

Если $p > q$, то при $p-1>0$ $(p>1)$ функция $g\,(x,p,q) = \dfrac{1}{x^{p-1}+x^{q-1}}$ монотонно стремится к нулю с ростом x.

Если $q > p$, то при $q-1>0$ $(q>1)$ функция $g\,(x,p,q) = \dfrac{1}{x^{p-1}+x^{q-1}}$ монотонно стремится к нулю с ростом x.

Следовательно (по признаку сходимости), интеграл $I\,(p,q)$ сходится при $\max\,(p,q) > 1$.

О т в е т:

$$\text{Интеграл } I(p,q) = \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{x\,\cos x}{x^p + x^q}\,dx \quad \text{сходится при } \max(p,q) > 1$$

- -

2.10 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.10.1 Занятие 31

Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty\,,\ c < y < d\,.$

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ называется равномерно сходящимся в интервале (c,d) , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B(\varepsilon)$ такое, что для любого $b \geqslant B(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ при любом $c < y < d\,.$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра). Для равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ в интервале (c,d) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $B(\varepsilon)$ такое, что если $b_1 > B(\varepsilon)$ и $b_2 > B(\varepsilon)$ то выполнено неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ при любом $c < y < d\,.$

Теорема 2 (достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимосми абсолютно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра). Для равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ достаточно, чтобы существовала не зависящая от параметра y функция $F(x)$ такая, что $|f(x,y)| \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x < +\infty\,,\ c < y < d$ и интеграл $\int\limits_a^\infty F(x)\,dx$ сходился.

Теорема 3 (достаточный признак Дирихле-Абеля равномерной сходимосми условно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра). Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на интервале $c < y < d$ если:

1. Для функции $f(x,y)$ верна равномерная оценка $\left|\int\limits_a^x f(x,y)\,dx\right| < M\,;$

2. Функция $g(x,y)$ монотонно по x и равномерно по $c < y < d$ стремится к нулю при $x \to +\infty\,.$

Теорема 4 (достаточное условие непрерывности функции, заданной в виде несобственного интеграла, зависящего от параметра). Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно в интервале $c < y < d$, то функция $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ непрерывна в интервале $c < y < d$.

Задача 31.1 (№3754 [1]). Показать, что интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx$$

сходится :

1. Равномерно в любом промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$;

2. Неравномерно в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

Р е ш е н и е:

1. Используем определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра:

$$\left|\int\limits_{b_1}^\infty \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx\right| = \int\limits_{b_1}^\infty e^{-\alpha x}\,d(\alpha x) = -\,e^{-\alpha x}\Big|_{x=b_1}^{x=\infty} = e^{-\alpha b_1} \leqslant e^{-a b_1} < \varepsilon$$

$$\text{при} \quad b_1 > \frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon} = B(\varepsilon)\ .$$

Следовательно, интеграл $I = \int\limits_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx$ сходится равномерно на промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$.

2. Для доказательства неравномерной сходимости интеграла I на промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ покажем, что для интеграла I выполнено формальное отрицание критерия Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра :

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx\right| = \int\limits_{b_1}^{b_2} e^{-\alpha x}\,d(\alpha x) = \{\text{Выберем} \ \ b_2 = \infty\,.\} = -\,e^{-\alpha x}\Big|_{x=b_1}^{x=\infty} =$$

$$= e^{-\alpha b_1} = \left\{\text{При любом} \ \ b_1 \ \ \text{выберем} \ \ \alpha = \frac{1}{b_1}\,.\right\} = e^{-1} \geqslant \varepsilon = \frac{1}{2}\,e^{-1}\,.$$

Следовательно, интеграл $I = \int\limits_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx$ сходится неравномерно на промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

- -

Задача 31.2 (№3758 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в заданном промежутке следующий интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)\ .$$

Р е ш е н и е:

Используем достаточный признак Вейерштрасса (Теорема 2). Для функции $f(x,\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}$ при $-\infty < x < +\infty\,,\ -\infty < \alpha < +\infty$ верно неравенство

$$|f(x,\alpha)| = \frac{|\cos(\alpha\, x)|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = F(x)\ .$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \pi -$ сходится.

Следовательно (Теорема 2), интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, dx$ на промежутке $-\infty < \alpha < +\infty$ сходится равномерно.

- -

Задача 31.3 (№3760(а) [1]). Исследовать на равномерную сходимость в заданном промежутке следующий интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\alpha\, x}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)\ .$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл запишем в виде

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\alpha\, x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x,\alpha)\ g(x,\alpha)\ dx\,,$$

где $f(x,\alpha) = \sin x\,,\ g(x,\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha\, x}}{x}\,.$

Используем достаточный признак Дирихле-Абеля (Теорема 3). Для функции $f(x,\alpha) = \sin x$ верна равномерная оценка

$$\left|\int\limits_{0}^{x} f(x,\alpha)\ dx\right| = \left|\int\limits_{0}^{x} \sin x\, dx\right| = |-\cos x + 1| \leqslant 2 = M\,.$$

Для функции $g(x,\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ верно неравенство $g(x,\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$ для любого $0\leqslant\alpha<+\infty$. То есть, функция $g(x,\alpha)$ монотонно по x и равномерно по $0\leqslant\alpha<+\infty$ стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Следовательно (Теорема 3), интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}\,dx$ на промежутке $0\leqslant\alpha<+\infty$ сходится равномерно.

- -

Задача 31.4 (№3762 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в заданном промежутке интеграл

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}\,dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)\ .$$

Р е ш е н и е:

Покажем, что заданный интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}\,dx$ на промежутке $0\leqslant\alpha<+\infty$ сходится неравномерно. Для этого, проверим выполнение отрицания критерия Коши:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}\,dx\right|=\{\text{Выберем }\ b_2=\infty\,.\}=\int\limits_{b_1}^{\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}\,dx=$$

$$=\left\{\text{Замена переменной: }\ t=\sqrt{\alpha}\,x\,.\right\}=\int\limits_{\sqrt{\alpha}\,b_1}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=$$

$$=\left\{\text{Используем табличную функцию }\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x}e^{-t^2}\,dt\ ;\ \Phi(0)=0,\right.$$

$$\left.\Phi(\infty)=1\ ,\ \Phi(x)=\Phi(-x)\ \ (\text{Рис.31.1})\right\}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt-\int\limits_0^{\sqrt{\alpha}\,b_1}e^{-t^2}\,dt\right)\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt}_{=1}-\right.$$

$$\left.-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha}\,b_1}e^{-t^2}\,dt}_{=\Phi(\sqrt{\alpha}\,b_1)}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\alpha}\,b_1\right)\right)=\{\text{При любом }\ b_1\ \text{ выберем}$$

$$\alpha = \frac{1}{b_1^2}\,.\Big\} = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1-\Phi\,(1))}_{=A} > \varepsilon = \frac{1}{2}\cdot A\,.$$

Следовательно, интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha\, x^2}\, dx$ сходится неравномерно на промежутке $0 \leqslant \alpha < +\infty$.

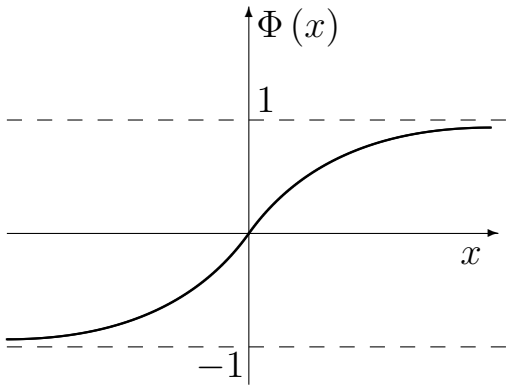

*Рис.*31.1

Задача 31.5 (№3777.2 [1]). Доказать, что интеграл

$$F\,(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\, dx$$

есть непрерывная функция параметра a.

Р е ш е н и е:

Фиксируем произвольное значение $a^* \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что функция $F\,(a)$ непрерывна в точке a^*.

Выберем промежуток значений $a \in [a^* - \delta, a^* + \delta]$, $\delta > 0$. Докажем, что интеграл $F\,(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\, dx$ сходится равномерно на промежутке $a \in [a^* - \delta, a^* + \delta]$. Используем определение равномерной сходимости:

$$\left|\int\limits_b^{\infty} e^{-(x-a)^2}\, dx\right| = \{t = x - a\} = \int\limits_{b-a}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{b-a} e^{-t^2}\, dt\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1-\Phi\,(b-a)) < \varepsilon\,.$$

Решим неравенство $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\Phi\left(b-a\right)\right)<\varepsilon$ относительно параметра b :

$$1-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}<\Phi\left(b-a\right)\rightarrow\left\{\text{Обозначим через }\ \Phi^{-1}\ \text{ обратную к }\ \Phi\right.$$
$$\left.\text{функцию.}\right\}\rightarrow\Phi^{-1}\left(1-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)<b-a\rightarrow b>a+\Phi^{-1}\left(1-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Так как $a\leqslant a^{*}+\delta$, то неравенство $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\Phi\left(b-a\right)\right)<\varepsilon$ будет выполнено для любого $b>B\left(\varepsilon\right)=a^{*}+\delta+\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)$.

Итак, интеграл $F\left(a\right)$ на промежутке $a\in\left[a^{*}-\delta,a^{*}+\delta\right]$ сходится равномерно. Следовательно (Теорема 4), функция $F\left(a\right)$ является непрерывной функцией на промежутке $a\in\left[a^{*}-\delta,a^{*}+\delta\right]$ и в точке a^{*}. В силу произвольности выбора точки a^{*}, функция $F\left(a\right)$ непрерывна при всех $-\infty<a<+\infty$.

- -

Задача 31.6 (№3759 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в заданном промежутке интеграл

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{2}+1}\quad\left(0\leqslant\alpha<+\infty\right).$$

Р е ш е н и е:

Покажем, что заданный интеграл $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{2}+1}$ на промежутке $0\leqslant\alpha<+\infty$ сходится неравномерно. Для этого, проверим выполнение отрицания критерия Коши:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{2}+1}\right|=\left\{\text{Выберем }\ b_2=\infty.\right\}=\int\limits_{b_1}^{\infty}\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{2}+1}=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(x-\alpha\right)\Big|_{x=b_1}^{x=\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(b_1-\alpha\right)=\left\{\text{При любом }\ b_1\ \text{ выберем}\right.$$
$$\left.\alpha=b_1.\right\}=\frac{\pi}{2}-0>\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{2}+1}$ сходится неравномерно на промежутке $0\leqslant\alpha<+\infty$.

- -

Задача 31.7 (№3767 [1]). Исследовать на равномерную сходимость в указанном промежутке интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (0 \leqslant n < +\infty)\ .$$

Р е ш е н и е:

Используем достаточный признак Вейерштрасса (Теорема 2). Для функции $f(x,n) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 < x < 1\,,\ 0 \leqslant n < +\infty$ верно неравенство

$$|f(x,n)| = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = F(x)\ .$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 F(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится (признак сравнения), так как

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1-0}{=} O^*\left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)\ .$$

Следовательно (Теорема 2), интеграл $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ на промежутке $0 \leqslant n < +\infty$ сходится равномерно.

- -

Задача 31.8 (№3780 [1]). Исследовать на непрерывность в указанном промежутке функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{при} \quad \alpha > 0\,.$$

Р е ш е н и е:

Фиксируем произвольное значение $\alpha^* > 0$. Покажем, что функция $F(\alpha)$ непрерывна в точке α^*.

Выберем α_0 так, чтобы $\alpha^* \geqslant \alpha_0 > 0$. Докажем, что интеграл $F(\alpha) = \int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ сходится равномерно на промежутке $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$.

Заданный интеграл запишем в виде

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x,\alpha)\cdot g(x,\alpha)\,dx\,,$$

где $f(x,\alpha)=\cos x\,,\ g(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}\,.$

Используем достаточный признак Дирихле-Абеля (Теорема 3). Для функции $f(x,\alpha)=\cos x$ верна равномерная оценка

$$\left|\int\limits_1^x f(x,\alpha)\,dx\right|=\left|\int\limits_1^x \cos x\,dx\right|=|\sin x-\sin 1|<2=M\,.$$

Функция $g(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ удовлетворяет неравенству $g(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{x^{\alpha_0}}$ для любого $\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$. То есть, функция $g(x,\alpha)$ монотонно по x и равномерно по $\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Тогда (Теорема 3), интеграл $F(\alpha)=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ на промежутке $\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ сходится равномерно.

Следовательно (Теорема 4), функция $F(\alpha)$ является непрерывной функцией на промежутке $\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ и в точке α^*. В силу произвольности выбора точки α^*, функция $F(\alpha)$ непрерывна при всех $0<\alpha<+\infty$.

- -

2.10.2 Занятие 32

Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе $a \leqslant x < +\infty$, $c < y < d$. Пусть для некоторого $y \in (c,d)$ сходится интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$, а интеграл $\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно по y на интервале (c,d). Тогда, функция $I(y)$ дифференцируема на интервале (c,d) и её производная равна

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \quad \text{(формула Лейбница)}.$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$. Пусть интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по y на сегменте $[c,d]$. Тогда, функция $I(y)$ интегрируема на сегменте $[c,d]$ и равны повторные интегралы

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \quad (1).$$

Замечание. Если функция $f(x,y) \geqslant 0$, то формула (1) верна и в случае бесконечного промежутка $c \leqslant y < +\infty$ при условии, что в повторных интегралах (1) внутренние несобственные интегралы являются непрерывными функциями и хотя бы один из повторных интегралов существует.

- -

Задача 32.1 (№3786 [1]). Доказать, что интеграл Дирихле

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако её нельзя найти с помощью формулы Лейбница.

У к а з а н и е. Положить $\alpha x = y$.

Р е ш е н и е:

Если $\alpha = 0$, то $D(0) = 0$.

Если $\alpha > 0$, то

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \{\alpha x = y\} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = C - \text{const}\,,$$

так как интеграл сходится (признак Дирихле-Абеля).

Если $\alpha < 0$, то

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \{\alpha x = -y\} = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = -C\,.$$

Следовательно, интеграл $D(\alpha) = C \cdot \operatorname{sgn}\alpha$. При $\alpha \neq 0$ интеграл $D(\alpha)$ равен константе. Производная константы существует и равна нулю.

Для интеграла Дирихле $D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx$ проверим выполнение условий «Теоремы 1». Подынтегральная функция $f(x,\alpha) = \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ и её частная производная $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \cos(\alpha x)$ непрерывны, но интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos(\alpha x)\, dx -$ расходится. Не все условия «Теоремы 1» выполнены и формулу Лейбница для интеграла $D(\alpha)$ использовать нельзя.

- -

Задача 32.2 (№3812.1 [1]). Исходя из интеграла

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx \quad (\beta > 0)\,,$$

вычислить интеграл Дирихле

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Подынтегральная функция $f(x,\alpha,\beta) = e^{-\beta x}\dfrac{\sin(\alpha x)}{x}$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial\beta} = -e^{-\beta x}\sin(\alpha x)$ непрерывные функции. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial\beta}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin(\alpha x)\,dx$ сходится равномерно (признак Дирихле-Абеля) на промежутке $0 < \beta_0 \leqslant \beta < +\infty$. Можно использовать формулу Лейбница для несобственного интеграла $I(\alpha,\beta)$:

$$I_\beta = \frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin(\alpha x)\,dx = \{\alpha \neq 0\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,d(\cos(\alpha x)) = \frac{1}{\alpha}\left(\left(e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right) + \right.$$

$$\left. +\beta\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,dx\right) = \frac{1}{\alpha}\left(-1 + \frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,d(\sin(\alpha x))\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(-1 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\underbrace{\left(e^{-\beta x}\sin(\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right)}_{=0} + \beta\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin(\alpha x)\,dx}_{=-I_\beta}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I_\beta\,.$$

Получили равенство $I_\beta = -\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}I_\beta$, из которого следует, что

$$I_\beta = -\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,.$$

Формула верна и при $\alpha = 0$, так как $I_\beta(0,\beta) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin(0)\,dx = 0$.

Интегрируя I_β, получим

$$I(\alpha,\beta) = \int I_\beta\,d\beta = -\alpha\int\frac{d\beta}{\alpha^2+\beta^2} = -\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)\,,$$

где $C(\alpha)$ – произвольная функция параметра α.

Для определения функции $C(\alpha)$ используем следующее неравенство

$$|I(\alpha,\beta)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \left| \frac{\sin(\alpha x)}{x} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha| \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, dx = -\frac{|\alpha|}{\beta} \left(e^{-\beta x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \right) = \frac{|\alpha|}{\beta},$$

из которого следует, что

$$\lim_{\beta\to\infty} I(\alpha,\beta) = 0.$$

Вычислим предел

$$\lim_{\beta\to\infty} I(\alpha,\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \left(-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha) \right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha + C(\alpha) = 0.$$

Следовательно, $C(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha$ и интеграл

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

При $\beta = 0$ интеграл $I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx$ равен интегралу Дирихле $D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx$. Тогда, интеграл Дирихле

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = I(\alpha,0) = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha.$$

О т в е т:

$$\text{Интеграл } I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\text{Интеграл Дирихле } D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha.$$

- -

Задача 32.3 (№3789 [1]). Доказать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(a\,x) - f(b\,x)}{x}\, dx = f(0)\cdot\ln\frac{b}{a} \quad (a>0,\ b>0),$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, интеграл $\int\limits_A^{\infty} \dfrac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл при любом $A>0$ и существует производная $f'(0)$.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим два определённых интеграла

$$\int\limits_0^{a\,R} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \{\text{Замена переменной: } t = a\,x\} = \int\limits_0^{R} \frac{f(a\,x)-f(0)}{x}\,dx\,,$$

$$\int\limits_0^{b\,R} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \{\text{Замена переменной: } t = b\,x\} = \int\limits_0^{R} \frac{f(b\,x)-f(0)}{x}\,dx\,.$$

Разность левых частей предыдущих равенств равна

$$\int\limits_0^{a\,R} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt - \int\limits_0^{b\,R} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{dt}{t} = \int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\cdot\ln\frac{a}{b}\,.$$

Разность правых частей тех же равенств равна

$$\int\limits_0^{R} \frac{f(a\,x)-f(0)}{x}\,dx - \int\limits_0^{R} \frac{f(b\,x)-f(0)}{x}\,dx = \int\limits_0^{R} \frac{f(a\,x)-f(b\,x)}{x}\,dx\,.$$

Разности правых и левых частей равны между собой

$$\int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{f(t)}{t}\,dt + f(0)\cdot\ln\frac{b}{a} = \int\limits_0^{R} \frac{f(a\,x)-f(b\,x)}{x}\,dx\,.$$

В полученном равенстве выполним предельный переход при $R\to+\infty$:

$$\underbrace{\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{b\,R}^{a\,R} \frac{f(t)}{t}\,dt}_{=\,0} + f(0)\cdot\ln\frac{b}{a} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(a\,x)-f(b\,x)}{x}\,dx\,.$$

Итак, верна формула Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(a\,x)-f(b\,x)}{x}\,dx = f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\,.$$

- -

Задача 32.4 (№3790 [1]). Применяя формулу Фруллани, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(a\,x)-\cos(b\,x)}{x}\,dx \quad (a>0\,,\ b>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная в подынтегральном выражении функция $f(x)=\cos x$ является непрерывной функцией. Несобственный интеграл $\int\limits_A^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ сходится при любом $A>0$. Производная $f'(0)=-\sin x|_{x=0}=0$ существует. Следовательно, для вычисления заданного интеграла можно использовать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(a\,x)-\cos(b\,x)}{x}\,dx=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(a\,x)-\cos(b\,x)}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}$$

- -

Задача 32.5 (№3793 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\,x^2}-e^{-\beta\,x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0\,,\ \beta>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная в подынтегральном выражении функция $f(x)=e^{-x^2}$ является непрерывной функцией. Несобственный интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\,dx$ сходится при любом $A>0$. Производная $f'(0)=-2x\,e^{-x^2}\Big|_{x=0}=0$ существует. Следовательно, для вычисления заданного интеграла можно использовать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\,x^2}-e^{-\beta\,x^2}}{x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(\sqrt{\alpha}\,x)^2}-e^{-\left(\sqrt{\beta}\,x\right)^2}}{x}\,dx=e^0\cdot\ln\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\,\ln\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\,x^2}-e^{-\beta\,x^2}}{x}\,dx=\frac{1}{2}\,\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Задача 32.6 (№3795 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin(m x)\, dx \quad (\alpha > 0\,,\ \beta > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin(m x)\, dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(m x)}{x}\, dx}_{\text{Интеграл сходится.}} - \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(m x)}{x}\, dx}_{\text{Интеграл сходится.}} = \{\text{см. №3812.1 [1]}\} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(m) - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}\right) - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(m) - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m} = \left\{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+a\,b}\right\} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{m \cdot (\beta - \alpha)}{m^2 + \alpha\,\beta}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin(m x)\, dx = \operatorname{arctg}\frac{m \cdot (\beta - \alpha)}{m^2 + \alpha\,\beta}$$

Задача 32.7 (№3784 [1]). Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0)\,,$$

вычислить интеграл

$$I(m) = \int\limits_0^1 x^{n-1} \ln^m x\, dx\,,$$

где m – натуральное число.

Р е ш е н и е:

Покажем по индукции, что $I(m) = \dfrac{(-1)^m\, m!}{n^{m+1}}$. Дано $I(0) = \dfrac{1}{n}$. Вычислим $I(1)$ и $I(2)$ (базис индукции).

$$I(1)=\int\limits_0^1 x^{n-1}\,\ln x\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^1 \ln x\,d\left(x^n\right)=\frac{1}{n}\left(\left(x^n\ln x\Big|_{x=0}^{x=1}\right)-\right.$$

$$\left.-\underbrace{\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx}_{=I_0}\right)=-\frac{1}{n}\cdot I(1)=-\frac{1}{n^2}$$

$$I(2)=\int\limits_0^1 x^{n-1}\,\ln^2 x\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^1 \ln^2 x\,d\left(x^n\right)=\frac{1}{n}\left(\left(x^n\ln^2 x\Big|_{x=0}^{x=1}\right)-\right.$$

$$\left.-2\underbrace{\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx}_{=I_1}\right)=-\frac{2}{n}\cdot I(1)=\frac{2}{n^3}$$

Пусть $I(m)=\dfrac{(-1)^m\,m!}{n^{m+1}}$ (предположение индукции). Вычислим $I(m+1)$ (шаг индукции).

$$I(m+1)=\int\limits_0^1 x^{n-1}\,\ln^{m+1} x\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^1 \ln^{m+1} x\,d\left(x^n\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\left(x^n\ln^{m+1}x\Big|_{x=0}^{x=1}\right)-(m+1)\underbrace{\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx}_{=I_m}\right)=-\frac{m+1}{n}\cdot I(m)=$$

$$=-\frac{m+1}{n}\cdot\frac{(-1)^m\,m!}{n^{m+1}}=\frac{(-1)^{m+1}\,(m+1)!}{n^{(m+1)+1}}$$

О т в е т:

$$I(m)=\int\limits_0^1 x^{n-1}\,\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m\,m!}{n^{m+1}}$$

- -

Задача 32.8 (№3787 [1]). Показать, что функция

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$

непрерывна и дифференцируема в области $-\infty<\alpha<+\infty$.

Р е ш е н и е:

1. Докажем непрерывность функции $F(\alpha)$ в области $-\infty<\alpha<+\infty$.

Фиксируем произвольное значение $\alpha^*\in(-\infty,+\infty)$. Покажем, что функция $F(\alpha)$ непрерывна в точке α^*.

Рассмотрим сегмент $[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$, $\delta>0$. Докажем, что интеграл $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$ сходится равномерно на сегменте $[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$.

Заданный интеграл запишем в виде

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}f(x,\alpha)\cdot g(x,\alpha)\;dx\,,$$

где $f(x,\alpha)=\cos x$, $g(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+(x+\alpha)^2}$.

Используем достаточный признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для функции $f(x,\alpha)=\cos x$ верна равномерная оценка

$$\left|\int\limits_0^{x}f(x,\alpha)\;dx\right|=\left|\int\limits_0^{x}\cos x\,dx\right|=|\sin x-\sin 0|<2=M\,.$$

Функция $g(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+(x+\alpha)^2}$ удовлетворяет неравенству

$$g(x,\alpha)=\frac{1}{1+(x+\alpha)^2}\leqslant\frac{1}{1+(x+\min(|\alpha^*-\delta|\,,|\alpha^*+\delta|))^2}$$

для любого α из сегмента $[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$. То есть, функция $g(x,\alpha)$ монотонно по x и равномерно по $\alpha\in[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$ стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Тогда (признак Дирихле-Абеля), интеграл $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$ на сегменте $[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$ сходится равномерно и функция $F(\alpha)$ является непрерывной функцией на сегменте $[\alpha^*-\delta\,,\alpha^*+\delta]$ и в точке α^*. В силу произвольности выбора точки α^*, функция $F(\alpha)$ непрерывна в области $-\infty<\alpha<+\infty$.

2. Дифференцируемость функции $F(\alpha)$ в области $-\infty < \alpha < +\infty$.

Фиксируем произвольное значение $\alpha^* \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что функция $F(\alpha)$ дифференцируема в точке α^*.

Подынтегральная функция $\dfrac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$ и её частная производная

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right) = \cos x \cdot \frac{-2(x+\alpha)}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}$$ непрерывны.

Рассмотрим сегмент $[\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$, $\delta > 0$. Докажем, что интеграл от частной производной $\int\limits_0^{+\infty} \cos x \cdot \dfrac{x+\alpha}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}\,dx$ сходится равномерно на сегменте $[\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$.

Интеграл от производной запишем в виде $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)\cdot g(x,\alpha)\,dx$, где $f(x,\alpha) = \cos x$, $g(x,\alpha) = \dfrac{x+\alpha}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}$.

Используем достаточный признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для функции $f(x,\alpha) = \cos x$ верна равномерная оценка

$$\left|\int\limits_0^x f(x,\alpha)\,dx\right| = \left|\int\limits_0^x \cos x\,dx\right| = |\sin x - \sin 0| < 2 = M.$$

Функция $g(x,\alpha) = \dfrac{x+\alpha}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}$ удовлетворяет неравенству

$$|g(x,\alpha)| = \frac{|x+\alpha|}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2} \leqslant \frac{x+\max\left(|\alpha^*-\delta|, |\alpha^*+\delta|\right)}{\left(1+\left(x+\min\left(|\alpha^*-\delta|, |\alpha^*+\delta|\right)\right)^2\right)^2}$$

для любого α из сегмента $[\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$. То есть, функция $g(x,\alpha)$ монотонно по x и равномерно по $\alpha \in [\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Тогда (признак Дирихле-Абеля), интеграл от частной производной $\int\limits_0^{+\infty} \cos x \cdot \dfrac{x+\alpha}{\left(1+(x+\alpha)^2\right)^2}\,dx$ на сегменте $[\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$ сходится равномерно и функция $F(\alpha)$ дифференцируема (применима формула Лейбница) на сегменте $[\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta]$ и в точке α^*. В силу произвольности выбора точки α^*, функция $F(\alpha)$ дифференцируема в области $-\infty < \alpha < +\infty$.

- -

Задача 32.9 (№3791 [1]). Применяя формулу Фруллани, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a\,x) - \sin(b\,x)}{x}\,dx \quad (a > 0\,,\ b > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная в подынтегральном выражении функция $f(x) = \sin x$ является непрерывной функцией. Несобственный интеграл $\int\limits_A^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится при любом $A > 0$. Производная $f'(0) = \cos x\big|_{x=0} = 1$ существует.

Следовательно, для вычисления заданного интеграла можно использовать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(a\,x) - \sin(b\,x)}{x}\,dx = \sin 0 \cdot \ln\frac{b}{a} = 0\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(a\,x) - \sin(b\,x)}{x}\,dx = 0$$

- -

2.10.3 Занятие 33

Задача 33.1 (№3803 [1]). Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2y^2}\,dy \quad (1)\,.$$

Р е ш е н и е:

Получим формулу (1).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \{\text{Замена переменной: } t = x\,y\ (x = \text{const}),\ dt = x\,dy\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2y^2}\,dy$$

Умножим обе части равенства на e^{-x^2} и проинтегрируем по x от $x = 0$ до $x = +\infty$:

$$I \cdot \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{=I} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2y^2}\,dy\,.$$

Используем формулу (1) для вычисления I^2 :

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} xe^{-\left(1+y^2\right)x^2}dy =$$

$$= \iint\limits_{D:\,x\geqslant 0\,,\,y\geqslant 0} xe^{-\left(1+y^2\right)x^2}\,dxdy = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-\left(1+y^2\right)x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(1+y^2\right)x^2}\, d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+y^2}\cdot e^{-\left(1+y^2\right)x^2}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} y\big|_{y=0}^{y=+\infty}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Тогда, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

О т в е т:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- -

Задача 33.2 (№3807 [1]). Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти следующий интеграл

$$I(a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Подынтегральная функция $f(x,a) = e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ при любом a удовлетворяет неравенству $f(x,a) = e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} \leqslant e^{-x^2} = F(x)$. Интеграл $\int\limits_0^{\infty} F(x)\, dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}-$ сходится. Следовательно (признак Вейерштрасса), интеграл $I(a)$ сходится равномерно на области $-\infty < a < +\infty$ и функция $I(a)$ является непрерывной функцией при $-\infty < a < +\infty$.

1. Частное значение интеграла $I(0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Пусть параметр $a > 0$. Подынтегральная функция $f(x,a) = e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a} = -\dfrac{2a}{x^2}\, e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\, dx = -2a\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2} = \Big\{\text{Замена переменной: } \frac{a}{x} = y,$$

$$-\frac{a}{x^2}\,dx = dy\Big\} = 2\int\limits_{+\infty}^{0} e^{-\left(\frac{a^2}{y^2}+y^2\right)}\,dy = -2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\,dy = -2\,I\,(a)$$

сходится равномерно при $-\infty < a < +\infty$. Тогда, можно использовать формулу Лейбница для несобственного интеграла $I\,(a)$:

$$\frac{dI\,(a)}{da} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial f\,(x,a)}{\partial a}\,dx = -2\,I\,(a)\ .$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I\,(a)$:

$$\frac{dI\,(a)}{da} = -2\,I\,(a)\ \to\ \frac{dI}{I} = -2da\ \to\ I\,(a) = C\cdot e^{-2a}\,.$$

Так как $I\,(a)$ функция непрерывная и $I\,(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, то

$$\lim_{a\to 0+0} I\,(a) = I\,(0)\ \to\ C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Итак, интеграл $I\,(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2a}$ при $a \geqslant 0$.

3. Пусть параметр $a < 0$. Подынтегральная функция $f\,(x,a) = e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ и её частная производная $\dfrac{\partial f\,(x,a)}{\partial a} = -\dfrac{2a}{x^2}\,e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial f\,(x,a)}{\partial a}dx = -2a\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2} = \Big\{\text{Замена переменной:}\frac{-a}{x} = y,$$

$$\frac{a}{x^2}\,dx = dy\Big\} = -2\int\limits_{+\infty}^{0} e^{-\left(\frac{a^2}{y^2}+y^2\right)}\,dy = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\,dy = 2\,I\,(a)$$

сходится равномерно при $-\infty < a < +\infty$. Тогда, можно использовать формулу Лейбница для несобственного интеграла $I\,(a)$:

$$\frac{dI\,(a)}{da} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial f\,(x,a)}{\partial a}\,dx = 2\,I\,(a)\ .$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I(a)$:

$$\frac{dI(a)}{da} = 2\,I(a) \;\to\; \frac{dI}{I} = 2da \;\to\; I(a) = C\cdot e^{2a}\,.$$

Так как $I(a)$ функция непрерывная и $I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, то

$$\lim_{a\to 0-0} I(a) = I(0) \;\to\; C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Итак, интеграл $I(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{2a}$ при $a<0$.

Тогда, при любом $-\infty < a < +\infty$ интеграл $I(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2|a|}$.

О т в е т:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2|a|}$$

- -

Задача 33.3 (№3809 [1]). Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, вычислить интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\cdot\cos(bx)\;dx \quad (a>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Подынтегральная функция $f(x,a,b) = e^{-a\,x^2}\cdot\cos(bx)$ при любом b удовлетворяет неравенству $|f(x,a,b)| = \left|e^{-a\,x^2}\cdot\cos(bx)\right| \leqslant e^{-a\,x^2} = F(x,a)$. Интеграл $\int\limits_0^\infty F(x,a)\;dx = \int\limits_0^\infty e^{-a\,x^2}\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_0^\infty e^{-(\sqrt{a}\,x)^2}\,d(\sqrt{a}x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}-$ сходится. Следовательно (признак Вейерштрасса), интеграл $I(a,b)$ сходится равномерно на области $-\infty < b < +\infty$ и функция $I(a,b)$ является непрерывной функцией при $-\infty < b < +\infty$.

Частное значение интеграла $I(a,0) = \int\limits_0^\infty e^{-a\,x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,.$

Подынтегральная функция $f(x,a,b)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,a,b)}{\partial b} = -x\sin(bx)\;e^{-a\,x^2}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f\,(x,a,b)}{\partial b}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} x\sin(bx)\;e^{-a\,x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_0^{+\infty} \sin(bx)\;e^{-a\,x^2}d\left(ax^2\right) = \frac{1}{2a}\left(\underbrace{\left(\sin(bx)\;e^{-a\,x^2}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right)}_{=\,0} - \right.$$

$$\left. -b\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\cdot\cos(bx)\;dx}_{=\,I(a,b)}\right) = -\frac{b}{2a}\,I\,(a,b)$$

сходится равномерно при $-\infty < b < +\infty$. Тогда, можно использовать формулу Лейбница для несобственного интеграла $I\,(a,b)$:

$$\frac{\partial I\,(a,b)}{\partial b} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f\,(x,a,b)}{\partial b}\,dx = -\frac{b}{2a}\,I\,(a,b)\;.$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I\,(a,b)$:

$$\frac{\partial I\,(a,b)}{\partial b} = -\frac{b}{2a}\,I\,(a,b) \;\;\rightarrow\;\; I\,(a,b) = C\,(a)\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}\,.$$

Так как $I\,(a,b)$ функция непрерывная при $-\infty < b < +\infty$ и $I\,(a,0) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$, то

$$\lim_{b\to 0} I\,(a,b) = I\,(a,0) \;\rightarrow\; C\,(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Итак, интеграл $I\,(a,b) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}$ при $a > 0$.

О т в е т:

$$I\,(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\cdot\cos(bx)\;dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}} \quad (a>0)$$

- -

Задача 33.4 (№3817 [1]). Используя интеграл Дирихле, вычислить интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Интеграл $I(\alpha)$ равен сумме двух интегралов

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\,dx=\underbrace{\int\limits_0^{A}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\,dx}_{\text{Определённый интеграл.}}+\underbrace{\int\limits_A^{+\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\,dx}_{\text{Несобственный интеграл.}}\quad.$$

Подынтегральная функция в несобственном интеграле $f(x,\alpha)=\dfrac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}$ при любом α удовлетворяет неравенству $|f(x,\alpha)|=\dfrac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}=F(x)$. Интеграл $\int\limits_A^{\infty}F(x)\,dx=\int\limits_A^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}-$ сходится. Следовательно (признак Вейерштрасса), интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на области $-\infty<\alpha<+\infty$ и функция $I(\alpha)$ является непрерывной функцией при $-\infty<\alpha<+\infty$.

Подынтегральная функция $f(x,\alpha)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\right)=\dfrac{\sin(2\alpha x)}{x}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2\alpha x)}{x}\,dx$$

является интегралом Дирихле и сходится равномерно (признак Дирихле-Абеля) при $0<\alpha_0\leqslant|\alpha|$. Используем формулу Лейбница для несобственного интеграла $I(\alpha)$:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2\alpha x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\,.$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I(\alpha)$:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\quad\to\quad I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|+C\,.$$

Так как $I(\alpha)$ функция непрерывная при $-\infty < \alpha < +\infty$ и $I(0) = 0$, то

$$\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = 0 \text{ и, следовательно, } C = 0.$$

Итак, интеграл $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}|\alpha|$ при $-\infty < \alpha < +\infty$.

О т в е т:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2} = \frac{\pi}{2}|\alpha|$$

Задача 33.5 (№3788 [1]). Исходя из равенства

$$\frac{e^{-a\,x}}{x} - \frac{e^{-b\,x}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy\,,$$

вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{x}\,dx \quad (a > 0\,,\ b > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

1. Для вычисления интеграла используем формулу Фруллани:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{x}\,dx = \Big\{ f(x) = e^{-x} \text{ - непрерывная функция,}$$

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - \text{ сходится, } f'(0) = -\,e^{-x}\big|_{x=0} = -1 \text{ существует} \Big\} = \ln\frac{b}{a}.$$

2. Для вычисления интеграла используем интегрирование по параметру несобственного интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{x}\,dx = \left\{ \frac{e^{-a\,x}}{x} - \frac{e^{-b\,x}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy \right\} = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy}\,dy =$$

$$= \big\{ g(x,y) = e^{-xy} \text{ - непрерывна при } 0 \leqslant x < +\infty\ ,\ a \leqslant y \leqslant b\,,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx - \text{ сходится равномерно (признак Вейерштрасса) при}$$

$$a \leqslant y \leqslant b\} = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \int\limits_a^b \left(-\frac{1}{y}\,e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right) dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$$

Задача 33.6 (№3825 [1]). Пользуясь формулой

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}\,dy\,,$$

вычислить интеграл Лапласа

$$L\,(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\,(a\,x)}{1+x^2}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$L\,(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\,(a\,x)}{1+x^2}\,dx = \left\{\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}\,dy\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \cos\,(a\,x)\,e^{-y\left(1+x^2\right)}\,dy = \iint\limits_{D:\,x\geqslant 0\,,\,y\geqslant 0} \cos\,(a\,x)\,e^{-y\left(1+x^2\right)}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} \cos\,(a\,x)\,e^{-y\left(1+x^2\right)}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \cos\,(a\,x)\cdot e^{-yx^2}\,dx}_{=\,I(y,a)} =$$

$$= \left\{I\,(y,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\cdot e^{-\dfrac{a^2}{4y}}\ (\text{см. №3809 [1]})\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(y+\dfrac{a^2}{4y}\right)}\,\frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= \left\{\text{Замена переменной: } x = \sqrt{y}\,,\ dx = \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}}\right\} =$$

$$= \sqrt{\pi}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\dfrac{a^2}{4x^2}\right)}\,dx}_{=\,I_1(a)} = \left\{I_1\,(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-|a|}\,(\text{см. №3807 [1]})\right\} = \frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}.$$

О т в е т:

$$L(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(a\,x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}$$

Задача 33.7 (№3826 [1]). Вычислить интеграл

$$L_1(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,\sin(a\,x)}{1+x^2}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Используем интеграл Лапласа

$$L(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(a\,x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}\,.$$

Подынтегральная функция в интеграле Лапласа $f(x,a)=\dfrac{\cos(a\,x)}{1+x^2}$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}=-\dfrac{x\,\sin(ax)}{1+x^2}$ являются непрерывными функциями. Несобственный интеграл от частной производной

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(ax)\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

сходится равномерно (признак Дирихле-Абеля) при $|a|\geqslant a_0>0$. Используем формулу Лейбница для интеграла $L(a)$:

$$\frac{dL(a)}{da}=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,\sin(a\,x)}{1+x^2}\,dx=-L_1(a)\,.$$

Следовательно, заданный интеграл $L_1(a)$ равен

$$L_1(a)=-\frac{dL(a)}{da}=-\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}a\cdot e^{-|a|}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,\sin(a\,x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}a\cdot e^{-|a|}$$

Задача 33.8 (№3804 [1]). Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(a\,x^2+2b\,x+c\right)}\,dx \quad (a>0\,,\ ac-b^2>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(a\,x^2+2b\,x+c\right)}\,dx = \left\{a\,x^2+2b\,x+c = \left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{a}+c\right\} =$$

$$= e^{\left(\dfrac{b^2-ac}{a}\right)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx = \left\{\text{Замена}: \sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}=y,\right.$$

$$\left.dx=\frac{dy}{\sqrt{a}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{\left(\dfrac{b^2-ac}{a}\right)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{\left(\dfrac{b^2-ac}{a}\right)}2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{\left(\dfrac{b^2-ac}{a}\right)}$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(a\,x^2+2b\,x+c\right)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\left(\dfrac{ac-b^2}{a}\right)}$$

Задача 33.9 (№3810(а) [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x\,e^{-a\,x^2}\,\sin(bx)\,dx \quad (a>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x\,e^{-a\,x^2}\,\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin(bx)\,d\left(e^{-a\,x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2a}\left(\underbrace{\left(e^{-a\,x^2}\,\sin(bx)\big|_{x=0}^{x=+\infty}\right)}_{=0} - b\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a\,x^2}\,\cos(bx)\,dx}_{=I(a,b)}\right) =$$

$$= \left\{ I\,(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}} \quad (\text{см. №3809 [1]}) \right\} =$$

$$= \frac{b}{2a}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}\right) = \frac{b}{4a}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-a\,x^2}\,\sin(bx)\,dx = \frac{b}{4a}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}$$

- -

Задача 33.10 (№3813 [1]). Используя интегралы Эйлера-Пуассона и Дирихле, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx \quad (a > 0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $I\,(a,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx$ равен сумме двух интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\int\limits_0^{A} \frac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx}_{\text{Определённый интеграл.}} + \underbrace{\int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx}_{\text{Несобственный интеграл.}}\,.$$

Подынтегральная непрерывная функция в несобственном интеграле $f\,(x,a,\beta) = \dfrac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}$ при $a \geqslant a_0 > 0$ удовлетворяет неравенству $|f\,(x,a,\beta)| \leqslant \dfrac{e^{-a_0\,x^2} + 1}{x^2} = F\,(x)$. Интеграл $\int\limits_A^{\infty} F\,(x)\,dx -$ сходится. Следовательно (признак Вейерштрасса), интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \dfrac{e^{-a\,x^2} - \cos(\beta x)}{x^2}\,dx$ сходится равномерно при $a \geqslant a_0 > 0$ и функция $I\,(a,\beta)$ является непрерывной функцией при $a \geqslant a_0 > 0$ и $-\infty < \beta < +\infty$. Так как a_0 произвольное положительное число, то $I\,(a,\beta)$ является непрерывной функцией при $a > 0$ и $-\infty < \beta < +\infty$.

Частное значение функции $I\,(0,0) = 0$.

Подынтегральная функция $f(x,a,\beta)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,a,\beta)}{\partial a} = -e^{-a\,x^2}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,a,\beta)}{\partial a}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\,dx$ сходится равномерно (признак Вейерштрасса) при $a \geqslant a_0 > 0$. Используем формулу Лейбница для несобственного интеграла $I(a,\beta)$:

$$\frac{\partial I(a,\beta)}{\partial a} = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}\,x)^2}\,d\left(\sqrt{a}\,x\right) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I(a,\beta)$:

$$\frac{\partial I(a,\beta)}{\partial a} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad\to\quad I(a,\beta) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\frac{da}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\pi a} + C_1(\beta) \quad (1)\,.$$

Подынтегральная функция $f(x,a,\beta)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,a,\beta)}{\partial \beta} = \dfrac{\sin(\beta x)}{x}$ непрерывные функции. Несобственный интеграл от частной производной $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,a,\beta)}{\partial \beta}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\beta x)}{x}\,dx$ сходится равномерно (признак Дирихле-Абеля) при $|\beta| \geqslant \beta_0 > 0$. Используем формулу Лейбница для несобственного интеграла $I(a,\beta)$:

$$\frac{\partial I(a,\beta)}{\partial \beta} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\beta\,.$$

Решаем дифференциальное уравнение для функции $I(a,\beta)$:

$$\frac{\partial I(a,\beta)}{\partial \beta} = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\beta \quad\to\quad I(a,\beta) = \frac{\pi}{2}\int\operatorname{sgn}\beta\,d\beta = \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| + C_2(a) \quad (2)\,.$$

Соотношения (1) и (2) определяют функцию $I(a,\beta)$. Поэтому,

$$I(a,\beta) = -\sqrt{\pi a} + C_1(\beta) = \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| + C_2(a) \quad\to$$

$$\to\quad -\sqrt{\pi a} - C_2(a) = \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| - C_1(\beta) = C - \text{const} \quad\to$$

$$\to\quad C_1(\beta) = \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| - C\,.$$

Тогда,

$$I(a,\beta) = -\sqrt{\pi a} + \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| - C\,.$$

Так как $I(a,\beta)$ функция непрерывная и $I(0,0)=0$, то

$$\lim_{a,\beta\to 0} I(a,\beta) = I(0,0) = 0 \text{ и, следовательно, } C=0\,.$$

Итак, интеграл $I(a,\beta) = -\sqrt{\pi a} + \dfrac{\pi}{2}\cdot|\beta|$ при $a>0$.

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x^2}-\cos(\beta x)}{x^2}\,dx = -\sqrt{\pi a} + \frac{\pi}{2}\cdot|\beta| \quad (a>0)$$

- -

Задача 33.11 (№3815 [1]). Используя интеграл Дирихле, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)}{x}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)}{x}\,dx = \Big\{\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((\alpha+\beta)\,x\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left((\alpha-\beta)\,x\right)\right)\Big\} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\left((\alpha+\beta)\,x\right)}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\left((\alpha-\beta)\,x\right)}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}(\alpha-\beta) = \begin{cases} 0 & \text{, если } |\alpha|<|\beta|\ ; \\ \dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}\alpha\ \text{, если } & |\alpha|=|\beta|\ ; \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha\ \text{, если } & |\alpha|>|\beta| \end{cases}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)}{x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{, если } |\alpha|<|\beta|\ ; \\ \dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}\alpha\ \text{, если } & |\alpha|=|\beta|\ ; \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha\ \text{, если } & |\alpha|>|\beta| \end{cases}$$

- -

Задача 33.12 (№3829 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a\,x^2+2b\,x+c}\,dx \quad (a>0\ ,\ \ ac-b^2>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a\,x^2+2b\,x+c}\,dx = \left\{ a\,x^2+2b\,x+c = \left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a} = \right.$$

$$\left. = \frac{ac-b^2}{a}\left(\left(\frac{a\,x+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1\right)\right\} = \frac{a}{ac-b^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\left(\frac{a\,x+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \left\{ \text{Замена переменной: } \frac{a\,x+b}{\sqrt{ac-b^2}} = t\ ,\ x=\frac{\sqrt{ac-b^2}\,t-b}{a}\ , \right.$$

$$\left. dx = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\,dt \right\} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\,t-\frac{\alpha b}{a}\right)}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\,t\right)}{1+t^2}\,dt}_{=2\cdot L\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\right)-\text{(интеграл Лапласа)}} + \frac{\sin\left(\frac{\alpha b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\,t\right)}{1+t^2}\,dt}_{=0\ \text{(симметричные пределы интегрирования и нечётная подынтегральная функция)}} = 2\frac{\cos\left(\frac{\alpha b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot L\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\right) =$$

$$= \left\{ L\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{ac-b^2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}} \quad (\text{см. №3825 [1]}) \right\} =$$

$$= \frac{\pi\cos\left(\frac{\alpha b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot e^{-\frac{|\alpha|\sqrt{ac-b^2}}{a}}$$

Ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a\,x^2 + 2b\,x + c}\,dx = \frac{\pi \cos\left(\dfrac{\alpha b}{a}\right)}{\sqrt{ac - b^2}} \cdot e^{-\dfrac{|\alpha|\sqrt{ac - b^2}}{a}}$$

- -

2.10.4 Занятие 34

Гамма-функция Эйлера.

Определение. Гамма-функцией Эйлера принято называть несобственный интеграл

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

при $x > 0$.

Область определения гамма-функции $x > 0$ является областью сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \underbrace{\int\limits_0^{A} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt}_{=I_1} + \underbrace{\int\limits_A^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt}_{=I_2} = I_1 + I_2\,.$$

Несобственный интеграл $I_1 = \int\limits_0^{A} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ сходится при $x > 0$. Несобственный интеграл $I_2 = \int\limits_A^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ сходится при любом $-\infty < x < +\infty$.

Свойства функции $\Gamma(x)$:

1. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ – формула понижения аргумента. Числовые значения функции $\Gamma(x)$ от дискретного набора аргументов из отрезка $0 < x < 1$ собраны в «таблицу»;

2. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$;

3. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2}\, e^{-t}\, dt = \left\{\sqrt{t} = y\,,\ dt = 2y\, dy\right\} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$;

4. $\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \geqslant 1)$;

5. $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$;

6. $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ при $0 < x < 1$. Эта формула используется для определения $\Gamma(x)$ от отрицательных значений аргумента

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)} \quad \text{при} \quad x < 0\ ,\ \ x \neq -n\,.$$

Бета-функция Эйлера.

Определение. Бета-функцией Эйлера принято называть несобственный интеграл

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$$

при $x>0$ и $y>0$.

Область определения бета-функции $x>0$, $y>0$ является областью сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt=\underbrace{\int\limits_0^A t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt}_{=I_1}+\underbrace{\int\limits_A^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt}_{=I_2}=I_1+I_2\,.$$

Несобственный интеграл $I_1=\int\limits_0^A t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ сходится при $x>0$ и любом $-\infty<y<+\infty$. Несобственный интеграл $I_2=\int\limits_A^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$ сходится при $y>0$ и любом $-\infty<x<+\infty$.

Свойства функции $B(x,y)$ **:**

1. Используются различные эквивалентные формы записи бета-функции.

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt=\Bigg\{\text{Замены переменной:}\quad \text{а)}\ \ t=\frac{1}{1+v}\ ,$$
$$dt=-\frac{dv}{(1+v)^2}\ ,\ t=0\leftrightarrow v=+\infty\ ,\ t=1\leftrightarrow v=0\ \ ;\quad \text{б)}\ \ t=\frac{u}{1+u}\ ,$$
$$dt=\frac{du}{(1+u)^2},t=0\leftrightarrow u=0,t=1\leftrightarrow u=+\infty\Bigg\}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}dv=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du\ ;$$

2. $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\quad\to\quad B(x,y)=B(y,x)\ ,$

$$B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}\,B(x,y)\ ,\qquad B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\,B(x,y)\ ,$$
$$B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\quad\text{при}\quad 0<x<1\,.$$

Задача 34.1 (№3843 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 x^{3/2-1}\cdot(1-x)^{3/2-1}\,dx = B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) =$$

$$= B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1/2}{3/2+1/2}B\left(\frac{1}{2}+1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1/2}{1/2+1/2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi x)\big|_{x=1/2}} = \frac{\pi}{8}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

Задача 34.2 (№3847 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \left\{\text{Замена переменной:}\quad t=x^4\,,\ dx=\frac{1}{4}\,t^{-3/4}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-1/4}}{1+t}\,dt = \left\{B(x,y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt \to \begin{cases} x-1=-1/4; \\ x+y=1 \end{cases} \to\right.$$

$$\left.\to\ x=\frac{3}{4}\,,\ y=\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}\cdot B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi x)\big|_{x=1/4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Задача 34.3 (№3850 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx \quad (n - \text{ целое положительное}) .$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx = \left\{\text{Замена переменной:} \quad t = x^2\ ,\ dx = \frac{1}{2}\, t^{-1/2}\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1/2}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} t^{(n+1/2)-1}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi}$$

Задача 34.4 (№3856 [1]). Определить область существования и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\, \cos^n x\, dx .$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\, \cos^n x\, dx = \big\{\text{Замена переменной:} \quad t = \sin^2 x\ ,$$

$$dt = 2 \sin x\, \cos x\, dx\big\} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{(m-1)/2} \cdot (1-t)^{(n-1)/2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{(m+1)/2-1} \cdot (1-t)^{(n+1)/2-1}\, dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\underbrace{\frac{m+1}{2}}_{>0}, \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{>0}\right)$$

Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\, \cos^n x\, dx$ существует при $m\,,\, n > -1\,.$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \, \cos^n x \, dx = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad \text{при } m\,, n > -1\,.$$

- -

Задача 34.5 (№3861 [1]). Определить область существования и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \Bigg\{\text{Замена переменной:} \quad t = \ln\frac{1}{x} \;\to\; x = e^{-t}\,,$$

$$dx = -e^{-t}\,dt\Big\} = \int\limits_0^{+\infty} t^p\, e^{-t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{(p+1)-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\underbrace{p+1}_{>0}\right)$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$ существует при $p > -1$.

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \Gamma\,(p+1) \quad \text{при } p > -1\,.$$

- -

Задача 34.6 (№3864(б) [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{1+x^3}\, dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{1+x^3}\, dx = \left\{\text{Замена переменной:} \quad t = x^3\,,\; dx = \frac{1}{3}\, t^{-2/3}\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-1/3}}{1+t}\, \ln t\, dt = \frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \ln t\, dt\Bigg|_{x=2/3} =$$

$$= \left\{ B\,(x,1-x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \quad \to \quad \frac{dB\,(x,1-x)}{dx} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\ln t\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\;\frac{dB\,(x,1-x)}{dx}\bigg|_{x=2/3} = \left\{ B\,(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin\,(\pi x)} \;\text{ при }\; 0<x<1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\;\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\sin\,(\pi x)}\right)\bigg|_{x=2/3} = -\,\frac{\pi^2\cos\,(\pi x)}{9\,\sin^2\,(\pi x)}\bigg|_{x=2/3} = \frac{2\,\pi^2}{27}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{1+x^3}\,dx = \frac{2\,\pi^2}{27}$$

- -

Задача 34.7 (№3868 [1]). Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(x)\;dx\,.$$

Р е ш е н и е:

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(1-x)\;dx = \{\text{Замена переменной:}\quad 1-x=t\;,\;dx=-dt\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(t)\;dt\;=\;I\,.$$

Искомый интеграл равен

$$I = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(x)\;dx + \int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(1-x)\;dx\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\Gamma\,(x)\,\Gamma\,(1-x)\,dx =$$

$$= \left\{ \Gamma\,(x)\,\Gamma\,(1-x) = \frac{\pi}{\sin\,(\pi x)} \;\text{ при }\; 0<x<1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\,(\pi x)}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\ln\pi - \ln\sin\,(\pi x))\;dx = \frac{1}{2}\,\ln\pi\,-$$

$$-\ \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^1 \ln\sin(\pi x)\ dx}_{=I_1} = \left\{ I_1 = \int\limits_0^1 \ln\sin(\pi x)\ dx = \int\limits_0^{1/2} \ln\sin(\pi x)\ dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{1/2}^1 \ln\sin(\pi y)\ dy = \{\text{Замена переменной:}\quad t = y - 1/2\ ,\ dy = dt\} =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} \ln\sin(\pi x)\ dx\ + \int\limits_0^{1/2} \ln\sin(\pi\,(t+1/2))\ dt = \int\limits_0^{1/2} \ln\sin(\pi x)\ dx +$$

$$+ \int\limits_0^{1/2} \ln\cos(\pi t)\ dt = \int\limits_0^{1/2} \ln\frac{\sin(2\pi x)}{2}\,dx = \int\limits_0^{1/2} \ln\sin(2\pi x)\ dx - \frac{1}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= \{\text{Замена переменной:}\quad 2x = t\ ,\ 2dx = dt\} = \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^1 \ln\sin(\pi t)\ dt}_{=I_1} -$$

$$\left. -\ \frac{1}{2}\cdot\ln 2 = \frac{1}{2}\cdot I_1 - \frac{1}{2}\cdot\ln 2\ \ \to\ \ I_1 = \frac{1}{2}\cdot I_1 - \frac{1}{2}\cdot\ln 2\ \to\ I_1 = -\ln 2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi\ -\ \frac{1}{2}(-\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2\pi = \ln\sqrt{2\pi}\,.$$

О т в е т:

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\ dx = \ln\sqrt{2\pi}$$

Задача 34.8 (№3848 [1]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,\cos^4 x\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,\cos^4 x\,dx = \{\text{см. №3856 [1] }\} = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{m+1}{2}\,,\frac{n+1}{2}\right)\Big|_{m=6\,,\,n=4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{7}{2}\,,\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{5}{2}+1\,,\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5/2}{5/2+5/2}\cdot B\left(\frac{3}{2}+1\,,\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3/2}{3/2+5/2} \cdot B\left(\frac{1}{2}+1\,,\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{32} \cdot \frac{1/2}{1/2+5/2} \cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{64} \cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{64} \cdot \frac{3/2}{1/2+3/2} \cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{3}{256} \cdot \frac{1/2}{1/2+1/2} \cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{512} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \frac{3\pi}{512}$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\, \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{512}$$

Задача 34.9 (№3851 [1]). Определить область существования и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx \;\; (n>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx = \left\{\text{Замена переменной:} \quad t = x^n\,,\; dx = \frac{1}{n}\, t^{(1-n)/n}\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m/n-1}}{1+t}\, dt = \frac{1}{n} \cdot B\left(\underbrace{\frac{m}{n}}_{>0}, \underbrace{1-\frac{m}{n}}_{>0}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi m/n)}$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx$ существует при $0 < m < n$.

О т в е т:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi m/n)} \quad \text{при} \quad 0 < m < n\,.$$

Задача 34.10 (№3855 [1]). Определить область существования и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \;\; (m>0\,,\; n>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \left\{\text{Замена переменной:}\quad t = x^m\ ,\ dx = \frac{1}{m}\,t^{(1-m)/m}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_0^1 t^{1/m-1}\cdot(1-t)^{-1/n}\,dt = \frac{1}{m}\int\limits_0^1 t^{1/m-1}\cdot(1-t)^{(1-1/n)-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{m}\cdot B\left(\underbrace{\frac{1}{m}}_{>0}\,,\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{>0}\right)$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$ существует при $m>0\ ,\ n>1\,.$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \frac{1}{m}\cdot B\left(\frac{1}{m}\,,1-\frac{1}{n}\right)\quad \text{при}\quad m>0\ ,\ n>1\,.$$

- -

Задача 34.11 (№3857 [1]). Определить область существования и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,dx\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\cdot\cos^{-n} x\,dx = \{\text{ см. №3856 [1] }\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{m+1}{2}\,,\frac{k+1}{2}\right)\Bigg|_{m=n\,,\,k=-n} = \frac{1}{2}\cdot B\left(\underbrace{\frac{n+1}{2}}_{>0}\,,\underbrace{\frac{-n+1}{2}}_{>0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\Bigg|_{x=(n+1)/2} = \frac{\pi}{2\cos(\pi n/2)}$$

Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,dx$ существует при $-1<n<1\,.$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\pi}{2\cos(\pi n/2)} \quad \text{при} \quad -1 < n < 1\,.$$

- -

Задача 34.12 (№3875 [1]). Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = 1\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \left\{\text{Замена переменной:} \quad t = x^n\,,\ dx = \frac{1}{n}\, t^{1/n-1}\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} t^{1/n-1}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right) - \text{ непрерывная функция.}$$

Тогда,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \lim_{n\to\infty} \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right) = \Gamma(1) = 1\,.$$

- -

2.11 Тригонометрический ряд Фурье

2.11.1 Занятие 35

Пусть задана функция $f(x)$ на симметричном отрезке $x \in [-l\,,\,l]$.

Определение. Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right) ,$$

коэффициенты которого $a_0\,,\ a_k\,,\ b_k$ определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\, dx\,,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l}\, dx\,,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l}\, dx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке x этого отрезка и для суммы ряда

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$$

выполняются равенства

$$S(x) = \frac{1}{2} \Big(f(x+0) + f(x-0) \Big) , \quad x \in (-l\,,\,l) ,$$

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \Big(f(-l+0) + f(l-0) \Big) .$$

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$, если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая конечное число точек разрыва первого рода.

Определение. Кусочно-непрерывную на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$ функцию $f(x)$ называют кусочно-гладкой на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$, если $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме конечного числа точек, в которых существуют конечные правые и левые предельные значения производной.

Если функция $f(x) = -f(-x)$, то

$$a_0 = a_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x)\, \sin \frac{\pi k x}{l}\, dx\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Если функция $f(x) = f(-x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x)\, dx\,,$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x)\, \cos \frac{\pi k x}{l}\, dx\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

$$b_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

- -

Задача 35.1 (№2938 [1]). Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$. Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ удовлетворяет условию $f(x) = -f(-x)$. Поэтому, $a_0 = a_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots$ и

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x)\, \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = -\frac{2}{\pi k} \left(\cos(kx)\big|_{x=0}^{x=\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad k = 2n\,; \\ \dfrac{4}{\pi k}\,, & \text{при} \quad k = 2n-1\,, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

Итак, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ при $-\pi < x < \pi$ имеет вид

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \operatorname{sgn} x\,.$$

Так как

$$\sin(2n-1)x\big|_{x=\pi/2} = \sin(\pi n - \pi/2)x = -\cos(\pi n) = (-1)^{n-1}\,,$$

то

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

и сумма числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Заметим, что построенный функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ сходится при любом $x \in (-\infty, +\infty)$.

О т в е т:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad \text{при} \quad -\pi < x < \pi$$

- -

Задача 35.2 (№2949 [1]). Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в интервале $(a\,,\, a+2l)$.

Р е ш е н и е:

Преобразуем заданную функцию $f(x) = x$ при $x \in (a\,,\, a+2l)$:

$$f(x) = x = \{\text{Замена переменной:}\quad t = x - (a+l)\} = \\ = t + (a+l) = f_1(t)\ ,\quad t \in (-l\,,\, l)\ .$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f_1(t)$ имеет вид

$$S_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{\pi k t}{l} + b_k \sin\frac{\pi k t}{l} \right)\ ,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f_1(t)\ dt = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} (t + (a+l))\ dt = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} (a+l)\ dt = 2(a+l)\ ,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} (t + (a+l))\,\cos\frac{\pi k t}{l}\,dt = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} (a+l)\,\cos\frac{\pi k t}{l}\,dt =$$

$$= \frac{2\,(a+l)}{\pi k}\,\sin\frac{\pi k t}{l}\Big|_{t=0}^{t=l} = 0\ ,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} (t + (a+l))\,\sin\frac{\pi k t}{l}\,dt = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} t\,\sin\frac{\pi k t}{l}\,dt =$$

$$= \frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi k}\,t\cos\frac{\pi k t}{l}\Big|_{t=0}^{t=l} + \frac{l}{\pi k}\underbrace{\int\limits_{0}^{l}\cos\frac{\pi k t}{l}\,dt}_{=0}\right) = \frac{2l}{\pi k}\,(-1)^{k+1}\ .$$

Итак,

$$S_1(t) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin\frac{\pi k t}{l} =$$

$$= \{\text{Обратная замена переменной:}\quad t = x - (a+l)\} =$$

$$= S(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin\frac{\pi k\,(x-(a+l))}{l} = a + l +$$

$$+ \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\sin\frac{\pi k x}{l}\cdot\cos\frac{\pi k\,(a+l)}{l} - \cos\frac{\pi k x}{l}\cdot\sin\frac{\pi k\,(a+l)}{l}\right) =$$

$$= a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\sin\frac{\pi k x}{l}\cdot\cos\frac{\pi k a}{l}\cdot(-1)^k -\right.$$

$$\left. - \cos\frac{\pi k x}{l}\cdot\sin\frac{\pi k a}{l}\cdot(-1)^k\right) = \underbrace{a+l}_{=2a_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{2l}{\pi k}\sin\frac{\pi k a}{l}}_{=a_k}\cdot\cos\frac{\pi k x}{l} -\right.$$

$$\left.\underbrace{-\frac{2l}{\pi k}\cos\frac{\pi k a}{l}}_{=b_k}\cdot\sin\frac{\pi k x}{l}\right) = f(x) = x \ \text{ при } \ x \in (a\,,\,a+2l)\ .$$

О т в е т:

$$f(x) = x = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\left(\sin\frac{\pi k a}{l}\cdot\cos\frac{\pi k x}{l} - \cos\frac{\pi k a}{l}\cdot\sin\frac{\pi k x}{l}\right)$$

при $x \in (a\,,\, a+2l)$

- -

Задача 35.3 (№2957 [1]). Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f\,(x) = |\sin x|$.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим заданную функцию $f\,(x) = |\sin x|$ на отрезке $x \in [-\pi/2\,,\, \pi/2]$, длина которого равна периоду функции $f\,(x) = |\sin x|$. Так как периодическая функция $f\,(x) = |\sin x|$ непрерывна при любом $x \in (-\infty\,,\, +\infty)$, то сумма тригонометрического ряда Фурье будет равна значению самой функции в любой точке $x \in (-\infty\,,\, +\infty)$.

Функция $f\,(x) = |\sin x|$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\ ,$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}\ ,$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, \cos\,(2kx)\ dx = \frac{2}{\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin\,(1+2k)\,x\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\pi/2} \sin\,(1-2k)\,x\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2-1}\ ,$$

$$k = 1, 2, \ldots\ .$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f\,(x) = |\sin x|$ имеет вид

$$S\,(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\,(2kx)}{4k^2-1} = |\sin x| \quad \text{при} \quad x \in (-\infty\,,\, +\infty)\ .$$

О т в е т:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\,(2kx)}{4k^2-1} \quad \text{при} \quad x \in (-\infty\,,\, +\infty)$$

- -

Задача 35.4 (№2975 [1]). Как следует продолжить заданную в интервале $(0\,,\, \pi/2)$ интегрируемую функцию $f\,(x)$ в интервал $(-\pi\,,\, \pi)$, чтобы её разложение в ряд Фурье имело вид

$$f\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\,(2n-1)\,x \quad (-\pi < x < \pi)\,?$$

Р е ш е н и е:

Заданную в интервале $x \in (0\,,\,\pi/2)$ функцию обозначим через $f_0(x)$. Построим в интервале $x \in (-\pi\,,\,\pi)$ функцию $f(x)$, которая:

1. $f(x) = f_0(x)$ при $x \in (0\,,\,\pi/2)$;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)\,x$ в интервале $x \in (-\pi\,,\,\pi)$.

Так как в тригонометрическом ряде Фурье функции $f(x)$ все коэффициенты $b_k = 0$, то функция $f(x)$ является чётной функцией. Тогда $f(x) = f_0(-x)$ при $x \in (-\pi/2\,,\,0)$.

В тригонометрическом ряде Фурье функции $f(x)$ присутствуют только слагаемые, в которых комбинация $(2n-1)$, входящая в аргументы косинусов, принимает нечётные значения. То есть, коэффициенты ряда Фурье в слагаемых с чётным значением комбинации в аргументе косинусов равны нулю:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\cos(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\cos(2nx)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(y)\,\cos(2ny)\,dy\right) = \{\text{Замена переменной:}\quad \pi - y = t\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\cos(2nx)\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} f(\pi - t)\,\cos(2n(\pi - t))\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\cos(2nx)\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} f(\pi - x)\,\cos(2nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(f_0(x) + f(\pi - x)\Big)\,\cos(2nx)\,dx = 0\,,\quad n = 1, 2, \ldots \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f_0(x) + f(\pi - x) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\pi - x) = -f_0(x) \quad \text{при} \quad x \in (0\,,\,\pi/2)\ .$$

Тогда,

$$f(x) = -f_0(\pi - x) \quad \text{при} \quad x \in (\pi/2\,,\,\pi)$$

и в силу чётности функции $f(x)$

$$f(x) = -f_0(\pi + x) \quad \text{при} \quad x \in (-\pi\,,\,-\pi/2)\ .$$

О т в е т:

$$f(x)=\begin{cases}-f_0(\pi+x) & \text{при } x\in(-\pi\,,\,-\pi/2)\ ;\\ f_0(-x) & \text{при } x\in(-\pi/2\,,\,0)\ ;\\ f_0(x) & \text{при } x\in(0\,,\,\pi/2)\ ;\\ -f_0(\pi-x) & \text{при } x\in(\pi/2\,,\,\pi)\end{cases}$$

- -

Задача 35.5 (№2978 [1]). Функция $f(x)$ антипериодична с периодом π, то есть $f(x+\pi)\equiv -f(x)$. Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $(-\pi\,,\,\pi)$?

Р е ш е н и е:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}\underbrace{f(y)}_{=-f(y+\pi)}\cos(ny)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\cos(nx)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0}f(y+\pi)\cos(ny)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\cos(nx)\,dx\right)=\{\text{Замена переменной:}\quad y+\pi=t\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\,\cos(nt-n\pi)\,dt+\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\cos(nx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\left(1-(-1)^n\right)\cos(nx)\,dx=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } n=2k\,,\quad k=0,1,\ldots\ ;\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\,\cos(2k+1)\,x\,dx & \text{при } n=2k+1\,,\quad k=0,1,\ldots\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad a_{2k}=0\quad,\quad k=0,1,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}\underbrace{f(y)}_{=-f(y+\pi)}\sin(ny)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\sin(nx)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0}f(y+\pi)\sin(ny)\,dy+\right.$$

$$+\int_0^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx\Bigg) = \{\text{Замена переменной:}\quad y+\pi=t\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} f(t)\,\sin(nt-n\pi)\,dt + \int_0^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(1-(-1)^n\right)\sin(nx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при}\quad n=2k\,,\quad k=1,2,\ldots\ ; \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\sin(2k-1)\,x\,dx & \text{при}\quad n=2k-1\,,\quad k=1,2,\ldots \end{cases} \to$$

$$\to \quad b_{2k}=0\ ,\quad k=1,2,\ldots$$

О т в е т:

$$a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0\ ,\quad k=1,2,\ldots$$

Задача 35.6 (№2937 [1]). Каков будет ряд Фурье для тригонометрического многочлена

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\Big(\alpha_i\,\cos(ix) + \beta_i\,\sin(ix)\Big)\ ?$$

Р е ш е н и е:

Тригонометрический ряд Фурье для тригонометрического многочлена $P_n(x)$ имеет вид

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx\right)\ ,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ix)\,dx + \beta_i\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ix)\,dx\right) =$$

$$= \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ix)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при}\quad i\neq 0\,; \\ 2\pi & \text{при}\quad i=0 \end{cases}\ ,\right.$$

$$\left.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ix)\,dx = 0\ \ \text{при}\ \ i=0,1,\ldots,n\right\} = 2\,\alpha_0\ ,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ix\,\cos kx\,dx + \beta_i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ix\,\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \left\{\cos ix\,\cos kx = \begin{cases} \dfrac{\cos(i-k)x + \cos(i+k)x}{2} & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \dfrac{1+\cos(2kx)}{2} & \text{при}\ \ i = k \end{cases} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ix\,\cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \pi & \text{при}\ \ i = k \end{cases};$$

$$\sin ix\,\cos kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(i-k)x + \sin(i+k)x}{2} & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \dfrac{\sin(2kx)}{2} & \text{при}\ \ i = k \end{cases} \rightarrow$$

$$\left.\rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ix\,\cos kx\,dx = 0 \ \ \text{при}\ \ i = 0, 1, \ldots, n\right\} = \begin{cases} \alpha_k & \text{при}\ \ k \leqslant n; \\ 0 & \text{при}\ \ k > n \end{cases},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ix\,\sin kx\,dx + \beta_i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ix\,\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \left\{\sin ix\,\sin kx = \begin{cases} \dfrac{\cos(i-k)x - \cos(i+k)x}{2} & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \dfrac{1-\cos(2kx)}{2} & \text{при}\ \ i = k \end{cases} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ix\,\sin kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \pi & \text{при}\ \ i = k \end{cases};$$

$$\cos ix\,\sin kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(i+k)x - \sin(i-k)x}{2} & \text{при}\ \ i \neq k\,; \\ \dfrac{\sin(2kx)}{2} & \text{при}\ \ i = k \end{cases} \rightarrow$$

$$\left.\rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ix\,\sin kx\,dx = 0 \ \ \text{при}\ \ i = 0, 1, \ldots, n\right\} = \begin{cases} \beta_k & \text{при}\ \ k \leqslant n; \\ 0 & \text{при}\ \ k > n \end{cases}.$$

О т в е т:

Тригонометрический ряд Фурье для $P_n(x)$ совпадает с самим многочленом $P_n(x)$.

- -

Задача 35.7 (№2958 [1]). Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = |\cos x|$.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим заданную функцию $f(x) = |\cos x|$ на отрезке $x \in [-\pi/2\,,\ \pi/2]$, длина которого равна периоду функции $f(x) = |\cos x|$. Так как периодическая функция $f(x) = |\cos x|$ непрерывна при любом $x \in (-\infty\,,\ +\infty)$, то сумма тригонометрического ряда Фурье будет равна значению самой функции в любой точке $x \in (-\infty\,,\ +\infty)$.

Функция $f(x) = |\cos x|$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots \ ,$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{4}{\pi} \ ,$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, \cos(2kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos(1-2k)\, x\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\pi/2} \cos(1+2k)\, x\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k}{1-2k} + \frac{(-1)^k}{1+2k} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} \ ,$$

$$k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = |\cos x|$ имеет вид

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} \cos(2kx) = |\cos x| \quad \text{при} \quad x \in (-\infty\,,\ +\infty) \ .$$

О т в е т:

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} \cos(2kx) \quad \text{при} \quad x \in (-\infty\,,\ +\infty)$$

- -

Задача 35.8 (№2961 [1]). Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье : а) в интервале $(-\pi\,,\ \pi)$ по косинусам кратных дуг;

б) в интервале $(0\,,\,\pi)$ по синусам кратных дуг;

в) в интервале $(0\,,\,2\pi)$.

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

а) Функция $f(x)=x^2$ в интервале $x\in(-\pi\,,\,\pi)$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b_k=0\ ,\quad k=1,2,\dots\ ,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}\ ,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\,\cos(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x^2}{k}\,\sin(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{=0}-\frac{2}{k}\int\limits_0^{\pi}x\,\sin(kx)\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi k}\left(-\frac{x}{k}\,\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{k}\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\cos(kx)\,dx}_{=0}\right)=\frac{4\,(-1)^k}{k^2}\ .$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)=x^2$ имеет вид

$$S_{\text{a}}(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\,\cos(kx)=x^2\quad\text{на сегменте}\quad x\in[-\pi\,,\,\pi]\ .$$

б) Функция $f(x)=x^2$ задана в интервале $(0\,,\,\pi)$. Рассмотрим функцию $F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{в интервале}\ \ (0\,,\,\pi)\ ;\\ -x^2 & \text{в интервале}\ \ (-\pi\,,\,0)\end{cases}$. Построим тригонометрический ряд Фурье функции $F(x)$ в интервале $x\in(-\pi\,,\,\pi)$. Функция $F(x)$ в интервале $x\in(-\pi\,,\,\pi)$ является нечётной функцией. Поэтому,

$$a_k=0\ ,\quad k=0,1,2,\dots\ ,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\sin(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x^2}{k}\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{2}{k}\int\limits_0^{\pi}x\,\cos(kx)\,dx\right)=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2\,(-1)^{k-1}}{k} + \frac{2}{k}\left(\underbrace{\frac{x}{k}\,\sin(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\sin(kx)\;dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2\,(-1)^{k-1}}{k} + \frac{2}{k}\left(\frac{1}{k^2}\,\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2\,(-1)^{k-1}}{k} + \frac{2}{k^3}\left((-1)^k - 1\right)\right)\;.$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ в интервале $(0\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_6(x) = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\sin(kx) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^3}\,\sin(kx) =$$

$$= 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\sin(kx) - \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\,x}{(2m+1)^3} = x^2\,.$$

в) Функция $f(x) = x^2$ задана в интервале $(0\,,\,2\pi)$. Преобразуем функцию $f(x) = x^2$:

$$f(x) = x^2 = \{\text{Замена переменной:}\quad t = x - \pi\} =$$

$$= (t+\pi)^2 = f_1(t)\;\;,\quad t \in (-\pi\,,\,\pi)\;.$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f_1(t)$ имеет вид

$$S_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,\cos(kt) + b_k\,\sin(kt)\right)\,,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\;dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2\;dt = \frac{1}{3\pi}\,(t+\pi)^3\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{8\pi^2}{3}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2\,\cos(kt)\;dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)\;dt + 2\pi\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\;dt}_{=0} +\right.$$

$$+\pi^2 \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\ dt}_{=0}\Bigg) = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{t^2}{k}\sin(kt)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}}_{=0} - \frac{2}{k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\,\sin(kt)\ dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left(\frac{t}{k}\cos(kt)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{k}\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\ dt}_{=0}\right) = \frac{4}{k^2}\,(-1)^k\ ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2\,\sin(kt)\ dt = \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(kt)\ dt}_{=0} + 2\pi\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\ dt +$$

$$+\pi^2\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\ dt}_{=0}\Bigg) = 2\left(-\frac{t}{k}\cos(kt)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{k}\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\ dt}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{k}\,(-1)^{k-1}\ .$$

Итак,

$$S_1(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}\,(-1)^k\cos(kt) + \frac{4\pi}{k}\,(-1)^{k-1}\,\sin(kt)\right) =$$

$$= \{\text{Обратная замена переменной:}\quad t = x-\pi\} =$$

$$= S_{\text{в}}(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = x^2 \ \text{ при } \ x\in(0\,,\,2\pi)\ .$$

Так как

$$S_{\text{а}}(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \pi^2\,,$$

то числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Так как

$$S_{\text{а}}(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0\,,$$

то числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Так как сумма двух сходящихся числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k-1}}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} ,$$

то числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8} .$$

О т в е т:

а) Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ в интервале $(-\pi\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_{\text{а}}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) .$$

б) Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ по синусам в интервале $(0\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_{\text{б}}(x) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx) - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\,x}{(2k+1)^3} .$$

в) Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ в интервале $(0\,,\,2\pi)$ имеет вид

$$S_{\text{в}}(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} .$$

Суммы числовых рядов равны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \;\;,\;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \;\;,\;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

- -

Задача 35.9 (№2962 [1]). Исходя из разложения

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \quad (-\pi < x < \pi) ,$$

почленным интегрированием получить разложение в ряд Фурье на интервале $(-\pi\,,\,\pi)$ функций x^2, x^3 и x^4.

Р е ш е н и е:

$$1)\quad f_1(x)=x^2=2\int\limits_0^x t\,dt=2\int\limits_0^x\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)\right)dt=$$

$$=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int\limits_0^x\sin(kt)\,dt=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\Big(-\cos(kt)\big|_{t=0}^{t=x}\Big)=$$

$$=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\Big(\cos(kx)-1\Big)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos(kx)+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}\quad(\text{см. №2961 [1]})\right\}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos(kx)$$

$$2)\quad f_2(x)=x^3=3\int\limits_0^x t^2\,dt=3\int\limits_0^x\left(\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos(kt)\right)dt=$$

$$=\pi^2 x+12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\int\limits_0^x\cos(kt)\,dt=\pi^2\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right)+$$

$$+\ 12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^3}\Big(\sin(kt)\big|_{t=0}^{t=x}\Big)=$$

$$=2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)+12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^3}\sin(kx)$$

$$3)\quad f_3(x)=x^4=4\int\limits_0^x t^3\,dt=4\int\limits_0^x\left(2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)+\right.$$

$$\left.+12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^3}\sin(kt)\right)dt=8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int\limits_0^x\sin(kt)\,dt+$$

$$+\ 48\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^3}\int\limits_0^x\sin(kt)\,dt=\left\{\int\limits_0^x\sin(kt)\,dt=\frac{1}{k}-\frac{\cos(kx)}{k}\right\}=$$

$$=8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\ +\ 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos(kx)\ +\ 48\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^4}+$$

$$+\ 48\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\cos(kx)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}\quad,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^4}=\right.$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}_{=\pi^4/90} - 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}}_{=\pi^4/96} = -\frac{7\pi^4}{48 \cdot 15} \Bigg\} =$$

$$= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} \cos(kx)$$

О т в е т:

1) Тригонометрический ряд Фурье функции $f_1(x) = x^2$ в интервале $(-\pi\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_1(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)\ .$$

2) Тригонометрический ряд Фурье функции $f_2(x) = x^3$ в интервале $(-\pi\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_2(x) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kx)\ .$$

3) Тригонометрический ряд Фурье функции $f_3(x) = x^4$ в интервале $(-\pi\,,\,\pi)$ имеет вид

$$S_3(x) = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} \cos(kx)\ .$$

- -

Задача 35.10 (№2976 [1]). Как следует продолжить заданную в интервале $(0\,,\,\pi/2)$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi\,,\,\pi)$, чтобы её разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)\,x \quad (-\pi < x < \pi)\ ?$$

Р е ш е н и е:

Заданную в интервале $x \in (0\,,\,\pi/2)$ функцию обозначим через $f_0(x)$. Построим в интервале $x \in (-\pi\,,\,\pi)$ функцию $f(x)$, которая:

1. $f(x) = f_0(x)$ при $x \in (0\,,\,\pi/2)$;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)\,x$ в интервале $x \in (-\pi\,,\,\pi)$.

Так как в тригонометрическом ряде Фурье функции $f(x)$ все коэффициенты $a_k = 0$, то функция $f(x)$ является нечётной функцией. Тогда $f(x) = -f_0(-x)$ при $x \in (-\pi/2\,,\,0)$.

В тригонометрическом ряде Фурье функции $f(x)$ присутствуют только слагаемые, в которых комбинация $(2n-1)$, входящая в аргументы синусов, принимает нечётные значения. То есть, коэффициенты ряда Фурье в слагаемых с чётным значением комбинации в аргументе синусов равны нулю:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\sin(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\sin(2nx)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(y)\,\sin(2ny)\,dy\right) = \{\text{Замена переменной:}\quad \pi - y = t\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\sin(2nx)\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} f(\pi - t)\,\sin(2n(\pi - t))\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_0(x)\,\sin(2nx)\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} f(\pi - x)\,\sin(2nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(f_0(x) - f(\pi - x)\Big)\,\sin(2nx)\,dx = 0\,,\quad n = 1, 2, \ldots \quad \to$$

$$\to \quad f_0(x) - f(\pi - x) = 0 \quad \to \quad f(\pi - x) = f_0(x) \quad \text{при}\ \ x \in (0\,,\,\pi/2)\ .$$

Тогда,

$$f(x) = f_0(\pi - x) \quad \text{при}\ \ x \in (\pi/2\,,\,\pi)$$

и в силу нечётности функции $f(x)$

$$f(x) = -f_0(\pi + x) \quad \text{при}\ \ x \in (-\pi\,,\,-\pi/2)\ .$$

О т в е т:

$$f(x) = \begin{cases} -f_0(\pi + x) & \text{при}\ \ x \in (-\pi\,,\,-\pi/2)\ ; \\ -f_0(-x) & \text{при}\ \ x \in (-\pi/2\,,\,0)\ ; \\ \ \ f_0(x) & \text{при}\ \ x \in (0\,,\,\pi/2)\ ; \\ \ \ f_0(\pi - x) & \text{при}\ \ x \in (\pi/2\,,\,\pi) \end{cases}$$

- -

2.12 Интегральная формула Фурье

2.12.1 Занятие 36

Теорема. Пусть функция $f(x)$ задана при $-\infty < x < +\infty$, кусочно-непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на любом конечном подмножестве, абсолютно интегрируема $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < M\right)$. Тогда при любом $-\infty < x < +\infty$ верна формула

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0)+f(x+0)\Big) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda\,,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\,,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\,.$$

Если функция $f(x) = f(-x)$, то

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0)+f(x+0)\Big) = \int\limits_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda\,,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\,, \quad b(\lambda) = 0\,.$$

Если функция $f(x) = -f(-x)$, то

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0)+f(x+0)\Big) = \int\limits_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda\,,$$

где

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\,, \quad a(\lambda) = 0\,.$$

Задача 36.1 (№3881 [1]). Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1\ , & \text{если} \quad |x|<1\ ;\\ 0\ , & \text{если} \quad |x|>1\end{cases}\ .$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f(x)$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b(\lambda)=0\ ,$$
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi\lambda}\,\sin\lambda\ .$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0)+f(x+0)\Big)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\,\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda\,.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0)+f(x+0)\Big)=\begin{cases}1\ , & \text{если} \quad |x|<1\ ;\\ 0\ , & \text{если} \quad |x|>1\ ;\\ 1/2\ , & \text{если} \quad x=\pm1\end{cases}\quad=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\,\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda$$

Задача 36.2 (№3893 [1]). Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=e^{-x^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f(x)$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b(\lambda)=0\ ,$$
$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\lambda x\,dx=$$
$$=\left\{\int\limits_0^{\infty} e^{-a\,x^2}\cos(bx)\ dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\dfrac{b^2}{4a}}\quad(\text{см. №3809 [1]})\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\dfrac{\lambda^2}{4}}\ .$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2/4}\cos\lambda x\,d\lambda\,.$$

О т в е т:

$$f(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2/4}\cos\lambda x\,d\lambda$$

- -

Задача 36.3 (№3895 [1]). Функцию

$$f(x)=e^{-x}\qquad(0<x<+\infty)$$

представить интегралом Фурье, продолжая её :

а) чётным образом ;

б) нечётным образом.

Р е ш е н и е:

а) Функция $f(x)=e^{-x}$ задана на полуоси $0<x<+\infty$. Рассмотрим функцию $F(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{на полуоси } 0<x<+\infty\,; \\ e^{x} & \text{на полуоси } -\infty<x<0\,; \\ 1 & \text{при } x=0 \end{cases}$. Функция $F(x)$ при $x\in(-\infty\,,+\infty)$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b(\lambda)=0\ ,$$

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}F(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x\,dx=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\,e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\sin\lambda x\,dx=\right.$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\cos\lambda x e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=\infty}-\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x dx=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x\,dx\to$$

$$\left.\to\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{1+\lambda^2}\right\}=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+\lambda^2}\,.$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty\,.$$

б) Рассмотрим функцию $F(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{на полуоси } 0 < x < +\infty\,; \\ -e^{x} & \text{на полуоси } -\infty < x < 0\,; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Функция $F(x)$ при $x \in (-\infty\,,\,+\infty)$ является нечётной функцией. Поэтому,

$$a(\lambda) = 0\ ,$$

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} F(x) \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x\, dx =$$

$$= \left\{ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x\, dx = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda x\, e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \cos \lambda x\, dx = \right.$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin \lambda x\, e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x\, dx = \frac{1}{\lambda} -$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x\, dx \ \rightarrow \ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x\, dx = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right\} = \frac{2}{\pi}\, \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\ .$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty\,.$$

О т в е т:

а) $e^{-x} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda \quad$ при $\quad 0 < x < +\infty\,;$

б) $e^{-x} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda \quad$ при $\quad 0 < x < +\infty\,.$

- -

Задача 36.4 (№3900 [1]). Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если :

$$\text{а)} \quad \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^2} ;$$

$$\text{б)} \quad \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy \, dy = e^{-x} \quad (x > 0) .$$

Р е ш е н и е:

а) Функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ определена при любом $-\infty < x < +\infty$ и удовлетворяет условию $f(x) = f(-x)$. Поэтому, интегральная формула Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda .$$

Следовательно, искомая функция $\varphi(y)$ равна

$$\varphi(y) = a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos yx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos yx}{1+x^2} \, dx =$$
$$= \{\text{см. №3825 [1]}\} = e^{-y} \quad , \quad y \geqslant 0 .$$

б) Функция $f(x) = e^{-x}$ задана на полуоси $0 < x < +\infty$. Рассмотрим функцию $F(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{на полуоси } 0 < x < +\infty ; \\ -e^{x} & \text{на полуоси } -\infty < x < 0 ; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$. Функция $F(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ является нечётной функцией. Поэтому, интегральная формула Фурье для функции $F(x)$ имеет вид

$$e^{-x} = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty .$$

Следовательно, искомая функция $\psi(y)$ равна

$$\psi(y) = b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) \sin yx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin yx \, dx =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin yx\, dx = -\frac{1}{y} \cos yx\, e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{y} \int\limits_0^\infty e^{-x} \cos yx\, dx = \right.$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \sin yx\, e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{y^2} \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin yx\, dx = \frac{1}{y} -$$

$$\left. -\frac{1}{y^2} \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin yx\, dx \;\to\; \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin yx\, dx = \frac{y}{1+y^2} \right\} = \frac{2}{\pi} \frac{y}{1+y^2}\ ,\ y \geqslant 0.$$

О т в е т:

$$\text{а)}\ \ \varphi(x) = e^{-x} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0\,;$$

$$\text{б)}\ \ \psi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{1+x^2} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0\,.$$

Задача 36.5 (№3882 [1]). Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x\ , & \text{если} \quad |x| < 1\,; \\ 0\ , & \text{если} \quad |x| > 1 \end{cases} .$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f(x)$ является нечётной функцией. Поэтому,

$$a(\lambda) = 0\ ,$$

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi\lambda}\ (1 - cos\lambda)\ .$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\Big(f(x-0) + f(x+0)\Big) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} \sin \lambda x\, d\lambda\,.$$

О т в е т:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \begin{cases} \operatorname{sgn} x\ , \text{если}\ \ |x| < 1\,; \\ 0\ ,\ \ \text{если}\ \ |x| > 1\,; \\ -1/2\ , \text{если}\ x = -1\,; \\ 1/2\ ,\ \text{если}\ \ x = 1 \end{cases} \quad = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} \sin \lambda x\, d\lambda$$

Задача 36.6 (№3885 [1]). Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\frac{1}{\alpha^2+x^2}\ \ (\alpha>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция $f(x)$ является чётной функцией. Поэтому,

$$b(\lambda)=0\ \ ,$$

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{\alpha^2+x^2}\,dx=$$

$$=\left\{\text{Замена переменной:}\quad t=\frac{x}{\alpha}\right\}=\frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(\alpha\lambda t)}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-|a|}\ \ (\text{см. №3825 [1]})\right\}=\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha\lambda}\,.$$

Интегральная формула Фурье для заданной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda\,.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$$

Глава 3

Функции комплексного переменного

3.1 Комплексные числа

3.1.1 Занятие 37

Рассмотрим множество, состоящее из пар вещественных чисел x и y. В каждой паре числа упорядочены, $x-$ первое число в паре, $y-$ второе число в паре (x,y). Введём на этом множестве операции сложения и умножения :

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2\,,y_1+y_2)\,;$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2\,,x_1y_2+x_2y_1)\,.$$

Определение. Множество, состоящее из пар (x,y) с заданными операциями сложения и умножения, будем называть множеством комплексных чисел.

Обозначения : $(0\,,0)=0$, $(x,0)=x$, $(0\,,1)=i-$ мнимая единица, $(0\,,1)\cdot(0\,,1)=i\cdot i=-1$, $(0\,,y)=(0\,,1)\cdot(y,0)=iy$, $(x,y)=(x,0)+(0\,,y)=x+iy=z-$ алгебраическая форма записи комплексного числа z .

Комплексному числу $z=x+iy$ поставим в соответствие комплексно сопряжённое число $\bar{z}=x-iy$. Произведение $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ – вещественное число.

Точка на плоскости с координатами x и y (Рис.37.1) является геометрическим образом комплексного числа $z=x+iy$.

Положение точки с координатами x и y можно задать параметрами r и φ, являющимися полярными координатами точки (Рис.37.1). Переменные x ,

y и r, φ связаны соотношениями :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\ ; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} .$$

Будем использовать следующие обозначения :

$|z|-$ модуль комплексного числа z ;

$\arg z-$ главное значение аргумента комплексного числа z ;

$\operatorname{Arg} z-$ полное значение аргумента комплексного числа z .

Модулем комплексного числа z называется вещественное число, равное

$$|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = r\ .$$

Главным значением аргумента комплексного числа z называется вещественное число, равное $\arg z = \varphi \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi)$.

Полное значение аргумента комплексного числа z равно

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \ldots .$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

$$z = x + iy = \left\{ \begin{cases} x = r\cos\varphi = |z|\cos(\arg z)\ ; \\ y = r\sin\varphi = |z|\sin(\arg z) \end{cases} \right\} = r\left(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\right) =$$
$$= |z|\left(\cos(\arg z) + i\ \sin(\arg z)\right)$$

Формула Эйлера.

$$\cos\varphi + i\ \sin\varphi =$$
$$= \left\{ \cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sin\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} \right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} = \Big\{ (i)^{2n} = \left(i^2\right)^n = (-1)^n \quad ,$$
$$(i)^{2n-1} = i\ (i)^{2n-2} = i\ \left(i^2\right)^{n-1} = i\ (-1)^{n-1} \Big\} = \sum_{n=0}^{\infty}(i)^{2n}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(i)^{2n-1}\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\varphi)^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \left\{ e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right\} = e^{i\varphi} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cos\varphi + i\,\sin\varphi = e^{i\varphi} \;-\; \text{формула Эйлера}$$

Показательная форма записи комплексного числа.

$$z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = |z| \left(\cos(\arg z) + i\,\sin(\arg z) \right) =$$

$$= \left\{ \cos\varphi + i\,\sin\varphi = e^{i\varphi} \right\} = r\,e^{i\varphi} = |z|\; e^{i\arg z}$$

Произведение комплексных чисел.

Рассмотрим произведение n комплексных чисел $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$. Модуль произведения равен произведению модулей сомножителей

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$$

и аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей

$$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n\,.$$

Если комплексные числа $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, то

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi) \right) = |z|^n \left(\cos(n\arg z) + i\,\sin(n\arg z) \right) =$$

$$= r^n\,e^{i\,n\varphi} = |z|^n\; e^{i\,n\arg z}\,.$$

Корень $n-$ ой степени из комплексного числа $z = r\,e^{i\varphi}$ имеет n различных значений

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right) + i\,\sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right) \right) =$$

$$= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \cdot \dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}} \quad , \quad \text{где} \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Стереографическая проекция комплексного числа.

В трехмерном пространстве с координатной системой (ξ, η, ζ) задана сфера с центром в точке $O\,(0, 0, 1/2)$, радиус которой равен $1/2$ (Рис.37.2). Точка $P\,(0, 0, 1)$ – полюс сферы. Координаты произвольной точки $M\,(\xi, \eta, \zeta)$, принадлежащей этой сфере, удовлетворяют уравнению

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0\,.$$

Совместим координатную плоскость $\zeta = 0$ с комплексной плоскостью z. Из полюса P проведём прямую линию, проходящую через точку M, до пересечения с плоскостью $\zeta = 0$. Точку пересечения будем считать геометрическим образом комплексного числа $z = x + iy$.

Точка $M(\xi, \eta, \zeta)$ называется стереографической проекцией комплексного числа z на сферу Римана. Координаты точки $M(\xi, \eta, \zeta)$ связаны с x и y формулами

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2} \ , \ \eta = \frac{y}{1 + |z|^2} \ , \ \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \, ,$$

которые устанавливают однозначное соответствие между точками сферы Римана с выколотым полюсом P и точками комплексной плоскости z.

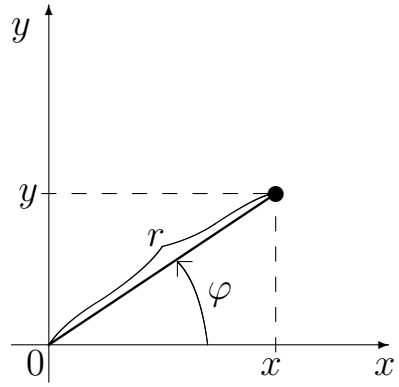

*Рис.*37.1

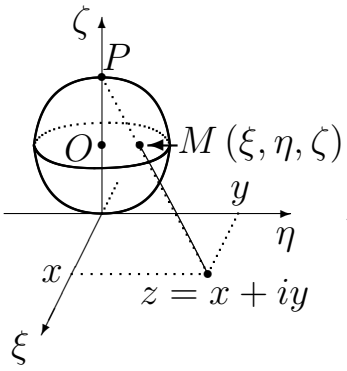

*Рис.*37.2

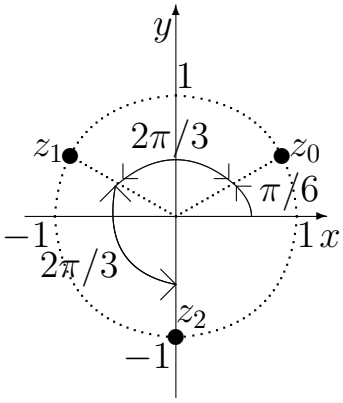

*Рис.*37.3

Введём в рассмотрение комплексное число $z = \infty$. Дополним комплексную плоскость z единственной бесконечно удалённой точкой, соответствующей числу $z = \infty$. Комплексную плоскость с единственной бесконечно удалённой точкой называют расширенной комплексной плоскостью. Сопоставим полюсу P сферы Римана единственную бесконечно удалённую точку комплексной плоскости. В результате получим взаимно однозначное соответствие между всеми точками сферы Римана и точками расширенной комплексной плоскости.

Задача 37.1 (№1.1(1) [2]). Выполнить действие

$$\frac{1}{i} \ .$$

Р е ш е н и е:

$$z = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot \overline{i}}{i \cdot \overline{i}} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

О т в е т:

$$\frac{1}{i} = -i$$

- -

Задача 37.2 (№1.2(3) [2]). Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$1 + i\,.$$

Р е ш е н и е:

$$z = 1 + i \;\;,\;\; |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\Big|_{x=1\,,\,y=1} = \sqrt{2} \;\;\rightarrow\;\; |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{x=1\,,\,y=1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \\ \sin(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{x=1\,,\,y=1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \;\;\rightarrow\;\; \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arg}(1 + i) = \arg(1 + i) + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \;\;,\;\; n = 0, \pm 1, \ldots$$

О т в е т:

$$|1 + i| = \sqrt{2} \;\;,\;\; \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

- -

Задача 37.3 (№1.4(2) [2]). Найти все значения корней и построить их:

$$\sqrt[3]{i}\,.$$

Р е ш е н и е:

$$z = i \;\;\rightarrow\;\; |z| = 1 \;\;,\;\; \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) \right)\Big|_{|z|=1\,,\arg z = \pi/2} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \right) + i\,\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \right) \;\;,\;\; \text{где} \;\; k = 0, 1, 2\,.$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \quad (\text{см. Рис.37.3})$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi/2 + 2\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi/2 + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi/2 + 4\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi/2 + 4\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

О т в е т:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\,,\ z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\,,\ z_2 = -i\,.$$

Задача 37.4 (№1.7(1) [2]). Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\ .$$

Доказать это же неравенство алгебраическим путём. Выяснить, когда имеет место знак равенства.

Р е ш е н и е:

1) Геометрическое доказательство.

$z_1 = x_1 + iy_1\ \ ,\ \ z_2 = x_2 + iy_2\ \ ,\ \ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$ (см. Рис.37.4)

$|z_1 + z_2|$ – длина одной стороны треугольника, которая не превышает

$|z_1| + |z_2|$ – суммы длин двух других сторон треугольника.

Следовательно, верно неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\ .$$

Если $\arg z_1 = \arg z_2$, то $\arg(z_1 + z_2) = \arg z_1 = \arg z_2$ и

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|\ .$$

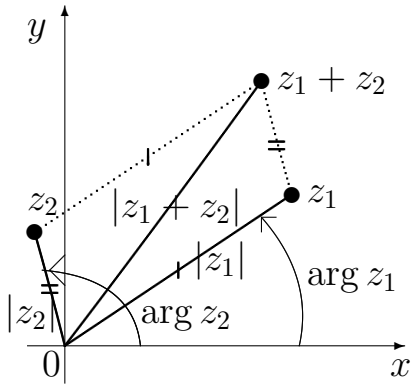

*Рис.*37.4

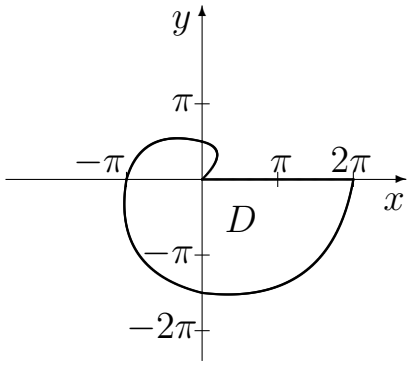

*Рис.*37.5

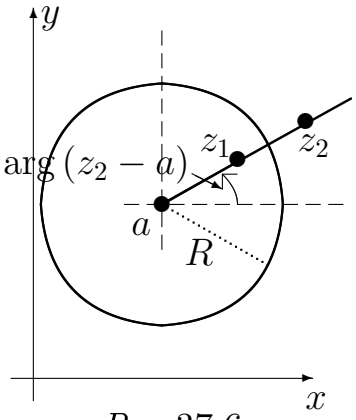

*Рис.*37.6

---

2) Алгебраическое доказательство.

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ ,\ |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\ ,\ |z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

$$|z_1 + z_2|\ \vee\ |z_1| + |z_2|$$

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\ \vee\ \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\ \vee\ x_1^2+y_1^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\,(x_2^2+y_2^2)}+x_2^2+y_2^2$$

$$x_1\,x_2+y_1\,y_2\ \vee\ \sqrt{(x_1^2+y_1^2)\,(x_2^2+y_2^2)}$$

$$2\,x_1\,x_2\,y_1\,y_2\ \vee\ x_1^2\,y_2^2+y_1^2\,x_2^2$$

$$0\ \vee\ x_1^2\,y_2^2-2\,x_1\,x_2\,y_1\,y_2+y_1^2\,x_2^2$$

$$0\ \leqslant\ (x_1\,y_2-y_1\,x_2)^2$$

Равенство достигается при выполнении условия $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}$.

- -

Задача 37.5 (№1.23 [2]). Выяснить геометрический смысл соотношений

$$|z-z_0|<R\ \ ,\ \ |z-z_0|>R\ \ ,\ \ |z-z_0|=R$$

($z-$ переменное комплексное число, z_0- фиксированное комплексное число).

Р е ш е н и е:

$z=x+iy\ \ ,\ \ z_0=x_0+iy_0\ \ ,\ \ z-z_0=(x-x_0)+i\,(y-y_0)\ \ \rightarrow$

$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R\rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2-$

$-$ окружность радиуса R с центром в точке $(x_0\ ,\ y_0)$.

$|z-z_0|<R-$ точки, лежащие внутри окружности радиуса R с центром в точке $(x_0\ ,\ y_0)$.

$|z-z_0|>R-$ точки, лежащие вне окружности радиуса R с центром в точке $(x_0\ ,\ y_0)$.

- -

Задача 37.6 (№1.34 [2]). Выяснить геометрический смысл соотношений :

1) $|z|<\arg z$, если $0\leqslant\arg z<2\pi$;

2) $|z|<\arg z$, если $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

Р е ш е н и е:

Граница области D (Рис.37.5) состоит из линии $|z|=\arg z$, при $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$ и отрезка координатной оси $0<x<2\pi$.

Неравенству $|z| < \arg z$, при условии $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, соответствуют все внутренние точки области D.

Неравенству $|z| < \arg z$, при условии $0 < \arg z \leqslant 2\pi$, соответствуют все внутренние точки области D и ещё точки на отрезке координатной оси $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

- -

Задача 37.7. Какие множества на комплексной плоскости определяет уравнение $A\,z + B\,\bar{z} = C$ (A , B , C , z – комплексные числа) .

Р е ш е н и е:

$$A = a_x + ia_y\ ,\ \ B = b_x + ib_y\ ,\ \ C = c_x + ic_y\ ,\ \ z = x + iy\ ,\ \ \bar{z} = x - iy$$

$$A\,z + B\,\bar{z} = C\ \ \rightarrow\ \ (a_x + ia_y)\,(x + iy) + (b_x + ib_y)\,(x - iy) = c_x + ic_y\ \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \ \begin{cases} (a_x + b_x)\,x + (b_y - a_y)\,y = c_x \\ (a_y + b_y)\,x + (a_x - b_x)\,y = c_y \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x + b_x & b_y - a_y \\ a_y + b_y & a_x - b_x \end{vmatrix} = \left(a_x^2 + a_y^2\right) - \left(b_x^2 + b_y^2\right) = |A|^2 - |B|^2\ ,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_x & b_y - a_y \\ c_y & a_x - b_x \end{vmatrix}\ ,\ \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_x + b_x & c_x \\ a_y + b_y & c_y \end{vmatrix}$$

Если $|A| \neq |B|$ $(\Delta \neq 0)$, то заданное уравнению $A\,z + B\,\bar{z} = C$ определяет единственную точку с координатами $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Если $|A| = |B|$ $(\Delta = 0)$, то заданное уравнению $A\,z + B\,\bar{z} = C$ определяет либо пустое множество, либо прямую линию.

- -

Задача 37.8. Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно окружности $|z - a| = R$, если они лежат на общем луче, исходящем из центра окружности, и произведение их расстояний от центра окружности равно R^2 .

Доказать формулу $z_2 = a + \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$.

Р е ш е н и е:

$\arg(z_1 - a) = \arg(z_2 - a)$ – точки z_1 и z_2 лежат на одном луче, проведённом из точки a (Рис.37.6).

$|z_1 - a| \cdot |z_2 - a| = R^2$ – произведение расстояний от точек z_1 и z_2 до точки a равно R^2 .

$$z_2 - a = |z_2 - a|\ e^{i\,\arg(z_2 - a)} =$$

$$= \left\{ |z_2 - a| = \frac{R^2}{|z_1 - a|}\ ,\ \ \arg(z_2 - a) = \arg(z_1 - a) \right\} =$$

$$= \frac{R^2}{|z_1 - a|}\, e^{i\,\arg(z_1-a)} = \frac{R^2}{|z_1 - a|\; e^{-i\,\arg(z_1-a)}} =$$

$$= \left\{ z_1 - a = |z_1 - a|\; e^{i\,\arg(z_1-a)} \;\; \to \;\; \overline{z_1 - a} = |z_1 - a|\; e^{-i\,\arg(z_1-a)} \right\} =$$

$$= \frac{R^2}{\overline{\overline{z_1 - a}}}$$

Следовательно, верна формула $z_2 = a + \dfrac{R^2}{\overline{\overline{z_1 - a}}}$.

Задача 37.9 (№1.1(2,3) [2]). Выполнить действия

$$2)\;\; \frac{1-i}{1+i} \;\; , \;\; 3)\;\; \frac{2}{1-i\,3}\,.$$

Р е ш е н и е:

$$2)\;\; \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{\overline{1+i}}{\overline{1+i}} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i\,2-1}{1+1} = -i$$

$$3)\;\; \frac{2}{1-i\,3} = \frac{2}{1-i\,3} \cdot \frac{\overline{1-i\,3}}{\overline{1-i\,3}} = \frac{2}{1-i\,3} \cdot \frac{1+i\,3}{1+i\,3} = \frac{2+i\,6}{1+9} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$$

О т в е т:

$$\frac{1-i}{1+i} = -i \;\; , \;\; \frac{2}{1-i\,3} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$$

Задача 37.10 (№1.2(1,4) [2]). Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$1)\;\; 3i \;\; ; \;\; 4)\;\; -1-i\,.$$

Р е ш е н и е:

$$1)\;\; z = 3i \;\; , \;\; |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0\,,\;y=3} = \sqrt{9} = 3 \;\; \to \;\; |3i| = 3$$

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{x=0\,,\;y=3} = 0\,; \\ \sin(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{x=0\,,\;y=3} = 1 \end{cases} \;\; \to \;\; \arg(3i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arg}(3i) = \arg(3i) + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \;\; , \;\; n = 0, \pm 1, \ldots$$

$$4)\; z = -1-i\,,\; |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=-1\,,\;y=-1} = \sqrt{2} \;\to |-1-i| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{x=-1\,,\,y=-1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\,; \\ \sin(\arg z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{x=-1\,,\,y=-1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \to \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arg}(-1-i) = \arg(-1-i) + 2\pi n = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \;\;,\;\; n = 0, \pm 1, \ldots$$

О т в е т:

1) $|3i| = 3$, $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $|-1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$

Задача 37.11 (№1.3 [2]). Решить уравнение

$$\bar{z} = z^{n-1} \qquad (n \neq 2 - \text{натуральное число})\,.$$

Р е ш е н и е:

Одним из решений заданного уравнения является число $z = 0$.

Умножим заданное уравнение на z $(z \neq 0)$

$$|z|^2 = z^n.$$

Пусть $z = |z|\; e^{i \arg z}$. Тогда,

$$|z|^2 = |z|^n\; e^{i\, n \arg z} \;\to\; 1 = |z|^{n-2}\Big(\cos(n \arg z) + i\, \sin(n \arg z)\Big) \;\to$$

$$\to \quad \begin{cases} 1 = |z|^{n-2}\, \cos(n \arg z)\;; \\ 0 = |z|^{n-2}\, \sin(n \arg z) \;\to\; \arg z = \dfrac{\pi k}{n} \;\;,\;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \to$$

$$\to \;\; 1 = |z|^{n-2}\cos(\pi k) \;\to\; k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \;\;,\;\; |z| = 1\,.$$

То есть, корнями уравнения являются также числа

$$z_k = e^{\,i\,\dfrac{\pi k}{n}} = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \;\;,\;\; k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\,.$$

О т в е т:

Корни заданного уравнения $z = 0$ и

$$z_k = e^{\,i\,\dfrac{\pi k}{n}} = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \;\;,\;\; k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\,.$$

Задача 37.12 (№1.4(1,6) [2]). Найти все значения корней и построить их:

$$1)\ \sqrt[3]{1}\ \ ;\ \ 6)\ \sqrt{1-i}\,.$$

Р е ш е н и е:

1) $z=1\ \ \to\ \ |1|=1\ \ ,\ \ \arg 1=0$

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{|1|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\arg 1+2\pi k}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\arg 1+2\pi k}{3}\right)\right)\Bigg|_{|z|=1\,,\,\arg z=0}$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\ \ ,\ \ \text{где}\ \ k=0,1,2\,.$$

$z_0=1\quad$ (см. Рис.37.7)

$$z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\sin\frac{3\pi}{2}=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6) $z=1-i\ \ \to\ \ |1-i|=\sqrt{2}\ \ ,\ \ \arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$

$$\sqrt{1-i}=\sqrt{|1-i|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\arg(1-i)+2\pi k}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+i\,\sin\left(\frac{\arg(1-i)+2\pi k}{2}\right)\right)\Bigg|_{|1-i|=\sqrt{2}\,,\,\arg(1-i)=-\pi/4}=$$
$$=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\pi/4+2\pi k}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{-\pi/4+2\pi k}{2}\right)\right)\ \ ,\ \ \text{где}\ \ k=0,1\,.$$

$$z_0=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\left\{\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\right.$$
$$\left.=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\quad,\quad\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{3/4}}\right\}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\,\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\quad\text{(см. Рис.37.9)}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\,\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right) = \left\{\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\ ,\right.$$
$$\left.\cos\frac{7\pi}{8}=-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{3/4}}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

О т в е т:

$$1)\ \ z_0=1\ ,\ z_1=-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ z_2=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$
$$6)\ \ z_{0,1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

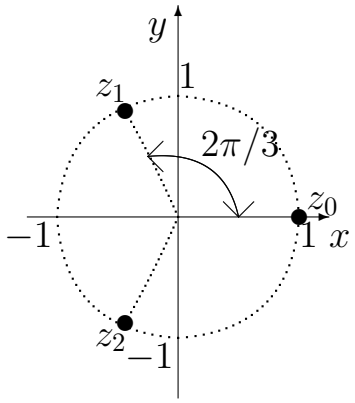

*Рис.*37.7

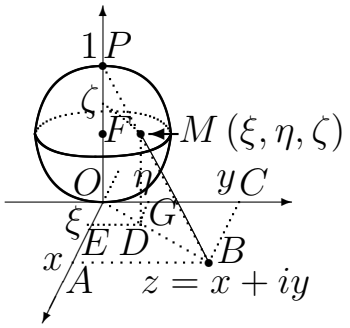

*Рис.*37.8

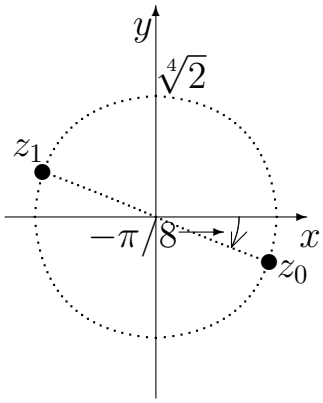

*Рис.*37.9

Задача 37.13 (№1.24 [2]). Выяснить геометрический смысл соотношения

$$|z-2|+|z+2|=5\ .$$

Р е ш е н и е:

$$z=x+iy\ \ ,\ \ z\pm 2=(x\pm 2)+iy\ \ \to\ \ |z\pm 2|=\sqrt{(x\pm 2)^2+y^2}$$

$$|z-2|+|z+2|=5\ \ \to\ \ \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5\ \ \to$$
$$\to\ \ \sqrt{(x-2)^2+y^2}=5-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ \ \to$$
$$\to\ \ (x-2)^2+y^2=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2\ \ \to$$
$$\to\ -4x=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ +4x\to 10\sqrt{(x+2)^2+y^2}=25+8x\to$$
$$\to 100\left(x^2+4x+4+y^2\right)=625+400x+64x^2\ \to\ 36x^2+100y^2=225\ \to$$

$$\rightarrow \quad \frac{x^2}{(5/2)^2}+\frac{y^2}{(3/2)^2}=1 \;-\; \text{эллипс}$$

Задача 37.14 (№1.44 [2]). Вывести формулы стереографической проекции, выражающие координаты (ξ,η,ζ) точки M сферы с диаметром 1, касающейся $z-$плоскости в начале координат, через координаты (x,y) соответствующей точки $z=x+iy$. Выразить также x и y через ξ, η, ζ (оси ξ и η предполагаются совпадающими с осями x и y, соответственно).

Р е ш е н и е:

Координаты точки $M(\xi,\eta,\zeta)$, находящейся на сфере (Рис.37.8), удовлетворяют уравнению

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0\,.$$

Подобие ΔPMF и ΔPBO :

$$\frac{1-\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \rightarrow \quad 1-\zeta=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{|z|}\,.$$

Так как $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0$, то

$$1-\zeta=\frac{\sqrt{\zeta-\zeta^2}}{|z|} \quad \rightarrow \quad 1-\zeta=\frac{\zeta}{|z|^2} \quad \rightarrow \quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,.$$

Подобие ΔOED и ΔOAB :

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\frac{x}{|z|} \quad \rightarrow \quad \frac{\xi}{x}=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{|z|} \quad \rightarrow \quad \frac{\xi}{x}=1-\zeta \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{\xi}{1-\zeta} \quad \text{и} \quad \xi=x\,(1-\zeta)=\frac{x}{1+|z|^2}\,.$$

Подобие ΔODG и ΔOBC :

$$\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\frac{y}{|z|} \quad \rightarrow \quad \frac{\eta}{y}=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{|z|} \quad \rightarrow \quad \frac{\eta}{y}=1-\zeta \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y=\frac{\eta}{1-\zeta} \quad \text{и} \quad \eta=y\,(1-\zeta)=\frac{y}{1+|z|^2}\,.$$

О т в е т:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta} \quad , \quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}\,;$$

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2} \quad , \quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2} \quad , \quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,.$$

3.2 Непрерывность функции комплексного переменного

3.2.1 Занятие 38

Примеры элементарных функций комплексного переменного.

По определению :

$$\exp z = e^z = e^x\,(\cos y + i\,\sin y)\ ;$$

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}\,;$$

$$\sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}\,;$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\,;$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\,;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,;$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,;$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,;$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\,;$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k \quad \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ \ ,\ \ z = re^{i\varphi}\right)\ ,$$

$$\ln z = \ln r + i\,\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi) - \text{главное значение функции } \operatorname{Ln} z\,.$$

- -

Задача 38.1 (№1.69 [2]). Для каждой из функций e^z, $\cos z$ найти множество точек, где она принимает :

1) действительные значения ;

2) чисто мнимые значения .

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = e^z$:

$$e^z = e^x\,(\cos y + i\,\sin y) = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = u\,(x\,,\,y) + i\,v\,(x\,,\,y)\quad,$$
$$\text{где}\quad \mathrm{Re}\;e^z = u\,(x\,,\,y) = e^x\cos y\quad\text{и}\quad \mathrm{Im}\;e^z = v\,(x\,,\,y) = e^x\sin y\,.$$

Функция e^z принимает действительные значения, если

$$\mathrm{Im}\;e^z = 0\;\;\to\;\;e^x\sin y = 0\;\;\to\;\;\sin y = 0\;\;\to$$
$$\to\;\;\mathrm{Im}\;z = y = \pi k\;\;,\;\;k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,.$$

Функция e^z принимает чисто мнимые значения, если

$$\mathrm{Re}\;e^z = 0\;\;\to\;\;e^x\cos y = 0\;\;\to\;\;\cos y = 0\;\;\to$$
$$\to\;\;\mathrm{Im}\;z = y = \frac{\pi}{2} + \pi k\;\;,\;\;k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,.$$

Функция $f\,(z) = \cos z$:

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+i\,y)} + e^{-i(x+i\,y)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y+i\,x} + e^{y-i\,x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x) + e^{y}\,(\cos x - i\,\sin x)\right) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cdot\cos x +$$
$$+\,i\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\cdot\sin x = \mathrm{ch}\,y\cdot\cos x - i\;\mathrm{sh}\,y\cdot\sin x = u\,(x\,,\,y) + i\,v\,(x\,,\,y)\quad,$$
$$\text{где}\;\;\mathrm{Re}\;\cos z = u\,(x, y) = \mathrm{ch}\,y\cdot\cos x\;\text{и}\;\;\mathrm{Im}\;\cos z = v\,(x, y) = -\,\mathrm{sh}\,y\cdot\sin x.$$

Функция $\cos z$ принимает действительные значения, если

$$\mathrm{Im}\;\cos z = 0\;\to\;\;\mathrm{sh}\,y\cdot\sin x = 0\;\;\to\;\;\mathrm{sh}\,y = 0\;\;\text{или}\;\;\sin x = 0\;\;\to$$
$$\to\;\;\mathrm{Im}\;z = y = 0\;,\;\text{или}\;\;\mathrm{Re}\;z = x = \pi k\;,\;k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,.$$

Функция $\cos z$ принимает чисто мнимые значения, если

$$\mathrm{Re}\;\cos z = 0\;\to\;\mathrm{ch}\,y\cdot\cos x = 0\;\;\to\;\;\cos x = 0\;\;\to$$
$$\to\;\;\mathrm{Re}\;z = x = \frac{\pi}{2} + \pi k\;,\;k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,.$$

- -

Задача 38.2 (№1.71(2) [2]). Вычислить

$$\mathrm{Ln}\,i\quad,\quad\ln i\,.$$

Р е ш е н и е:

По определению $\mathrm{Ln}\,z = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k$, где $z = re^{i\varphi}$.

Задано число

$$z = i = e^{i\,\pi/2}\;\;\to\;\;r = 1\;,\;\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Тогда,

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{2} + i\,2\pi k = i\,\frac{\pi}{2} + i\,2\pi k\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{и} \quad \ln i = i\,\frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\operatorname{Ln} i = i\,\frac{\pi}{2} + i\,2\pi k\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\ln i = i\,\frac{\pi}{2}$$

Задача 38.3 (№1.82 [2]). Найти все корни уравнения

$$\sin z + \cos z = 2\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\sin z + \cos z = 2 \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos z = \sqrt{2} > 0 \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \ \rightarrow\ z + \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arcsin}\sqrt{2}$$

Получим формулу, определяющую функцию $\operatorname{Arcsin} z$, решив относительно w уравнение $\sin w = z$ ($w = \operatorname{Arcsin} z$) .

$$\sin w = z \ \rightarrow\ \frac{e^{i\,w} - e^{-i\,w}}{2i} = z \ \rightarrow\ e^{i\,w} - \frac{1}{e^{i\,w}} = i2z \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \text{Замена переменной: } t = e^{i\,w} \ \rightarrow\ t - \frac{1}{t} = i2z \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ t^2 - i2zt - 1 = 0 \rightarrow\ (t - iz)^2 = 1 - z^2 \rightarrow\ t = iz + \underbrace{\sqrt{1 - z^2}}_{\substack{\text{два значения} \\ \text{квадратного корня}}} \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ e^{i\,w} = i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \ \rightarrow\ i\,w = \operatorname{Ln}\left(i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ w = -i\operatorname{Ln}\left(i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right)$$

Итак, по определению

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right)\ .$$

Тогда,

$$z + \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arcsin}\sqrt{2} = -i\operatorname{Ln}\left(i\left(\sqrt{2} \pm 1\right)\right) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ z_k = -\frac{\pi}{4} - i\left(\ln\left|i\left(\sqrt{2} \pm 1\right)\right| + i\,\frac{\pi}{2} + i\,2\pi k\right)\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right) \ , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad .$$

О т в е т:

$$z_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right) \ , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- -

Определение. Если существует единственный предел $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = w_0$, не зависящий от выбора последовательности $\{z_n\}$, то этот предел называется предельным значением (пределом) функции $f(z)$ в точке z_0.

Определение. Функция $f(z)$, заданная на множестве D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если предельное значение этой функции в точке z_0 существует, конечно и равно значению функции $f(z)$ в точке z_0, то есть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение. Функция $f(z)$, заданная на множестве D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $z \in D$ и удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$ верно неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

- -

Задача 38.4 (№1.126 [2]). Функции

$$1) \ \frac{\operatorname{Re} z}{z} \ , \ 2) \ \frac{z}{|z|} \ , \ 3) \ \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2} \ , \ 4) \ \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$$

определены для $z \neq 0$. Какие из них могут быть доопределены в точке $z = 0$ так, чтобы они стали непрерывными в этой точке?

Р е ш е н и е:

$$1) \ f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \{z = x + iy\} = \frac{x}{x + iy} = \frac{x}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \\ = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - i \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(z) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - i \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \{ \text{ Пусть } \ y = k\,x \,. \} = \\ = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x^2 + (k\,x)^2} - i \frac{x\,(k\,x)}{x^2 + (k\,x)^2} \right) = \frac{1}{1 + k^2} - i \frac{k}{1 + k^2}$$

При разных k получаем различные значения предела. Следовательно, в точке $z = 0$ функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ не имеет предельного значения и не может быть доопределена до непрерывности.

2) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}=\{z=x+iy\}=\dfrac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\{\text{ Пусть }\ y=k\,x\,.\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+(k\,x)^2}}+i\,\frac{k\,x}{\sqrt{x^2+(k\,x)^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}+i\,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

При разных k получаем различные значения предела. Следовательно, в точке $z=0$ функция $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$ не имеет предельного значения и не может быть доопределена до непрерывности.

3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}=\{z=x+iy\}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\{\text{ Пусть }\ y=k\,x\,.\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(k\,x)^2}{x^2+(k\,x)^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

При разных k получаем различные значения предела. Следовательно, в точке $z=0$ функция $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}$ не имеет предельного значения и не может быть доопределена до непрерывности.

4) $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|}=\{z=x+iy\}=\dfrac{(x+iy)\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\,\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Рассмотрим $|f(z)-0|=\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\,\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=$

$$=\sqrt{\frac{x^4}{x^2+y^2}+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=|z|=|z-0|<\delta(\varepsilon)<\varepsilon$$

при любом $\varepsilon>0\,.$

То есть, функция $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}$ непрерывна в точке $z = 0$, если эту функцию доопределить значением $f(0) = 0$.

- -

Задача 38.5 (№1.45 [2]). Каковы на сфере образы точек

$$1)\ 1\ ,\ \ 2)\ -1\ ,\ \ 3)\ i\ ,\ \ 4)\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ ?$$

Р е ш е н и е:

Точка $M(\xi,\eta,\zeta)$, являющаяся стереографической проекцией комплексного числа $z = x + iy$, имеет координаты равные:

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\quad ,\quad \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\quad ,\quad \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\quad (\text{см. №1.44 [2]})\ .$$

Тогда:

$$1)\ z=1\ \ \to\ \ x=1\ ,\ y=0\ \ \to\ \ \xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}} = 0\ ,\ \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$2)\ z=-1\ \ \to\ \ x=-1\ ,\ y=0\ \ \to\ \ \xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=-1\\y=0}} = -\frac{1}{2}\ ,$$

$$\eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=-1\\y=0}} = 0\ ,\ \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=-1\\y=0}} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$3)\ z=i\ \ \to\ \ x=0\ ,\ y=1\ \ \to\ \ \xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0\ ,$$

$$\eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{2}\ ,\ \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$4)\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \to\ \ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \to$$

$$\to\ \ \xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=1/\sqrt{2}\\y=-1/\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=1/\sqrt{2}\\y=-1/\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ ,$$

$$\zeta = \left.\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right|_{\substack{x=1/\sqrt{2} \\ y=-1/\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \ .$$

- -

Задача 38.6 (№1.46 [2]). Каков на коплексной плоскости образ параллели с широтой β $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$? Чему соответствуют «южный» и «северный» полюсы?

Р е ш е н и е:

Координаты точки $M(\xi, \eta, \zeta)$, расположенной на сфере радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке с координатами $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ (см. Рис.37.8) , удовлетворяют уравнению $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$. Все точки сферы, расположенные на параллели с широтой β , имеют одинаковую координату $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\beta$.

Две другие координаты точек параллели удовлетворяют соотношению

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \ \ \to \ \ \xi^2 + \eta^2 = \left.\left(\zeta - \zeta^2\right)\right|_{\zeta=1/2+1/2\cdot\sin\beta} = \frac{1-\sin^2\beta}{4} \ .$$

Точке, лежащей на параллели с широтой β , соответствует на комплексной плоскости число $z = x + iy$, у которого

$$x = \left.\frac{\xi}{1-\zeta}\right|_{\zeta=1/2+1/2\cdot\sin\beta} = \frac{2\xi}{1-\sin\beta} \quad ,$$

$$y = \left.\frac{\eta}{1-\zeta}\right|_{\zeta=1/2+1/2\cdot\sin\beta} = \frac{2\eta}{1-\sin\beta} \quad (\text{см. №1.44 [2]}) \ .$$

Рассмотрим сумму

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{(1-\sin\beta)^2}\cdot\left(\xi^2+\eta^2\right) = \frac{4}{(1-\sin\beta)^2}\cdot\frac{1-\sin^2\beta}{4} = \frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2} = \left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right\} = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\right)^2 \ .$$

Образом параллели с широтой $\beta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ является окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом равным $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$. «Южный» полюс соответствует числу $z = 0$, а «северный» полюс соответствует числу $z = \infty$.

- -

Задача 38.7 (№1.71(4) [2]). Вычислить

$$\operatorname{Ln}(2 - 3i) \quad \text{и} \quad \operatorname{Ln}(-2 + 3i) \, .$$

Р е ш е н и е:

По определению $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k$, где $z = re^{i\varphi}$.

1) Задано число

$$z = 2 - 3i = \sqrt{13}\, e^{-i \operatorname{arctg}(3/2)} \quad \to \quad r = \sqrt{13}\,, \; \varphi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\,.$$

Тогда,

$$\operatorname{Ln}(2 - 3i) = \frac{\ln 13}{2} - i \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + i\,2\pi k\,, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

2) Задано число

$$z = -2 + 3i = \sqrt{13}\, e^{i\,(\pi - \operatorname{arctg}(3/2))} \quad \to \quad r = \sqrt{13}\,, \; \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\,.$$

Тогда,

$$\operatorname{Ln}(-2 + 3i) = \frac{\ln 13}{2} + i\,(\pi - \operatorname{arctg}(3/2)) + i\,2\pi k\,, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

О т в е т:

$$\operatorname{Ln}(2 - 3i) = \frac{\ln 13}{2} - i \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + i\,2\pi k\,, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; ;$$

$$\operatorname{Ln}(-2 + 3i) = \frac{\ln 13}{2} + i\,(\pi - \operatorname{arctg}(3/2)) + i\,2\pi k\,, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

- -

Задача 38.8 (№1.77(1) [2]). Доказать равенство (для корня берутся все его значения)

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \, .$$

Р е ш е н и е:

Получим формулу, определяющую функцию $\operatorname{Arccos} z$, решив относительно w уравнение $\cos w = z \quad (\, w = \operatorname{Arccos} z \,)$.

$$\cos w = z \;\;\to\;\; \frac{e^{i\,w}+e^{-i\,w}}{2} = z \;\;\to\;\; e^{i\,w} + \frac{1}{e^{i\,w}} = 2z \;\;\to$$

$$\to \quad \text{Замена переменной: } \; t = e^{i\,w} \;\;\to\;\; t + \frac{1}{t} = 2z \;\;\to$$

$$\to\; t^2 - 2zt + 1 = 0 \to\; (t-z)^2 = z^2 - 1 \to\; t = z + \underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{\substack{\text{два значения} \\ \text{квадратного корня}}} \;\;\to$$

$$\to \;\; e^{i\,w} = z + \sqrt{z^2-1} \;\;\to\;\; i\,w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \;\;\to$$

$$\to \quad w = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

Итак, по определению

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) .$$

- -

Определение. Функция $f(z)$ называется равномерно непрерывной на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек $z' \in D$ и $z'' \in D$, удовлетворяющих условию $|z' - z''| < \delta$, верно неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

- -

Задача 38.9 (№1.127 [2]). Будут ли функции

$$1) \;\; \frac{1}{1-z} \;\; , \;\; 2) \;\; \frac{1}{1+z^2}$$

непрерывны внутри единичного круга $(|z| < 1)$? Будут ли они равномерно непрерывны?

Р е ш е н и е:

Функции $f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$ и $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ непрерывны в области $|z| < 1$, как комбинации непрерывных функций.

Исследуем эти функции на равномерную непрерывность в области $|z| < 1$.

1) $f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Выберем две последовательности значений аргумента функции:

$$z'_k = 1 - \frac{1}{k} \;\; , \;\; z''_k = 1 - \frac{2}{k} \;\; , \;\; k = 0, 1, 2, \ldots \;\;\to\;\; |z'_k - z''_k| = \frac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Разность $|f_1(z'_k) - f_1(z''_k)| = \dfrac{k}{2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Следовательно, функция $f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$ не является равномерно непрерывной на множестве $|z| < 1$.

2) $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

Выберем две последовательности значений аргумента функции:

$z'_k = i - \dfrac{i}{k}$, $z''_k = i - \dfrac{i2}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad |z'_k - z''_k| = \left|\frac{i}{k}\right| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \, .$$

Разность $|f_2(z'_k) - f_2(z''_k)| = \left|\dfrac{k^2}{2k-1} - \dfrac{k^2}{4(k-1)}\right| =$

$$= \underbrace{\frac{k}{4}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{k}{k-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2k-3}{2k-1}}_{\to 1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \, .$$

Следовательно, функция $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ не является равномерно непрерывной на множестве $|z| < 1$.

- -

3.3 Дифференцирование функции комплексного переменного

3.3.1 Занятие 39

Функция $f(z)$ определена в области D.

Определение. Если в точке $z_0 \in D$ существует при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел называется производной функции $f(z)$ по комплексной переменной z в точке z_0 и обозначается как $f'(z_0)$, то есть

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

В случае существования $f'(z_0)$ функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0.

Дифференцируемость функции комплексного переменного в точке z_0 связана с наличием ряда условий на такие характеристики комплексной функции, как, например, действительная и мнимая части или модуль и аргумент, в точке z_0. Эти условия называются условиями Коши-Римана.

Теорема. Если функция $f(z)=u(x\,,\,y)+i\,v(x\,,\,y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+i\,y_0$, то в этой точке существуют частные производные функций $u(x\,,\,y)$ и $v(x\,,\,y)$ по переменным $x\,,\,y$, причём имеют место равенства (условия Коши-Римана)

$$\frac{\partial u(x_0\,,\,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0\,,\,y_0)}{\partial y}\;\;,\;\;\frac{\partial u(x_0\,,\,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0\,,\,y_0)}{\partial x}.$$

Теорема. Если в точке $(x_0\,,\,y_0)$ у функций $u(x\,,\,y)$ и $v(x\,,\,y)$ существуют частные производные, удовлетворяющие равенствам (условиям Коши-Римана)

$$\frac{\partial u(x_0\,,\,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0\,,\,y_0)}{\partial y}\;\;,\;\;\frac{\partial u(x_0\,,\,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0\,,\,y_0)}{\partial x},$$

то функция $f(z)=u(x\,,\,y)+i\,v(x\,,\,y)$ является дифференцируемой функцией комплексной переменной z в точке $z_0=x_0+i\,y_0$.

Определение. Если функция $f(z)$:

1) определена в области D $(z\in D)$;

2) непрерывна во всех точках области D ;

3) дифференцируема во всех точках области D (существует $f'(z)$) ;

4) производная $f'(z)$ непрерывна во всех точках области D ,

то функция $f(z)$ называется аналитической функцией в области D .

Теорема. Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z) = u(x\,,\,y) + i\,v(x\,,\,y)$ в области D является существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x\,,\,y)$ и $v(x\,,\,y)$, связанных соотношениями Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial x} \, .$$

- -

Задача 39.1 (№1.131 [2]). Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций

$$1)\ \ e^z \quad , \quad 2)\ \ z^n$$

и доказать, что

$$(e^z)' = e^z \quad , \quad (z^n)' = n\,z^{n-1} \, .$$

Р е ш е н и е:

1) Функция

$$f(z) = e^z = \{z = x + i\,y\} = \underbrace{e^x \cos y}_{=u(x\,,\,y)} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{=v(x\,,\,y)} \, .$$

$$\frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial x} = e^x \cos y \ \ , \ \ \frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial y} = e^x \cos y \ \ \to \ \ \frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial y} = -e^x \sin y \ \ , \ \ \frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial x} = e^x \sin y \ \ \to \ \ \frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial y} = -\,\frac{\partial v(x\,,\,y)}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана для функции e^z выполнены в любой точке коплексной плоскости z . Следовательно, существует $(e^z)'$, равная

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} e^z \cdot \left(\frac{1 + \Delta z + (\Delta z)^2/2 + \ \ldots \ - 1}{\Delta z} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} e^z \cdot \left(1 + \frac{\Delta z}{2} + O(\Delta z) \right) = e^z \, .$$

2) Функция

$$f(z) = z^n = \left\{ z = x + i\,y = r\,e^{i\varphi} \ \ , \ \ r = \sqrt{x^2 + y^2} \ \ , \ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \right\} =$$

$$= r^n\, e^{in\varphi} = \underbrace{r^n \cos n\varphi}_{=u(x\,,\,y)} + i\ \underbrace{r^n \sin n\varphi}_{=v(x\,,\,y)}\,.$$

$$\frac{\partial u\,(x\,,\,y)}{\partial x} = n\, r^{n-1}\, \frac{\partial r}{\partial x}\, \cos n\varphi - r^n\, n\, \sin n\varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\ \ , \right.$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} \right\} = n\, r^{n-2}\, (x\, \cos n\varphi + y\, \sin n\varphi)$$

$$\frac{\partial v\,(x\,,\,y)}{\partial y} = n\, r^{n-1}\, \frac{\partial r}{\partial y}\, \sin n\varphi + r^n\, n\, \cos n\varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\ \ , \right.$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} \right\} = n\, r^{n-2}\, (y\, \sin n\varphi + x\, \cos n\varphi) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial u\,(x\,,\,y)}{\partial x} = \frac{\partial v\,(x\,,\,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u\,(x\,,\,y)}{\partial y} = n\, r^{n-1}\, \frac{\partial r}{\partial y}\, \cos n\varphi - r^n\, n\, \sin n\varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$= n\, r^{n-2}\, (y\, \cos n\varphi - x\, \sin n\varphi)$$

$$\frac{\partial v\,(x\,,\,y)}{\partial x} = n\, r^{n-1}\, \frac{\partial r}{\partial x}\, \sin n\varphi + r^n\, n\, \cos n\varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= n\, r^{n-2}\, (x\, \sin n\varphi - y\, \cos n\varphi) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial u\,(x\,,\,y)}{\partial y} = -\,\frac{\partial v\,(x\,,\,y)}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана для функции z^n выполнены в любой точке коплексной плоскости z. Следовательно, существует $(z^n)'$, равная

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{n\, z^{n-1} \cdot \Delta z + \,\ldots\, + (\Delta z)^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(n\, z^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2}\, \Delta z + \,\ldots\, + (\Delta z)^{n-1} \right) = n\, z^{n-1}\,.$$

Задача 39.2 (№1.133 [2]). Найти области, в которых функция

$$f\,(z) = \left| x^2 - y^2 \right| + i\, 2\, |x\, y|$$

будет аналитической ?

Р е ш е н и е:

Для заданной функции $f\,(z) = \left| x^2 - y^2 \right| + i\, 2\, |x\, y|$ действительная часть функции равна $\mathrm{Re}\, f\,(z) = u\,(x\,,\,y) = \left| x^2 - y^2 \right|$ и мнимая часть функции равна $\mathrm{Im}\, f\,(z) = v\,(x\,,\,y) = 2\, |x\, y|$.

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ не существуют в точках комплексной плоскости z, в которых $\left|x^2-y^2\right|=0$ или $|x\,y|=0$. Все эти точки лежат на прямых линиях $x-y=0$, $x+y=0$, $x=0$ и $y=0$, делящих комплексную плоскость z на угловые сегменты $'1'$, $'2'$, $'3'$, $'4'$, $'5'$, $'6'$, $'7'$, $'8'$ (Рис.39.1).

Запишем условия Коши-Римана для заданной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\,x\,\operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2\,x\,\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)\ \to\ \operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)=\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2\,y\,\operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2\,y\,\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)\ \to\ \operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)=\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)\ .$$

Итак, условия Коши-Римана имеют следующий вид

$$\operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)=\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)\ .$$

Значения функций $\operatorname{sgn}\left(x^2-y^2\right)$ и $\operatorname{sgn}\left(x\,y\right)$ равны между собой в угловых сегментах $'1'$, $'3'$, $'5'$, и $'7'$ (Рис.39.1).

Итак, областью аналитичности функции $f\ (z)=\left|x^2-y^2\right|+i\,2\,|x\,y|$ являются точки комплексной плоскости, в которых верны неравенства

$$0+\frac{\pi}{2}\,k<\arg z<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\ ,\ k=0,1,2,3\,.$$

О т в е т:

$$\frac{\pi}{2}\,k<\arg z<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\ ,\ k=0,1,2,3$$

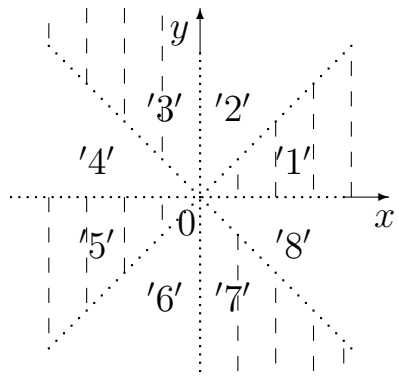

*Рис.*39.1

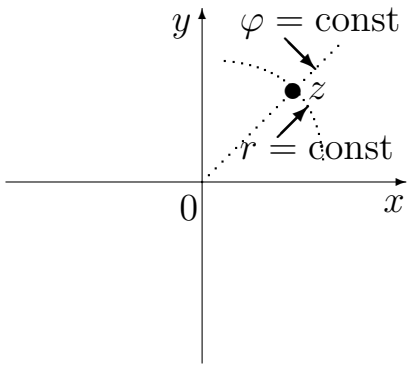

*Рис.*39.2

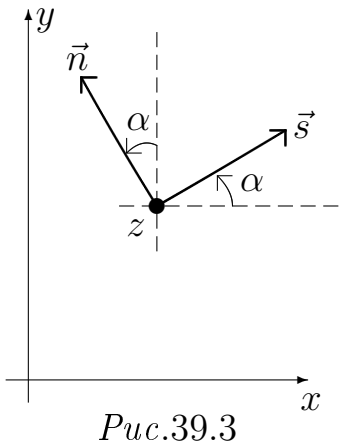

*Рис.*39.3

Задача 39.3 (№1.135 [2]). Пусть $z=r\,e^{i\varphi}$ и $f\,(z)=u\,(r\,,\,\varphi)+i\,v\,(r\,,\,\varphi)$. Записать уравнения (условия) Коши-Римана в полярных координатах.

Р е ш е н и е:

Координатными линиями в полярной системе координат являются линии $r = \text{const}$ и линии $\varphi = \text{const}$ (Рис.39.2).

Пусть существует

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Рассмотрим этот предел в двух частных случаях стремления Δz к нулю вдоль координатной линии $\varphi = \text{const}$ и вдоль координатной линии $r = \text{const}$.

$$1)\ z = r\,e^{i\varphi}\ ,\ z+\Delta z = (r+\Delta r)\,e^{i\varphi} \to \Delta z = \Delta r\,e^{i\varphi} \to$$
$$\to \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{u(r+\Delta r\,,\,\varphi) + i\,v(r+\Delta r\,,\,\varphi) - u(r\,,\,\varphi) - i\,v(r\,,\,\varphi)}{\Delta r\,e^{i\varphi}} =$$
$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{u(r+\Delta r\,,\,\varphi) - u(r\,,\,\varphi)}{\Delta r\,e^{i\varphi}} + i \lim_{\Delta r \to 0} \frac{v(r+\Delta r\,,\,\varphi) - v(r\,,\,\varphi)}{\Delta r\,e^{i\varphi}} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) \cdot e^{-i\varphi}$$

$$2)\ z = r\,e^{i\varphi}\ ,\ z+\Delta z = r\,e^{i(\varphi+\Delta\varphi)} \to \Delta z = r\,e^{i\varphi} \cdot \left(e^{i\Delta\varphi} - 1\right) =$$
$$= r\,e^{i\varphi} \cdot \left(1 + i\,\Delta\varphi + O\left((\Delta\varphi)^2\right) - 1\right) = i\,r\,e^{i\varphi}\,\Delta\varphi + O\left((\Delta\varphi)^2\right) \to$$
$$\to \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{u(r\,,\,\varphi+\Delta\varphi) + i\,v(r\,,\,\varphi+\Delta\varphi) - u(r\,,\,\varphi) - i\,v(r\,,\,\varphi)}{i\,r\,e^{i\varphi}\,\Delta\varphi + O\left((\Delta\varphi)^2\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{u(r\,,\,\varphi+\Delta\varphi) - u(r\,,\,\varphi)}{i\,r\,e^{i\varphi}\,\Delta\varphi + O\left((\Delta\varphi)^2\right)} + i \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{v(r\,,\,\varphi+\Delta\varphi) - v(r\,,\,\varphi)}{i\,r\,e^{i\varphi}\,\Delta\varphi + O\left((\Delta\varphi)^2\right)} =$$
$$= \left(-i\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) \cdot e^{-i\varphi}$$

Производная функции $f(z)$ существует, поэтому два полученных выражения для $f'(z)$ должны совпадать

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi} - i\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Комплексные числа равны, если равны их действительные и мнимые части

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\ ; \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}.$$

Полученная система двух уравнений является формой записи условий Коши-Римана в случае, когда аргумент функции $f(z)$ записан в показательной форме $\left(z = r\,e^{i\varphi}\right)$, а функция задана в алгебраической форме $(f(z) = u(r\,,\,\varphi) + i\,v(r\,,\,\varphi))$.

- -

Задача 39.4 (№1.137 [2]). Доказать, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

Р е ш е н и е:

$$f(z) = \bar{z} = x - i\,y \;\rightarrow\; u(x\,,\,y) = x\,,\; v(x\,,\,y) = -y \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} = 1\,,\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,,\; \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,,\; \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Одно из условий Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ не выполняется $(1 \neq -1)$ во всех точках комплексной плоскости z. Следовательно, функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

- -

Задача 39.5 (№1.144(3) [2]). В соотношении

$$w = w(z) = f(x\,,\,y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\,,\,\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = g(z\,,\,\bar{z})$$

рассматривать z и $\bar{z}$ как независимые переменные.

Доказать соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right).$$

Р е ш е н и е:

$$z = x + i\,y\,,\; \bar{z} = x - i\,y \;\rightarrow\; x = \frac{z+\bar{z}}{2} = x(z\,,\,\bar{z})\,,\; y = \frac{z-\bar{z}}{2i} = y(z\,,\,\bar{z})$$

$$w(z) = u(x\,,\,y) + i\,v(x\,,\,y) =$$
$$= u(x(z\,,\,\bar{z})\,,\,y(z\,,\,\bar{z})) + i\,v(x(z\,,\,\bar{z})\,,\,y(z\,,\,\bar{z})) \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = w_{\bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} =$$
$$= \left\{\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\;,\;\; \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

- -

Задача 39.6 (№1.145 [2]). Доказать, что уравнения (условия) Коши-Римана эквивалентны уравнению (условию)

$$w_{\bar{z}} = 0\,.$$

Р е ш е н и е:

Условия Коши-Римана имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. .$$

Производная $w_{\bar{z}}$ равна

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\,.$$

Пусть выполнены Условия Коши-Римана. Тогда

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}\right) + i\,\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}_{=0}\right)\right) = 0\,.$$

Пусть производная $w_{\bar{z}}$ равна нулю. Тогда

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) = 0 \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right. .$$

То есть, выполняются условия Коши-Римана $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. .$

Доказано, что условия Коши-Римана эквивалентны условию $w_{\bar{z}} = 0\,.$

Условие $w_{\bar{z}} = 0$ можно было использовать при решении №1.137 [2], в котором исследовалась на дифференцируемость функция $f\,(z) = \bar{z}\,.$ Производная $f_{\bar{z}} = 1 \neq 0$ во всех точках комплексной плоскости $z\,.$ Следовательно, функция $f\,(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

- -

Задача 39.7 (№1.165 [2]). Найти аналитическую функцию $f(z) = u + i\,v$ по заданной действительной части

$$u(x\,,\,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} \quad (z \neq 0)\ .$$

Р е ш е н и е:

Так как функция $f(z)$ аналитическая, то для неё выполнены условия Коши-Римана

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = 2x + 5 + \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = 2y - 1 + \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{array} \right. .$$

Решив дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 5 + \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, получим выражение для функции $v(x\,,\,y) = 2xy + 5y - \dfrac{x}{x^2+y^2} + C_1(x)$, подстановка которой в уравнение $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y - 1 + \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ приводит к определению $C_1(x)$

$$C_1'(x) = -1 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = -x + C_0\,.$$

Итак получили, что

$$v(x\,,\,y) = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} - x + C_0\,.$$

Искомая аналитическая функция $f(z) = u + i\,v$ имеет вид

$$f(z) = u(x\,,\,y) + i\,v(x\,,\,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} +$$

$$+ i\left(2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} - x + C_0\right) = \{z = x + iy\} = z^2 + (5-i)\,z - \frac{i}{z} + C.$$

О т в е т:

$$f(z) = z^2 + (5-i)\,z - \frac{i}{z} + C \quad (C = \text{const})$$

- -

Задача 39.8 (№1.132 [2]). Найти постоянные a, b, c при которых функция $f(z)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости:

1) $f(z) = x + ay + i\,(bx + cy)$;

2) $f(z) = \cos x \cdot (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i\,\sin x \cdot (\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

Р е ш е н и е:

1) Так как функция

$$f(z) = \underbrace{x + ay}_{=u(x,y)} + i\,\underbrace{(bx + cy)}_{=v(x,y)}$$

аналитическая, то для неё выполнены условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 1 = c\,; \\ a = -b \end{cases} .$$

Следовательно, аналитическая функция $f(z)$ имеет следующий вид

$$f(z) = x + ay + i\,(-ax + y) = \{z = x + i\,y\} = z - a\,(-y + i\,x) = \\ = z - i\,az = (1 - i\,a)\,z\,, \quad \text{где} \quad a - \ \text{любое число}\,.$$

2) Так как функция

$$f(z) = \underbrace{\cos x \cdot (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y)}_{=u(x,y)} + i\,\underbrace{\sin x \cdot (\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)}_{=v(x,y)}$$

аналитическая при любых x, y, то для неё выполнены условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \begin{cases} -\sin x \cdot (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) = \sin x \cdot (\operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y)\,; \\ \cos x \cdot (\operatorname{sh} y + a \operatorname{ch} y) = -\cos x \cdot (\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) \end{cases} \quad \text{при любых}\, x, y \to$$

$$\to \begin{cases} \sin x \cdot ((a+1) \operatorname{sh} y + (b+1) \operatorname{ch} y) = 0\,; \\ \cos x \cdot ((b+1) \operatorname{sh} y + (a+1) \operatorname{ch} y) = 0 \end{cases} \quad \text{при любых} \ \ x\,,\ y \ \ \to$$

$$\to \begin{cases} (a+1) \operatorname{sh} y + (b+1) \operatorname{ch} y = 0\,; \\ (b+1) \operatorname{sh} y + (a+1) \operatorname{ch} y = 0 \end{cases} \quad \text{при любых} \ \ y \ \ \to$$

$$\to \begin{cases} a + 1 = 0\,; \\ b + 1 = 0 \end{cases} \quad \to \quad a = b = -1\,.$$

Следовательно, аналитическая функция $f(z)$ имеет следующий вид

$$f(z) = \cos x \cdot (\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) + i \sin x \cdot (\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) = \cos x \cdot e^{-y} + i \sin x \cdot e^{-y} = \\ = e^{-y} \cdot (\cos x + i \, \sin x) = e^{-y} \cdot e^{i\,x} = e^{i\,(x+i\,y)} = e^{i\,z} \, .$$

- -

Задача 39.9 (№1.134 [2]). Пусть

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = R(x,y)\; e^{i\,\Phi(x,y)}$ – аналитическая функция.

Доказать, что если одна из функций $u(x,y)$, $v(x,y)$, $R(x,y)$, $\Phi(x,y)$ тождественно равна постоянной, то и функция $f(z)$ постоянна.

Р е ш е н и е:

1) Если для функции и её аргумента используется алгебраическая форма записи $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, то условия Коши-Римана имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \, ; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \, .$$

Тогда, если, например, $u(x,y) = \text{const}$, то $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ и $v(x,y) = \text{const}$.

Следовательно, функция $f(z) = \text{const}$.

2) Если для функции используется показательная форма записи

$f(z) = R(x,y)\; e^{i\,\Phi(x,y)}$, а для её аргумента используется алгебраическая форма записи, то условия Коши-Римана имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = R\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \, ; \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = -R\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \end{cases} \, .$$

Тогда, если, например, $R(x,y) = \text{const}$, то $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ и $\Phi(x,y) = \text{const}$.

Следовательно, функция $f(z) = \text{const}$.

- -

Задача 39.10 (№1.136 [2]). Доказать, что если $f(z) = u + i\,v$ – аналитическая функция и $\vec{s}$, $\vec{n}$ – перпендикулярные векторы, причём поворот от вектора $\vec{s}$ к вектору $\vec{n}$ на прямой угол совершается против часовой стрелки, то условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n} \;\; , \;\; \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\dfrac{\partial}{\partial s}$ и $\dfrac{\partial}{\partial n}-$ производные от функций двух действительных переменных по соответствующему направлению$\right)$.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ является аналитической функцией. Выполняются условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} .$$

Векторы $\vec{s} = \{\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha\}\ ,\ \vec{n} = \{\cos(\alpha+\pi/2)\ ,\ \sin(\alpha+\pi/2)\} =$
$= \{-\sin\alpha\ ,\ \cos\alpha\}$ (Рис.39.3).

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\operatorname{grad} u\ ,\ \vec{s}) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = (\operatorname{grad} v\ ,\ \vec{n}) = -\frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha =$$

$$= \{\text{Выполнены условия Коши-Римана.}\} = \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\operatorname{grad} u\ ,\ \vec{n}) = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = (\operatorname{grad} v\ ,\ \vec{s}) = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha =$$

$$= \{\text{Выполнены условия Коши-Римана.}\} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}\,.$$

Задача 39.11 (№1.144(1,2) [2]). В соотношении

$$w = w(z) = f(x\ ,\ y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\ ,\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = g(z\ ,\ \bar{z})$$

рассматривать z и $\bar{z}$ как независимые переменные.

Доказать следующие соотношения:

$$1)\ \ dw = w_z\, dz + w_{\bar z}\, d\bar z\ ;$$

$$2)\ \ w_z = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\ .$$

Р е ш е н и е:

$$1)\ \ w = w\,(z\ ,\ \bar z)\ \ \to\ \ dw = \frac{\partial w}{\partial z}\, dz + \frac{\partial w}{\partial \bar z}\, d\bar z = w_z\, dz + w_{\bar z}\, d\bar z\ ;$$

$$2)\ \ z = x + i\,y\ ,\ \bar z = x - i\,y\ \to\ x = \frac{z+\bar z}{2} = x\,(z\ ,\ \bar z)\ \ ,\ \ y = \frac{z-\bar z}{2i} = y\,(z\ ,\ \bar z)$$

$$\begin{aligned}
&w\,(z) = u\,(x\ ,\ y) + i\,v\,(x\ ,\ y) = \\
&= u\,(x\,(z\ ,\ \bar z)\ ,\ y\,(z\ ,\ \bar z)) + i\,v\,(x\,(z\ ,\ \bar z)\ ,\ y\,(z\ ,\ \bar z))\ \to \\
&\to\ \frac{\partial w}{\partial z} = w_z = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \\
&= \left\{\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}\ \ ,\ \ \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial v}{\partial y} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\,\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)
\end{aligned}$$

- -

Задача 39.12 (№1.167 [2]). Найти аналитическую функцию $f\,(z) = u + i\,v$ по заданной мнимой части

$$v\,(x\ ,\ y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2\,(x^2+y^2)}\quad (z \neq 0)\ .$$

Р е ш е н и е:

Так как функция $f\,(z)$ аналитическая, то для неё выполнены условия Коши-Римана

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\ ; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right.\quad \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)}\right) = -2y - \dfrac{x^2-y^2}{2\,(x^2+y^2)^2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)}\right) = -2x - \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right.\ .$$

Решив дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x - \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, получим выражение для функции $u(x\,,\,y) = -2xy + \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} + C_1(x)$, подстановка которой в уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2y - \dfrac{x^2-y^2}{2\,(x^2+y^2)^2}$ приводит к определению $C_1(x)$

$$C_1'(x) = 0 \quad \to \quad C_1(x) = C\,.$$

Итак получили, что

$$u(x\,,\,y) = -2xy + \frac{x}{2\,(x^2+y^2)} + C\,.$$

Искомая аналитическая функция $f(z) = u + i\,v$ имеет вид

$$f(z) = u(x\,,\,y) + i\,v(x\,,\,y) = -2xy + \frac{x}{2\,(x^2+y^2)} + C + \\ + i\left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2\,(x^2+y^2)}\right) = \{z = x + iy\} = i\,z^2 + \frac{1}{2z} + i\,3 + C.$$

О т в е т:

$$f(z) = i\,z^2 + \frac{1}{2z} + i\,3 + C \quad (C = \text{const})$$

- -

3.4 Конформные отображения

3.4.1 Занятие 40

Пусть функция $f(z)$ является аналитической функцией в области D и $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$. Такая функция $f(z)$ обладает свойством «сохранения углов» и свойством «постоянства растяжений».

Свойство «сохранения углов» :

$z_0 \in D$, γ_1, γ_2 – две гладкие линии, пересекающиеся в точке z_0;

φ – угол между касательными прямыми к линиям γ_1 и γ_2 в точке z_0;

$w_0 = f(z_0)$ – образ точки z_0;

Γ_1, Γ_2 – образы линий γ_1, γ_2 при отображении $w = f(z)$;

угол между касательными к линиям Γ_1 и Γ_2 в точке w_0 равен φ (свойство «сохранения углов»).

$\theta = \arg f'(z_0)$ – угол между касательной прямой к линии γ_1 в точке z_0 и касательной прямой к линии Γ_1 в точке w_0.

Свойство «постоянства растяжений» :

при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z)$ и удовлетворяющей условию $f'(z) \neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причём $|f'(z)|$ равен коэффициенту подобия (свойство «постоянства растяжений»).

Определение. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ с производной $f'(z_0) \neq 0$, называется конформным отображением.

- -

Задача 40.1 (№1.187 [2]). Отображение совершается с помощью функций $w = z^2$ и $w = z^3$ $(z \neq 0)$. Найти угол поворота (θ) направления, выходящего из точки z_0, и коэффициент растяжения (k) в следующих точках:

$$1)\ z_0 = 1 \quad , \quad 2)\ z_0 = -\frac{1}{4} \quad , \quad 3)\ z_0 = 1 + i \quad , \quad 4)\ z_0 = -3 + 4i\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\theta = \arg w'(z_0) \quad , \quad k = |w'(z_0)|$$

а) Функция $w(z) = z^2 \ \rightarrow \ w'(z) = 2z$.

$$1) \quad z_0 = 1 \ \rightarrow \ \theta = \arg(2z_0) = \arg 2 + \arg z_0 = \arg 2 + \arg 1 = 0 \ ,$$
$$k = |2z_0| = |2|\,|z_0| = 2\,|1| = 2$$

2) $z_0 = -\dfrac{1}{4} \;\to\; \theta = \arg z_0 = \arg\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \pi\,,\; k = 2\,|z_0| = 2\left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$

3) $z_0 = 1+i \;\to\; \theta = \arg z_0 = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}\;,\;\; k = 2\,|1+i| = 2\sqrt{2}$

4) $z_0 = -3+4i \;\to\; \theta = \arg z_0 = \arg(-3+4i) = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\;,$

$$k = 2\,|z_0| = 2\,|-3+4i| = 10$$

б) Функция $w(z) = z^3 \;\to\; w'(z) = 3z^2\,.$

1) $z_0 = 1 \;\to\; \theta = \arg\left(3z_0^2\right) = \arg 3 + \arg z_0^2 = \arg 3 + \arg 1 = 0\;,$

$$k = \left|3z_0^2\right| = |3|\,|z_0|^2 = 3\,|1|^2 = 3$$

2) $z_0 = -\dfrac{1}{4} \;\to\; \theta = \arg z_0^2 = \arg\left(\dfrac{1}{16}\right) = 0\,,\; k = 3\,|z_0|^2 = \dfrac{3}{16}$

3) $z_0 = 1+i \;\to\; \theta = \arg z_0^2 = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}\;,\;\; k = 3\,|1+i|^2 = 6$

4) $z_0 = -3+4i \;\to\; \theta = \arg z_0^2 = \arg(-3+4i)^2 = \arg(-7-24i) =$

$$= \left\{\varphi = \arg(-7-24i)\;,\; -\pi < \varphi < -\pi/2\;,\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{24}{7} \;\to\right.$$

$$\to\; -\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < -\frac{\pi}{4}\;,\; \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} < 0\;,\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\varphi/2)} \;\to$$

$$\left.\to \frac{24}{7} = \frac{2\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\varphi/2)} \to \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{4}{3} \to \varphi = -2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right\} = -2\operatorname{arctg}\frac{4}{3},$$

$$k = 3\left|z_0^2\right| = 3\,|-3+4i|^2 = 75$$

Задача 40.2 (№2.1 [2]). Найти целую (аналитическую на всей комплексной плоскости) линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках $0\,,\; 1\,,\; i$ на подобный ему треугольник с вершинами $0\,,\; 2\,,\; 1+i\,.$

Р е ш е н и е:

Линейная функция имеет вид $w(z) = az+b\,.$ Производная линейной функции существует и равна $w'(z) = a = \text{const} \neq 0\,.$ Функция $w(z) = az+b$ осуществляет конформное отображение. Произвольный треугольник в комплексной плоскости z линейной функцией преобразуется в подобный треугольник с коэффициентом подобия равным $|w'(z)| = |a| \neq 0\,.$

Заданные в плоскости z точки $z = 0\,,\; z = 1$ и $z = i$ определяют прямоугольный треугольник с равными катетами. Вершины этого треугольника обозначим как $c(0,0)\;,\; d(1,0)$ и $e(0,1)$ (Рис.40.1). Угол в треугольнике при вершине $c(0,0)$ равен $\pi/2\,,$ а два других угла равны $\pi/4\,.$ Выберем направление обхода границы треугольника таким, чтобы из вершины $d(1,0)\;,$ двигаясь против хода часовой стрелки, приходили в вершину $e(0,1)\;.$

При отображении линейной функцией $w(z) = az + b$ заданного в плоскости z прямоугольного треугольника получим в комплексной плоскости w подобный прямоугольный треугольник. Образом вершины $c(0,0)$ будет вершина $C(1,1)$ в комплексной плоскости w.

Пусть в плоскости w при обходе границы подобного треугольника сохраняется ранее выбранное направление движения. Для этого образом вершины $d(1,0)$ должна быть точка $D(0,0)$ и образом вершины $e(0,1)$ должна быть точка $E(2,0)$.

Итак, выполнение условий $w(0) = 1 + i$, $w(1) = 0$, $w(i) = 2$ сохраняет при отображении $w(z) = az + b$ выбранное направление обхода границы заданного треугольника.

Определение. Конформное отображение, сохраняющее у образа направление обхода границы, называется конформным отображением 1-ого рода.

Найдём функцию $w(z) = az + b$, осуществляющую конформное отображение 1-ого рода. Искомая функция имеет два параметра. Для их определения имеются три условия соответствия точек плоскостей z и w. Достаточно использовать любые два условия. Не использованное третье условие будет выполняться в силу общих свойств конформных отображений.

Определим параметры функции $w(z) = az + b$:

$$\begin{cases} w(0) = 1 + i\,; \\ w(1) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} b = 1 + i\,; \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad w(z) = -(1+i)z + 1 + i = (1+i)(1-z)\,.$$

О т в е т:

$$w(z) = (1+i)(1-z)$$

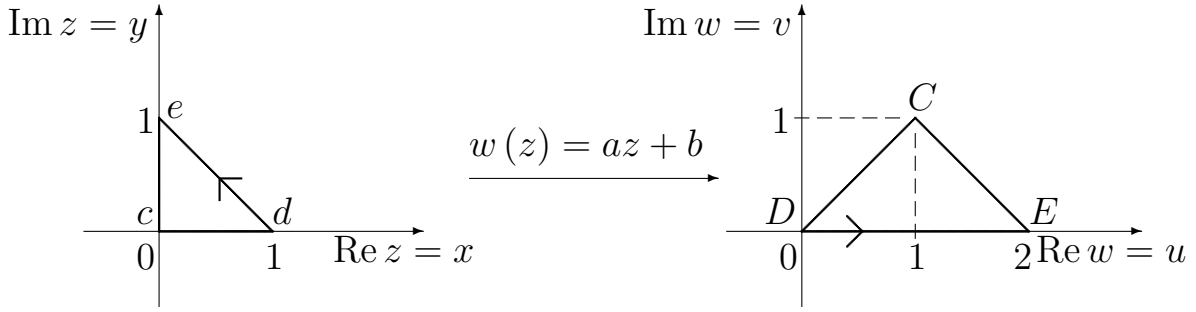

*Рис.*40.1

Задача 40.3 (№2.4 [2]). Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего :

1) верхнюю полуплоскость на себя;

2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;

3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость;

4) правую полуплоскость на себя.

Р е ш е н и е:

Линейную функцию $w(z) = az + b$ запишем в алгебраической форме.

Пусть $z = x + iy$, $a = a_x + ia_y$, $b = b_x + ib_y$. Тогда,

$$w(z) = (a_x + ia_y)(x + iy) + b_x + ib_y = a_x \cdot x - a_y \cdot y + b_x + \\ + i(a_x \cdot y + a_y \cdot x + b_y) = u + iv,$$

где $u = a_x \cdot x - a_y \cdot y + b_x$, $v = a_x \cdot y + a_y \cdot x + b_y$.

1) Преобразование верхней полуплоскости в верхнюю полуплоскость.

Верхняя полуплоскость комплексной плоскости z задаётся неравенствами $-\infty < x < +\infty$, $y \geqslant 0$. Верхняя полуплоскость комплексной плоскости w задаётся неравенствами $-\infty < u < +\infty$, $v \geqslant 0$.

При $-\infty < x < +\infty$, $y \geqslant 0$, для выполнения неравенства

$v = a_x \cdot y + a_y \cdot x + b_y \geqslant 0$, необходимо, чтобы $a_y = 0$, $a_x = \alpha > 0$.

Граничные точки $(y = 0)$ в плоскости z останутся граничными точками в плоскости w в случае $b_y = 0$.

Следовательно, линейная функция

$$w(z) = \alpha \cdot x + b_x + i\alpha \cdot y = \{b_x = \beta - \text{ произвольное действительное число}\} = \alpha z + \beta \quad , \quad (\alpha > 0)$$

переводит верхнюю полуплоскость z в верхнюю полуплоскость w.

2) Преобразование верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость.

Функция $w(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha > 0\,,\ -\infty < \beta < +\infty)$ переводит верхнюю полуплоскость z на верхнюю полуплоскость $w(z)$. Главное значение аргумента комплексных чисел $w(z)$ из верхней полуплоскости удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \arg w(z) \leqslant \pi$.

Главное значение аргумента комплексных чисел из нижней полуплоскости w удовлетворяет неравенству $-\pi \leqslant \arg w \leqslant 0$.

Главное значение аргумента произведения $w(z) \cdot e^{-i\pi}$ равно $\arg w(z) - \pi$, то есть меняется в диапазоне от $-\pi$ до 0.

Следовательно, функция

$$w_1(z) = w(z) \cdot e^{-i\pi} = (\alpha z + \beta) \cdot (-1) = -\alpha \cdot z - \beta = -\alpha \cdot z + \beta_1 \\ (\alpha > 0\,,\ \beta_1 - \text{ произвольное действительное число})$$

переводит верхнюю полуплоскость z на нижнюю полуплоскость w.

3) Преобразование верхней полуплоскости на правую полуплоскость.

Главное значение аргумента комплексных чисел из правой полуплоскости w удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg w \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Главное значение аргумента произведения $w(z) \cdot e^{-i\pi/2}$ равно $\arg w(z) - \frac{\pi}{2}$, то есть меняется в диапазоне от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, функция

$$w_2(z) = w(z) \cdot e^{-i\pi/2} = (\alpha z + \beta) \cdot (-i) = -i(\alpha z + \beta)$$
$$(\alpha > 0\,,\ \beta - \text{ произвольное действительное число})$$

переводит верхнюю полуплоскость z на правую полуплоскость w.

4) Преобразование правой полуплоскости на правую полуплоскость.

Правая полуплоскость комплексной плоскости z задаётся неравенствами $x \geqslant 0\,,\ -\infty < y < +\infty$. Правая полуплоскость комплексной плоскости w задаётся неравенствами $u \geqslant 0\,,\ -\infty < v < +\infty$.

При $x \geqslant 0\,,\ -\infty < y < +\infty$, для выполнения неравенства $u = a_x \cdot x - a_y \cdot y + b_x \geqslant 0$, необходимо, чтобы $a_y = 0\,,\ a_x = \alpha > 0$.

Граничные точки $(x = 0)$ в плоскости z останутся граничными точками в плоскости w в случае $b_x = 0$.

Следовательно, линейная функция

$$w_3(z) = \alpha \cdot x + i\alpha \cdot y + ib_y = \{b_y = \beta - \text{ произвольное действительное число}\} = \alpha z + i\beta \quad , \quad (\alpha > 0)$$

переводит правую полуплоскость z на правую полуплоскость w.

- -

Дробно-линейная функция.

Функция

$$w(z) = \lambda \frac{z - a}{z - b}\,,$$

у которой $\lambda\ ,\ a\ ,\ b -$ комплексные числа (параметры), называется дробно-линейной функцией.

Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной плоскости z на расширенную плоскости $w(z)$.

Теорема. Дробно-линейная функция однозначно определяется заданием соответствия трём различным точкам плоскости z трёх различных точек плоскости w.

Теорема. Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости w (прямые линии включаются в семейство окружностей, так как рассматриваются как окружности бесконечно большого радиуса).

Теорема. При отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией, точки, симметричные относительно окружности, переводятся в точки, симметричные относительно образа окружности.

Определение. Двуугольником называется плоская фигура, образованная пересечением дуг двух окружностей (Рис.40.2).

Дробно-линейная функция переводит двуугольник в плоскости z в двуугольник в плоскости w с сохранением углов при вершинах двуугольника.

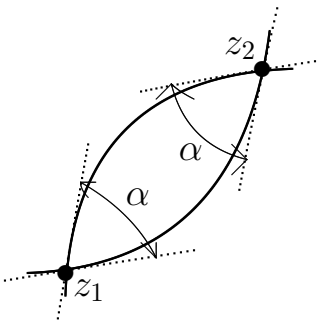

*Рис.*40.2

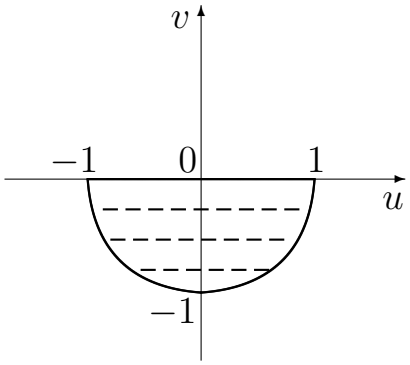

*Рис.*40.3

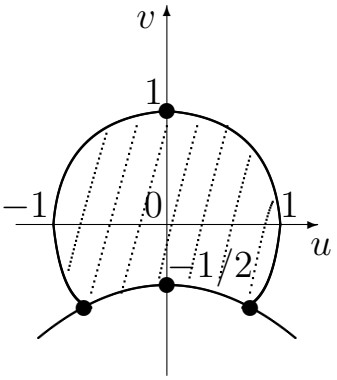

*Рис.*40.4

Задача 40.4 (№2.8(1) [2]). Для функции $w(z) = \dfrac{1}{z}$ найти образы семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$ $(a \neq 0 -$ параметр).

Р е ш е н и е:

$$w(z) = \frac{1}{z} = \{z = x + iy\} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} =$$
$$= u + iv\ , \quad \text{где} \quad u = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ v = -\frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

$$\begin{cases} u = \left.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right|_{x^2+y^2=ax} = \dfrac{1}{a}\ ; \\ \\ v = -\left.\dfrac{y}{x^2+y^2}\right|_{x^2+y^2=ax} = -\dfrac{y}{ax} \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow u = \dfrac{1}{a} = \text{const}, -\infty < v < +\infty -$ семейство вертикальных прямых.

Задача 40.5 (№2.11 [2]). Выяснить, во что преобразуется квадрант $x>0$, $y>0$ при отображении $w(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

Р е ш е н и е:

Заданная область $x>0$, $y>0$ является двуугольником с вершинами в точках $z=0$ и $z=\infty$. Углы при вершинах двуугольника равны $\dfrac{\pi}{2}$.

Задано дробно-линейное отображение $w(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$, которое переводит исходный двуугольник в двуугольник с вершинами в точках

$$w(z=0)=\frac{0-i}{0+i}=-1 \text{ и } w(z=\infty)=\left.\frac{1-i/z}{1+i/z}\right|_{z=\infty}=1\,.$$

Принцип соответствия границ при конформных отображениях гарантирует преобразование граничных точек $z=iy$ $(y\geqslant 0)$ в граничные точки

$$w(z=iy)=\frac{iy-i}{iy+i}=\frac{y-1}{y+1}=1-\frac{2}{y+1}=u+iv\,,\quad \text{где } u=1-\frac{2}{y+1}\,,$$
$$v=0 \text{ и параметр } 0\leqslant y<+\infty\,,$$

образующие отрезок прямой $-1\leqslant u\leqslant 1$, $v=0$ (Рис.40.3).

Граничные точки $z=x$ $(x\geqslant 0)$ преобразуются в граничные точки

$$w(z=x)=\frac{x-i}{x+i}=\frac{(x-i)^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}-i\,\frac{2x}{x^2+1}=u+iv\,,$$
$$\text{где } u=\frac{x^2-1}{x^2+1}\,,\ v=-\frac{2x}{x^2+1} \text{ и параметр } 0\leqslant x<+\infty\,.$$

Действительная часть $u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ и мнимая часть $v=-\dfrac{2x}{x^2+1}$ при $0\leqslant x<+\infty$ имеют числовые значения из сегментов $-1\leqslant u\leqslant 1$, $-1\leqslant v\leqslant 0$. Комбинация

$$u^2+v^2=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{(x^2+1)^2}=1\,.$$

Образы граничных точек $z=x$ $(x\geqslant 0)$ при заданном отображении лежат на нижней полуокружности (Рис.40.3).

Внутренняя точка $z=1+i$ квадранта переходит в точку

$$w(z=1+i)=\left.\frac{z-i}{z+i}\right|_{z=1+i}=\frac{1}{1+i2}=\frac{1}{5}-i\frac{2}{5}\,,$$

являющуюся внутренней точкой нижнего полукруга.

Образом заданного квадранта является нижний полукруг (Рис.40.3).

- -

Задача 40.6 (№2.6 [2]). Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую полосу, заключённую между данными прямыми, на полосу $0 < u < 1$ при указанной нормировке :

1) $x = a$, $x = a + h$; $w(a) = 0$;

2) $x = a$, $x = a + h$; $w\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) < 1$;

3) $y = kx$, $y = kx + b\ (b > 0)$; $w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2\ (b_2 > b_1)$; $w(b_1) = 0$.

Р е ш е н и е:

1) Функция $w_1(z) = z - a$ осуществляет параллельный перенос заданной вертикальной полосы шириной h с границами $x = a$, $x = a + h$ и удовлетворяет заданному условию нормировки. Тогда, функция

$$w(z) = \frac{1}{h} \cdot w_1(z) = \frac{z - a}{h}$$

является искомой функцией.

2) Функция $w_1(z) = \dfrac{z - (a + h)}{h}$ осуществляет перевод заданной вертикальной полосы шириной h с границами $x = a$, $x = a + h$ в вертикальную полосу шириной 1 с границами $\operatorname{Re} w_1 = -1$, $\operatorname{Re} w_1 = 0$. При этом $w_1\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ и $w_1\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) = -\dfrac{1}{2} + i$.

Функция $w_2(z) = w_1(z) \cdot e^{i\pi}$ осуществляет поворот полученной полосы на угол равный π против хода часовой стрелки. В комплексной плоскости w_2 появляется вертикальная полоса шириной 1 с границами $\operatorname{Re} w_2 = 0$, $\operatorname{Re} w_2 = 1$. При этом $w_2\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ и $w_2\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) = \dfrac{1}{2} - i$.

Тогда, функция

$$w(z) = w_2 + i = w_1(z) \cdot e^{i\pi} + i = \frac{z - (a + h)}{h} \cdot e^{i\pi} + i = \frac{-z + a + h}{h} + i$$

является искомой функцией, так как

$$w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i \text{ и } \operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) = 0 < 1.$$

3) В комплексной плоскости z задана полоса, границами которой являются прямая линия $y = kx + b$ и прямая линия $y = kx$, проходящая через

точку $z=0$. Тангенс угла между прямой $y=kx$ и координатной осью x равен k. Ширина заданной полосы равна $h=\dfrac{b}{\sqrt{1+k^2}}$.

Функция $w_1(z)=z\cdot e^{-i(\operatorname{arctg}k+\pi/2)}$ осуществляет перевод заданной наклонной полосы шириной h с границами $y=kx$, $y=kx+b$ в вертикальную полосу с границами $\operatorname{Re}w_1=0$, $\operatorname{Re}w_1=h$ и удовлетворяет заданному условию нормировки $w_1(0)=0$. Тогда, функция

$$w(z)=\frac{1}{h}\cdot w_1(z)=z\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{b}\cdot e^{-i(\operatorname{arctg}k+\pi/2)}$$

является искомой функцией.

4) В комплексной плоскости z задана полоса, границами которой являются прямая линия $y=kx+b_1$ и прямая линия $y=kx+b_2$. Ширина заданной полосы равна $h=\dfrac{b_2-b_1}{\sqrt{1+k^2}}$.

Функция $w_1(z)=z-ib_1$ осуществляет перевод заданной наклонной полосы шириной h в полосу, аналогичную рассмотренной в предыдущем пункте. Тогда, функция

$$w(z)=w_1(z)\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2-b_1}\cdot e^{-i(\operatorname{arctg}k+\pi/2)}=(z-ib_1)\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2-b_1}\cdot e^{-i(\operatorname{arctg}k+\pi/2)}$$

является искомой функцией.

- -

Задача 40.7 (№2.8(3) [2]). Для функции $w(z)=\dfrac{1}{z}$ найти образы пучка параллельных прямых $y=x+b$.

Р е ш е н и е:

$$w(z)=\frac{1}{z}\ ,\ z=x+iy\ ,\ w=u+iv\ \to\ u+iv=\frac{1}{x+iy}\ ,\ x+iy=\frac{1}{u+iv},$$

$$x+iy=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}\ \to\ x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

Так как $y=x+b$, то

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}+b\ \to\ b\left(u^2+v^2\right)+u+v=0\,.$$

Если $b=0$, то $u+v=0-$ прямая линия в комплексной плоскости w.

Если $b\neq 0$, то линии

$$b\left(u^2+v^2\right)+u+v=0\ \to\ \left(u+\frac{1}{2b}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{2b^2}\,,$$

являются семейством окружностей в комплексной плоскости w.

Задача 40.8 (№2.12 [2]). Выяснить, во что преобразуется полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ при отображении $w(z)=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

Р е ш е н и е:

Заданная область $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ является двуугольником с вершинами в точках $z=-1$ и $z=1$. Углы при вершинах двуугольника равны $\dfrac{\pi}{2}$.

Задано дробно-линейное отображение $w(z)=\dfrac{2z-i}{2+iz}$, которое переводит исходный двуугольник в двуугольник с вершинами в точках

$w(z=-1)=\dfrac{-2-i}{2-i}=-\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$ и $w(z=1)=\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$.

Принцип соответствия границ при конформных отображениях гарантирует преобразование граничных точек заданной области в граничные точки образа. Граничная точка $z=i$ переходит в точку $w(z=i)=\dfrac{2i-i}{2+ii}=i$. Три граничные точки $-\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$ и i, лежащие на дуге окружности, равно удалены на расстояние 1 от точки $w=0$, являющейся центром граничной окружности $|w|=1$ (Рис.40.4).

Граничная точка $z=0$ (расположена на дуге окружности бесконечно большого радиуса) преобразуется в граничную точку $w(z=0)=-\dfrac{i}{2}$. Три граничные точки $-\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{3}{5}-i\dfrac{4}{5}$ и $-\dfrac{i}{2}$, лежащие на дуге окружности, равно удалены от центра окружности, расположеного на оси v в точке $w=-i\,b$ $(b>0)$. Найдём число b :

$$\left|-\frac{3}{5}-i\frac{4}{5}+i\,b\right|=\left|-\frac{i}{2}+i\,b\right| \;\to\; \frac{9}{25}+\left(b-\frac{4}{5}\right)^2=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \;\to\; b=\frac{5}{4}.$$

Радиус граничной окружности равен $\left|-\dfrac{i}{2}+i\dfrac{5}{4}\right|=\dfrac{3}{4}$, а уравнение окружности имеет вид $\left|w+i\dfrac{5}{4}\right|=\dfrac{3}{4}$.

Внутренняя точка $z=\dfrac{i}{2}$ заданного полукруга переходит в точку $w\left(z=\dfrac{i}{2}\right)=0$, являющуюся внутренней точкой двуугольника (Рис.40.4).

3.4.2 Занятие 41

Задача 41.1 (№2.24(1) [2]). Найти точку, симметричную с точкой $2+i$ относительно окружности $|z|=1$.

Р е ш е н и е:

Если точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности $|z-a|=R$, то

$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}.$$

По условиям задачи $z_1 = 2+i$, $a=0$ и $R=1$. Тогда

$$z_2 = \frac{1}{\overline{2+i}} = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + i\,\frac{1}{5}.$$

О т в е т:

$$z_2 = \frac{2}{5} + i\,\frac{1}{5}$$

Задача 41.2 (№2.28(1) [2]). Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы $w(i)=0$ и $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е:

Требуется найти функцию, которая переводит верхнюю полуплоскость (круг бесконечно большого радиуса) в круг единичного радиуса. Функция должна удовлетворять двум дополнительным условиям.

Решение ищем в виде дробно-линейной функции $w(z) = \lambda\,\dfrac{z-a}{z-b}$, имеющей три параметра.

Условие $w(i)=0$ будет выполнено, если параметр $a=i$. То есть,

$$w(z) = \lambda\,\frac{z-i}{z-b}.$$

В комплексной плоскости z точки $z=i$ и $z=-i$ является симметричными относительно границы полуплоскости. Точки $w(i)$ и $w(-i)$ в комплексной плоскости w будут симметричны относительно окружности $|w|=1$ (свойство дробно-линейной функции). Так как $w(i)=0$, то должно быть выполнено равенство $w(-i)=\infty$. Поэтому, параметр $b=-i$. То есть,

$$w(z) = \lambda\,\frac{z-i}{z+i}.$$

Граничные точки в плоскости z (например точка $z=0$) переходят в граничные точки $|w|=1$ в плоскости w.

Тогда $|w(0)| = \left|\lambda \dfrac{0-i}{0+i}\right| = |\lambda| = 1$. То есть, $\lambda = e^{i\varphi}$ и

$$w(z) = e^{i\varphi}\,\frac{z-i}{z+i}\,.$$

Так как $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$, то :

$$w'(z) = \left(e^{i\varphi}\,\frac{z-i}{z+i}\right)' = e^{i\varphi}\,\frac{2i}{(z+i)^2} \;\to\; w'(i) = e^{i\varphi}\,\frac{1}{2i} \;\to$$

$$\to\; \arg w'(i) = \arg\left(e^{i\varphi}\,\frac{1}{2i}\right) = \varphi - \frac{\pi}{2} \;\to\; \varphi = 0\,.$$

Искомая функция имеет вид

$$w(z) = \frac{z-i}{z+i}\,.$$

О т в е т:

$$w(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

- -

Задача 41.3 (№2.31 [2]). Отобразить круг $|z-4i|<2$ на полуплоскость $v>u$ так, чтобы центр круга перешёл в точку -4, а точка окружности $2i$ перешла в начало координат.

Р е ш е н и е:

Используем дробно-линейную функцию $w(z) = \lambda\,\dfrac{z-a}{z-b}$, для отображения круга конечного радиуса на полуплоскость (круг бесконечно большого радиуса). Параметры λ, a и b выберем тка, чтобы выполнялись заданные дополнительные условия.

Условие $w(2i)=0$ будет выполнено, если параметр $a=2i$. То есть,

$$w(z) = \lambda\,\frac{z-2i}{z-b}\,.$$

Условие $w(4i)=-4$ приводит к равенству

$$w(4i) = \lambda\,\frac{4i-2i}{4i-b} = -4 \;\to\; \lambda = -8 - i2b\,.$$

То есть,

$$w(z) = -\,(8+i2b)\,\frac{z-2i}{z-b}\,.$$

В комплексной плоскости z относительно окружности $|z-4i|=2$ для точки $z=2i$ симметричной является сама точка $z=2i$, а для точки $z=4i$ (центр заданного круга) симметричной является точка $z=\infty$. Образы этих двух точек в комплексной плоскости w будут симметричны относительно границы полуплоскости $v>u$. Так как $w(4i)=-4$, то симметричной для точки $w=-4$ относительно прямой $v=u$ является точка $w=-4i$. Тогда,

$$w(z=\infty)=-(8+i2b)\left.\frac{z-2i}{z-b}\right|_{z=\infty}=-8-i2b\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ -8-i2b=-4i\ \rightarrow\ b=2+4i\,.$$

Искомая функция имеет вид

$$w(z)=4\,\frac{iz+2}{-z+2+4i}\,.$$

О т в е т:

$$w(z)=4\,\frac{iz+2}{-z+2+4i}$$

- -

Задача 41.4 (№2.87(1) [2]). Найти функцию $w(z)$, отображающую полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, на верхнюю полуплоскость при условиях $w(-1)=0$, $w(0)=1$, $w(1)=\infty$.

Р е ш е н и е:

Заданная область $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ является двуугольником с вершинами в точках $z=-1$ и $z=1$. Углы при вершинах двуугольника равны $\dfrac{\pi}{2}$.

Используем дробно-линейную функцию $w_1(z)=\lambda\,\dfrac{z-a}{z-b}$, имеющую три параметра.

Заданные в условиях задачи три дополнительные условия будут выполнены, если :

$$w_1(-1)=0\ \rightarrow\ a=-1\ \rightarrow\ w_1(z)=\lambda\,\frac{z+1}{z-b}\,;$$
$$w_1(1)=\infty\ \rightarrow\ b=1\ \rightarrow\ w_1(z)=\lambda\,\frac{z+1}{z-1}\,;$$
$$w_1(0)=1\ \rightarrow\ \lambda=-1\ \rightarrow\ w_1(z)=\frac{z+1}{1-z}\,.$$

Функция $w_1(z)=\dfrac{z+1}{1-z}$ осуществляет конформное отображение заданного полукруга на четверть плоскости $(u_1>0\,,\ v_1>0)$ в комплексной плоскости $w_1=u_1+i\,v_1$.

В полуплоскости диапазон изменения аргументов комплексных чисел в два раза больше диапазона изменения аргументов комплексных чисел в четверти плоскости w_1. Степенная функция $w = w_1^2$ увеличивает диапазон изменения аргументов комплексных чисел в два раза.

Искомая функция имеет вид

$$w(z) = w_1^2(z) = \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2 .$$

О т в е т:

$$w(z) = \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2$$

- -

Задача 41.5 (№2.17 [2]). Найти дробно-линейные функции, переводящие точки -1, i, $1+i$ соответственно в точки :

1) 0, $2i$, $1-i$;

2) i, ∞, 1.

Р е ш е н и е:

Дробно-линейная функция $w(z) = \lambda \dfrac{z-a}{z-b}$ имеет три параметра. Заданные в задаче дополнительные условия соответствия трёх пар точек однозначно определяют параметры дробно-линейной функции.

$$1)\quad w(-1) = 0 \;\to\; a = -1 \;\to\; w(z) = \lambda \frac{z+1}{z-b};$$

$$w(i) = 2i \;\to\; \lambda = -1-b-ib+i \;\to\; w(z) = (-1-b-ib+i)\frac{z+1}{z-b};$$

$$w(1+i) = 1-i \;\to\; b = \frac{1+5i}{4} \;\to\; w(z) = \frac{-2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

$$2)\quad w(i) = \infty \;\to\; b = i \;\to\; w(z) = \lambda \frac{z-a}{z-i};$$

$$w(1+i) = 1 \;\to\; \lambda = \frac{1}{1-a+i} \;\to\; w(z) = \frac{1}{1-a+i}\frac{z-a}{z-i};$$

$$w(-1) = i \;\to\; a = 3i \;\to\; w(z) = \frac{1+2i}{5}\frac{z-3i}{z-i} = \frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}.$$

О т в е т:

$$1)\quad w(z) = \frac{-2i(z+1)}{4z-1-5i};$$

$$2)\quad w(z) = \frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}.$$

- -

Канонические формы дробно-линейной функции.

Дробно-линейная функция $w(z)$ заданием соответствия трём различным точкам плоскости z (z_1, z_2, z_3) трёх различных точек плоскости w $(w_1 = w(z_1), w_2 = w(z_2), w_3 = w(z_3))$ однозначно определяется неявным выражением

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Дробно-линейное преобразование с одной неподвижной точкой z_0 называется параболическим. Параболическое преобразование можно записать в канонической форме

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h,$$

если $z_0 \neq \infty$, или $w = k\,z + h$, если $z_0 = \infty$.

Дробно-линейное преобразование с двумя неподвижными точкками z_1 и z_2 в канонической форме имеет вид

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

если $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$, или $w - z_1 = k\,(z - z_1)$, если $z_2 = \infty$. Преобразование с двумя различными неподвижными точками называется гиперболическим, если $k > 0$, и эллиптическим, если $k = e^{i\,\alpha}$ $(\alpha \neq 0 -$ действительное число $)$.

- -

Задача 41.6 (№2.18 [2]). Найти дробно-линейные функции, переводящие точки -1, ∞, i соответственно в точки :

1) i, 1, $1 + i$;

2) ∞, i, 1;

3) 0, ∞, 1.

Р е ш е н и е:

Дробно-линейная функция $w(z) = \lambda\,\dfrac{z - a}{z - b}$ имеет три параметра. Заданные в задаче дополнительные условия соответствия трёх пар точек однозначно определяют параметры дробно-линейной функции.

$$1)\quad w(\infty) = 1 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \;\rightarrow\; w(z) = \frac{z - a}{z - b};$$

$$w(-1) = i \;\rightarrow\; b = -1 - i\,(1 + a) \;\rightarrow\; w(z) = \frac{z - a}{z + 1 + i\,(1 + a)};$$

$$w(i) = 1 + i \;\rightarrow\; a = -2 - i \;\rightarrow\; w(z) = \frac{z + 2 + i}{z + 2 - i}.$$

2) $w(-1)=\infty \;\to\; b=-1 \;\to\; w(z)=\lambda\dfrac{z-a}{z+1}$;

$w(\infty)=i \;\to\; \lambda=i \;\to\; w(z)=i\dfrac{z-a}{z+1}$;

$w(i)=1 \;\to\; a=-1+2i \;\to\; w(z)=\dfrac{iz+2+i}{z+1}$.

3) $w(\infty)=\infty-$ неподвижная точка $\;\to\; w(z)=kz+h$;

$w(-1)=0 \;\to\; k=h \;\to\; w(z)=hz+h$;

$w(i)=1 \;\to\; h=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2} \;\to\; w(z)=\dfrac{1-i}{2}(z+1)$.

О т в е т:

$$1)\quad w(z)=\frac{-2i(z+1)}{4z-1-5i}\,;$$

$$2)\quad w(z)=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}\,;$$

$$3)\quad w(z)=\frac{1-i}{2}(z+1)\,.$$

- -

Задача 41.7 (№2.24(2) [2]). Найти точку, симметричную с точкой $2+i$ относительно окружности $|z-i|=3$.

Р е ш е н и е:

Если точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности $|z-a|=R$, то

$$z_2=a+\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}\,.$$

По условиям задачи $z_1=2+i$, $a=i$ и $R=3$. Тогда

$$z_2=i+\frac{9}{\overline{2+i-i}}=i+\frac{9}{2}\,.$$

О т в е т:

$$z_2=\frac{9}{2}+i$$

- -

Задача 41.8 (№2.28(3) [2]). Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы

$$w(a+ib)=0 \quad\text{и}\quad \arg w'(a+ib)=\theta \;\; (b>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Требуется найти функцию, которая переводит верхнюю полуплоскость (круг бесконечно большого радиуса) в круг единичного радиуса. Функция должна удовлетворять двум дополнительным условиям.

Решение ищем в виде дробно-линейной функции $w(z) = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, имеющей три параметра.

Условие $w(a+ib) = 0$ будет выполнено, если параметр $\alpha = a + ib$. То есть,

$$w(z) = \lambda \frac{z-a-ib}{z-\beta}.$$

В комплексной плоскости z точки $z = a+ib$ и $z = a-ib$ является симметричными относительно границы полуплоскости. Точки $w(a+ib)$ и $w(a-ib)$ в комплексной плоскости w будут симметричны относительно окружности $|w| = 1$ (свойство дробно-линейной функции). Так как $w(a+ib) = 0$, то должно быть выполнено равенство $w(a-ib) = \infty$. Поэтому, параметр

$\beta = a - ib$. То есть,

$$w(z) = \lambda \frac{z-a-ib}{z-a+ib}.$$

Граничные точки в плоскости z (например точка $z = 0$) переходят в граничные точки $|w| = 1$ в плоскости w.

Тогда $|w(0)| = \left|\lambda \dfrac{-a-ib}{-a+ib}\right| = |\lambda| = 1$. То есть, $\lambda = e^{i\varphi}$ и

$$w(z) = e^{i\varphi} \frac{z-a-ib}{z-a+ib}.$$

Так как $\arg w'(a+ib) = \theta$, то :

$$w'(z) = \left(e^{i\varphi} \frac{z-a-ib}{z-a+ib}\right)' = e^{i\varphi} \frac{i2b}{(z-a+ib)^2} \to w'(a+ib) = e^{i\varphi} \frac{1}{i2b} \to$$

$$\to \arg w'(a+ib) = \arg\left(e^{i\varphi} \frac{1}{i2b}\right) = \varphi - \frac{\pi}{2} \to \varphi = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Искомая функция имеет вид

$$w(z) = e^{i(\theta+\pi/2)} \frac{z-a-ib}{z-a+ib}.$$

О т в е т:

$$w(z) = e^{i(\theta+\pi/2)} \frac{z-a-ib}{z-a+ib}$$

- -

Задача 41.9 (№2.33 [2]). Найти центр w_0 и радиус R окружности, на которую функция

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

отображает действительную ось $(\operatorname{Im} z_2 \neq 0)$.

Р е ш е н и е:

Образы точек z_2 и $\overline{z_2}$ должны быть симметричны относительно искомой окружности. Так как $w(z_2) = \infty$, то $w(\overline{z_2}) = w_0$ — центр искомой окружности.

Итак

$$w_0 = \frac{\overline{z_2} - z_1}{\overline{z_2} - z_2} = i\,\frac{\overline{z_2} - z_1}{2\operatorname{Im} z_2}.$$

Точки действительной оси, например точка $z = \operatorname{Re} z_2$, отображаются в точки окружности $|w - w_0| = R$. Следовательно,

$$R = |w(\operatorname{Re} z_2) - w_0| = \left|\frac{\operatorname{Re} z_2 - z_1}{-i\,\operatorname{Im} z_2} - i\,\frac{\overline{z_2} - z_1}{2\operatorname{Im} z_2}\right| =$$

$$= \left|\frac{z_1 - \operatorname{Re} z_2 - i\,\operatorname{Im} z_2}{i\,2\operatorname{Im} z_2}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{2\,|\operatorname{Im} z_2|}.$$

О т в е т:

$$w_0 = i\,\frac{\overline{z_2} - z_1}{2\operatorname{Im} z_2}$$

$$R = \frac{|z_1 - z_2|}{2\,|\operatorname{Im} z_2|}$$

- -

Задача 41.10 (№2.37 [2]). Отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы :

1) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$;

2) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

3) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$;

4) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$.

Р е ш е н и е:

1) Решение ищем в виде дробно-линейной функции $w(z) = \lambda\,\frac{z - a}{z - b}$, имеющей три параметра.

Условие $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$ будет выполнено, если параметр $a=\frac{1}{2}$. То есть,

$$w(z)=\lambda\frac{z-\frac{1}{2}}{z-b}.$$

Точки $z=\frac{1}{2}$ и $z=2$ является симметричными относительно окружности $|z|=1$. Точки $w\left(\frac{1}{2}\right)$ и $w(2)$ будут симметричны относительно окружности $|w|=1$. Так как $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$, то должно быть выполнено равенство $w(2)=\infty$. Поэтому, параметр $b=2$. То есть,

$$w(z)=\lambda\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}.$$

Граничные точки $|z|=1$ в плоскости z (например точка $z=1$) переходят в граничные точки $|w|=1$ в плоскости w.

Тогда $|w(1)|=\frac{|\lambda|}{2}\ \to\ |\lambda|=2$. То есть, $\lambda=2e^{i\varphi}$ и

$$w(z)=e^{i\varphi}\frac{2z-1}{z-2}.$$

Так как $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, то :

$$w'(z)=\left(e^{i\varphi}\frac{2z-1}{z-2}\right)'=-e^{i\varphi}\frac{3}{(z-2)^2}\ \to\ w'\left(\frac{1}{2}\right)=-e^{i\varphi}\frac{4}{3}\ \to$$
$$\to\ \arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg\left(-e^{i\varphi}\frac{4}{3}\right)=\varphi-\pi\ \to\ \varphi=\pi.$$

Искомая функция имеет вид

$$w(z)=e^{i\pi}\frac{2z-1}{z-2}=\frac{2z-1}{2-z}.$$

2) Решение ищем в виде дробно-линейной функции $w(z)=\lambda\frac{z-a}{z-b}$, имеющей три параметра.

Условие $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$ будет выполнено, если параметр $a=\frac{i}{2}$. То есть,

$$w(z)=\lambda\frac{z-\frac{i}{2}}{z-b}.$$

Точки $z=\frac{i}{2}$ и $z=i2$ является симметричными относительно окружности $|z|=1$. Точки $w\left(\frac{i}{2}\right)$ и $w(2i)$ будут симметричны относительно окружности $|w|=1$. Так как $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, то должно быть выполнено равенство $w(i2)=\infty$. Поэтому, параметр $b=i2$. То есть,

$$w(z)=\lambda\frac{z-\frac{i}{2}}{z-i2}.$$

Граничные точки $|z|=1$ в плоскости z (например точка $z=i$) переходят в граничные точки $|w|=1$ в плоскости w.

Тогда $|w(i)|=\frac{|\lambda|}{2}\ \rightarrow\ |\lambda|=2$. То есть, $\lambda=2\,e^{i\varphi}$ и

$$w(z)=e^{i\varphi}\frac{2z-i}{z-i2}.$$

Так как $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, то :

$$w'(z)=\left(e^{i\varphi}\frac{2z-i}{z-i2}\right)'=-e^{i\varphi}\frac{i3}{(z-i2)^2}\ \rightarrow\ w'\left(\frac{i}{2}\right)=e^{i\varphi}\frac{i4}{3}\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\arg\left(e^{i\varphi}\frac{i4}{3}\right)=\varphi+\frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ \varphi=0.$$

Искомая функция имеет вид

$$w(z)=\frac{2z-i}{z-i2}.$$

3) Так как $w(0)=0$, то $z_1=0$ является неподвижной точкой.

Для точки $z=0$ симметричной относительно окружности $|z|=1$ является точка $z=\infty$. Для точки $w=0$ симметричной относительно окружности

$|w| = 1$ является точка $w = \infty$. То есть, $w(\infty) = \infty$ и точка $z_2 = \infty$ является второй неподвижной точкой искомой функции. Следовательно, искомая функция имеет вид $w(z) = k\,z + h$.

Условие $w(0) = 0$ будет выполнено, если параметр $h = 0$. То есть, $w(z) = k\,z$.

Граничные точки $|z| = 1$ в плоскости z (например точка $z = 1$) переходят в граничные точки $|w| = 1$ в плоскости w.

Тогда $|w(1)| = |k| = 1$. То есть, $k = e^{i\,\varphi}$ и $w(z) = e^{i\,\varphi}\,z$.

Так как $\arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$, то :

$$w'(z) = e^{i\,\varphi} \;\to\; w'(0) = e^{i\,\varphi} \;\to\; \arg w'(0) = \varphi \;\to\; \varphi = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Искомая функция имеет вид $w(z) = e^{-i\,\pi/2}\,z = -i\,z$.

4) Так как $w(a) = a$, то $z_1 = a$ является неподвижной точкой.

Для точки $z = a$ симметричной относительно окружности $|z| = 1$ является точка $z = \dfrac{1}{\overline{a}}$. Для точки $w = a$ симметричной относительно окружности $|w| = 1$ является точка $w = \dfrac{1}{\overline{a}}$. То есть, $w\left(\dfrac{1}{\overline{a}}\right) = \dfrac{1}{\overline{a}}$ и точка $z_2 = \dfrac{1}{\overline{a}}$ является второй конечной неподвижной точкой искомой функции. Следовательно, искомая функция имеет канонический вид

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2} \;\to\; \frac{w - a}{\overline{a}w - 1} = k\,\frac{z - a}{\overline{a}z - 1}\,.$$

Граничные точки $|z| = 1$ в плоскости z (например точка $z = e^{i\,\arg(a)}$) переходят в граничные точки $|w| = 1$ в плоскости w.

Пусть $w\left(e^{i\,\arg(a)}\right) = e^{i\,\psi}$. Тогда

$$\frac{e^{i\,\psi} - |a|\;e^{i\,\arg(a)}}{|a|\;e^{-i\,(\arg(a) - \psi)} - 1} = k\,e^{i\,\arg(a)}\,\frac{1 - |a|}{|a| - 1} \;\to$$

$$\to\; k = e^{i\,(\arg(a) - \psi)}\,\frac{|a| - e^{i\,(\psi - \arg(a))}}{|a| - e^{i\,(\arg(a) - \psi)}} \;\to$$

$$\to |k| = \frac{\left||a| - e^{i(\psi - \arg(a))}\right|}{\left||a| - e^{i(\arg(a) - \psi)}\right|} =$$

$$= \frac{||a| - \cos(\psi - \arg(a)) - i\sin(\psi - \arg(a))|}{||a| - \cos(\psi - \arg(a)) + i\sin(\psi - \arg(a))|} =$$

$$= \sqrt{\frac{(|a| - \cos(\psi - \arg(a)))^2 + \sin^2(\psi - \arg(a))}{(|a| - \cos(\psi - \arg(a)))^2 + \sin^2(\psi - \arg(a))}} = 1\,.$$

То есть, $k = e^{i\varphi}$ и $\dfrac{w-a}{\overline{a}w-1} = e^{i\varphi}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$.

Так как $\arg w'(a) = \alpha$, то :

$$\left(\frac{w-a}{\overline{a}w-1}\right)' = e^{i\varphi}\left(\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right)' \rightarrow w'(z) = e^{i\varphi}\left(\frac{\overline{a}w(z)-1}{\overline{a}z-1}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow w'(a) = e^{i\varphi}\left(\frac{\overline{a}w(a)-1}{\overline{a}a-1}\right)^2 = e^{i\varphi} \rightarrow$$

$$\rightarrow \arg w'(a) = \arg e^{i\varphi} = \varphi \rightarrow \varphi = \alpha\,.$$

Искомая функция $w(z)$ определяется соотношением

$$\frac{w-a}{\overline{a}w-1} = e^{i\alpha}\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\,.$$

О т в е т:

1) $w(z) = \dfrac{2z-1}{2-z}$

2) $w(z) = \dfrac{2z-i}{z-i2}$

3) $w(z) = -i\,z$

4) $\dfrac{w-a}{\overline{a}w-1} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$

- -

3.4.3 Занятие 42

Задача 42.1 (№2.106 [2]). Найти преобразование полярной сетки $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ с помощью функции Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Р е ш е н и е:

$$w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left\{z = r\,e^{i\varphi}\right\} = \frac{1}{2}\left(r\cos\varphi + ir\sin\varphi + \frac{1}{r}\cos\varphi - \right.$$
$$\left. -i\frac{1}{r}\sin\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = u + iv\,,$$
$$\text{где}\quad u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\,,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,.$$

Пусть $|z| = r = R$. Тогда $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right)\cos\varphi\,; \\ v = \dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right)\sin\varphi\,,\ \varphi - \text{ параметр.} \end{cases}$

Если $R \neq 1$, то

$$\frac{u^2}{\left(\dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right)\right)^2} = 1 \ - \ \text{эллипсы.}$$

Если $R = 1$, то $\begin{cases} u = \cos\varphi\,; \\ v = 0 \end{cases}$ — отрезок прямой линии $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$.

Пусть $\arg z = \varphi = \alpha$. Тогда

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha\,; \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha\,,\ r \in (0, +\infty) - \text{ параметр.} \end{cases}$$

Если $\alpha \neq 0\,,\ \pi\,,\ \pm\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\begin{cases} \dfrac{2u}{\cos\alpha} = r + \dfrac{1}{r}\,; \\ \dfrac{2v}{\sin\alpha} = r - \dfrac{1}{r} \end{cases} \quad \to \ \frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1 \ - \ \text{гиперболы.}$$

Если $\alpha = 0$, то

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right) \ , \ r \in (0, +\infty) \ ; \\ v = 0 \end{cases} \quad - \quad \text{прямая линия} \ \ (1 \leqslant u < +\infty).$$

Если $\alpha = \pi$, то

$$\begin{cases} u = -\dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right) \ , \ r \in (0, +\infty) \ ; \\ v = 0 \end{cases} \quad - \quad \text{прямая линия} \ \ (-\infty < u \leqslant -1).$$

Если $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\begin{cases} u = 0 \ ; \\ v = \pm\dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right) \ , \ r \in (0, +\infty) \end{cases} \quad - \quad \text{прямая линия} \ \ (-\infty < v < +\infty).$$

- -

Задача 42.2 (№2.146(1,3,5) [2]). Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = e^z$:

1) прямоугольная сетка $x = C, \ y = C$;

3) полоса $\alpha < y < \beta \ \ (0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$;

5) полуполоса $-\infty < x < 0$, $0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

Р е ш е н и е:

$$w(z) = e^z = \{z = x + i\,y\} = e^x \cos y + i\,e^x \sin y = u + iv \ ,$$

где $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

1) Преобразование прямоугольной сетки $x = C, \ y = C$.

Пусть $x = C$. Тогда

$$\begin{cases} u = e^C \cos y \ ; \\ v = e^C \sin y \ , \ y - \ \text{параметр} \end{cases} \quad \to \ u^2 + v^2 = e^{2C} \ - \ \text{окружности.}$$

Пусть $y = C$. Тогда

$$\begin{cases} u = e^x \cos C \ ; \\ v = e^x \sin C \ , \ x \in (-\infty, +\infty) - \ \text{параметр} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \ \frac{v}{u} = \operatorname{tg} C - \ \text{лучи из начала координат под углом } C \text{ к оси } u \, .$$

3) Преобразование полосы $\alpha < y < \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$.

Границей заданной области являются две прямые линии $y = \alpha$ и $y = \beta$. Функция $w = e^z$ преобразует эти прямые в лучи, исходящие из точки $w = 0$ и имеющие с осью u углы α и β $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$, соответственно. Внутренние точки полосы переходят в точки, лежащие между этими лучами.

Функция $w = e^z$ переводит заданную полосу в угловой сектор, ограниченный двумя лучами из точки $w = 0$.

5) Преобразование полуполосы $-\infty < x < 0\,,\ 0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

Границей заданной области являются прямая линия $y = 0\,,\ -\infty < x < 0\,,$ прямая линия $y = \alpha \leqslant 2\pi\,,\ -\infty < x < 0$ и отрезок прямой $x = 0\,,\ 0 < y < \alpha$. Функция $w = e^z$ преобразует эти линии, соответственно, в отрезок прямой $v = 0\,,\ 0 < u < 1$, в отрезок луча $\dfrac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha$, исходящего из точки $w = 0$, и дугу окружности $u^2 + v^2 = 1$ (см. предыдущие пункты). Внутренние точки полуполосы переходят в точки, лежащие внутри кругового сектора.

- -

Задача 42.3 (№2.150(1,3) [2]). Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \cos z$:

1) прямоугольная сетка $x = C,\ y = C$;

3) полуполоса $0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,,\ y > 0$.

Р е ш е н и е:

$$w\,(z) = \cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} = \{z = x + i\,y\} = \frac{e^{-y}\,e^{i\,x} + e^{y}\,e^{-i\,x}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\cos x + i\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\sin x = \operatorname{ch} y\,\cos x - i\,\operatorname{sh} y\,\sin x = u + iv\ ,$$

где $u = \operatorname{ch} y\,\cos x\ ,\ v = -\operatorname{sh} y\,\sin x$.

1) Преобразование прямоугольной сетки $x = C,\ y = C$.

Пусть $x = C$. Тогда

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch} y\,\cos C\ ; \\ v = -\operatorname{sh} y\,\sin C\ ,\ y - \text{ параметр} \end{cases} \quad \to\ \left\{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1\right\}\ \to$$

$$\to \quad \text{при} \quad \cos C \neq 0 \quad \text{и} \quad \sin C \neq 0 \quad \frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1 \ - \quad \text{гиперболы.}$$

Пусть $y = C$. Тогда

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch} C\,\cos x\ ; \\ v = -\operatorname{sh} C\,\sin x\ ,\ x \in (-\infty, +\infty) - \text{ параметр} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad \text{при} \quad C \neq 0 \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1 \quad - \quad \text{эллипсы.}$$

3) Преобразование полуполосы $0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,,\ y > 0\,.$

Границей заданной области являются прямая линия $x = \dfrac{\pi}{2}\,,$ $0 < y \leqslant +\infty\,,$ прямая линия $x = 0\,,\ 0 < y < +\infty$ и отрезок прямой $y = 0\,,$ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,.$ Функция $w = \cos z$ преобразует эти линии, соответственно, в прямую линию $\begin{cases} u = \operatorname{ch} y \cos x|_{x=\pi/2\,,\ y>0} = 0\,; \\ v = -\operatorname{sh} y \sin x|_{x=\pi/2\,,\ y>0} = -\operatorname{sh} y < 0 \end{cases}$, в прямую линию $\begin{cases} u = \operatorname{ch} y \cos x|_{x=0\,,\ y>0} = \operatorname{ch} y,\ y > 0\,; \\ v = -\operatorname{sh} y \sin x|_{x=0\,,\ y>0} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 \leqslant u < +\infty\,; \\ v = 0 \end{cases}$ и в отрезок прямой $\begin{cases} u = \operatorname{ch} y \cos x|_{0<x<\pi/2\,,\ y=0} = \cos x\,; \\ v = -\operatorname{sh} y \sin x|_{0<x<\pi/2\,,\ y=0} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 < u < 1\,; \\ v = 0 \end{cases}$.

Внутренняя точка $z = \dfrac{\pi}{4} + i$ заданной полуполосы переходит в точку $w\left(\dfrac{\pi}{4} + i\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\operatorname{ch} 1 - i \operatorname{sh} 1)$, лежащую внутри квадранта $u > 0\,,\ v < 0\,.$

Образом заданной полуполосы при отображении $w = \cos z$ является четверть плоскости $u > 0\,,\ v < 0\,.$

- -

Задача 42.4 (№2.156 [2]). Отобразить полосу, ограниченную прямыми $y = x\,,\ y = x + h\,,$ на верхнюю полуплоскость.

Р е ш е н и е:

Функция $w_1(z) = z\,e^{-i\,\pi/4}$ осуществляет поворот заданной полосы на угол равный $\dfrac{\pi}{4}$ по ходу часовой стрелки. В комплексной плоскости w_1 появляется горизонтальная полоса шириной $\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$ с границами $\operatorname{Im} w_1 = 0\,,\ \operatorname{Im} w_1 = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}\,.$

Функция $w_2(z) = \pi/h\sqrt{2}\,w_1(z)$ меняет ширину полученной полосы. В комплексной плоскости w_2 появляется горизонтальная полоса шириной π с границами $\operatorname{Im} w_2 = 0$ и $\operatorname{Im} w_2 = \pi\,.$

Тогда, функция

$$w(z) = e^{w_2} = e^{\pi/h\sqrt{2}\,w_1} = e^{\pi/h\sqrt{2}\,z\,e^{-i\,\pi/4}} = e^{\pi/h\,z\,(1-i)}$$

является искомой функцией, так как переводит заданную полосу на верхнюю полуплоскость.

О т в е т:

$$w(z) = e^{\pi/h\,z\,(1-i)}$$

- -

Задача 42.5 (№2.158 [2]). Отобразить круговую луночку, ограниченную окружностями $|z| = 2$, $|z-1| = 1$, на верхнюю полуплоскость.

Р е ш е н и е:

Используем дробно-линейную функцию $w_1(z) = \lambda \dfrac{z-a}{z-b}$, имеющую три параметра. Параметры выберем так, чтобы выполнялись следующие дополнительные условия.

Пусть $w_1(0) = 0$. Это условие будет выполнено, если параметр $a = 0$.

То есть,

$$w_1(z) = \lambda \frac{z}{z-b}.$$

Пусть $w_1(2) = \infty$. Это условие будет выполнено, если параметр $b = 2$. То есть,

$$w_1(z) = \lambda \frac{z}{z-2}.$$

Пусть $w_1(-2) = i\pi$. Это условие будет выполнено, если параметр $\lambda = i\,2\pi$. То есть,

$$w_1(z) = i \frac{2\pi z}{z-2}.$$

Функция $w_1(z) = i \dfrac{2\pi z}{z-2}$ отображает заданную круговую луночку на горизонтальную полосу шириной π с границами $\operatorname{Im} w_1 = 0$, $\operatorname{Im} w_1 = \pi$.

Тогда, функция

$$w(z) = e^{w_1(z)} = e^{i\,2\pi z/(z-2)}$$

является искомой функцией, так как переводит исходную область на верхнюю полуплоскость.

О т в е т:

$$w(z) = e^{i\,2\pi z/(z-2)}$$

- -

3.5 Интегрирование функции комплексного переменного

3.5.1 Занятие 43

Пусть C – заданный гладкий контур в комплексной плоскости z. В каждой точке контура C определена функция $f(z)$.

Разобъём контур C точками z_i $(z_i \in C)$ на конечное число частей (Рис.43.1). Через $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ обозначим разности конечных и начальных точек i–ой части контура C. В каждой части контура выберем произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Составим конечную сумму

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\,\Delta z_i.$$

Определение. Если последовательность $\{\sigma\}$, возникающая при бесконечном измельчении контура C на части имеет предел, который не зависит от выбора точек z_i и ξ_i, то этот предел называют интегралом от функции $f(z)$ по контуру C и обозначают символом

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C (u + i\,v)\,(dx + i\,dy) = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i \int\limits_C v\,dx + u\,dy\,.$$

Действительная часть и мнимая часть интеграла являются криволинейными интегралами 2-ого рода.

Интегральная теорема Коши. Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области D, ограниченной контуром C, то

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 0\,.$$

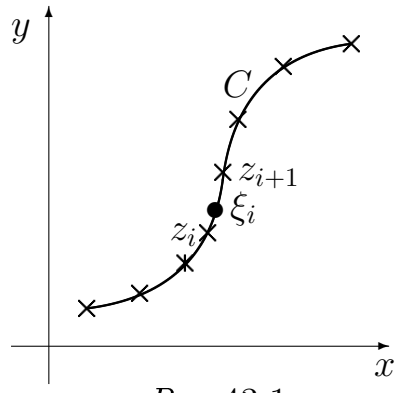

*Рис.*43.1

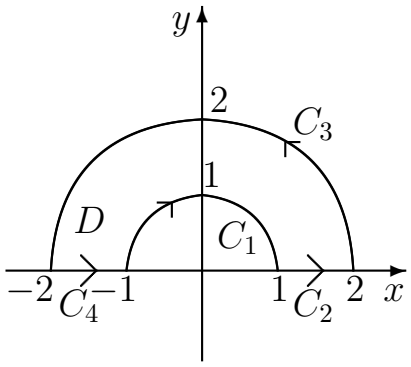

*Рис.*43.2

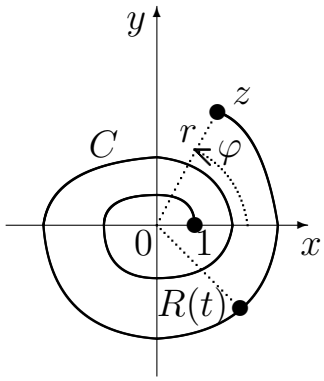

*Рис.*43.3

Задача 43.1 (№3.2(1) [2]). Пусть $C-$ простой замкнутый контур, ограничивающий площадь S. Доказать равенство

$$\oint\limits_C x\,dz = i\,S\,.$$

(На контуре C выбрано положительное направление обхода.)

Р е ш е н и е:

По замкнутому контуру C интегрируется функция $f(z) = x \;\to$ $\to\; u = x\;,\; v = 0$. Тогда,

$$\oint\limits_C x\,dz = \oint\limits_C u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_C v\,dx + u\,dy = \{u = x\;,\; v = 0\} =$$

$$= \oint\limits_C x\,dx + i\oint\limits_C x\,dy = \left\{\text{Формула Грина}: \quad \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \right.$$

$$\left. = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \right\} = \iint\limits_D 0\,dxdy + i\underbrace{\iint\limits_D 1\,dxdy}_{=S} = i\,S\,.$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C x\,dz = i\,S$$

Задача 43.2 (№3.6 [2]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{z}{\overline{z}}\,dz\,,$$

где $C-$ граница полукольца, изображенного на Рис.43.2.

Р е ш е н и е:

Интеграл вычисляется по замкнутому контуру $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, ограничивающему область D. Интегрируется по замкнутому контуру C функция $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}$, которая не является аналитической функцией в области D, так как производная $f_{\overline{z}} = -\dfrac{z}{(\overline{z})^2} \neq 0$ при $z \in D$. Поэтому, интегральная теорема Коши не применима.

Тогда,

$$\oint\limits_C \frac{z}{\overline{z}}\,dz = \int\limits_{C_1} \frac{z}{\overline{z}}\,dz + \int\limits_{C_2} \frac{z}{\overline{z}}\,dz + \int\limits_{C_3} \frac{z}{\overline{z}}\,dz + \int\limits_{C_4} \frac{z}{\overline{z}}\,dz =$$

$$= \Big\{\text{Параметризация контура } \ C_1 \ : \ z = e^{i\,t} \ , \ t \in [\pi\,,\,0] \ \to$$

$$\to \ dz = i\,e^{i\,t}dt \ , \ f(z) = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{e^{i\,t}}{e^{-i\,t}} = e^{i\,2t} \ ;$$

$$\text{Параметризация контура } \ C_2 \ : \ z = t \ , \ t \in [1\,,\,2] \ \to$$

$$\to \ dz = dt \ , \ f(z) = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{t}{t} = 1 \ ;$$

$$\text{Параметризация контура } \ C_3 \ : \ z = 2e^{i\,t} \ , \ t \in [0\,,\,\pi] \ \to$$

$$\to \ dz = i\,2e^{i\,t}dt \ , \ f(z) = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{2e^{i\,t}}{2e^{-i\,t}} = e^{i\,2t} \ ;$$

$$\text{Параметризация контура } \ C_4 \ : \ z = t \ , \ t \in [-2\,,\,-1] \ \to$$

$$\to \ dz = dt \ , \ f(z) = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{t}{t} = 1 \Big\} =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} e^{i\,2t}\,i\,e^{i\,t}\,dt + \int\limits_{1}^{2} dt + \int\limits_{0}^{\pi} e^{i\,2t}\,i\,2e^{i\,t}\,dt + \int\limits_{-2}^{-1} dt = \frac{1}{3}\,e^{i\,3t}\Big|_{t=0}^{t=\pi} + 2 =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}\,.$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \frac{z}{\overline{z}}\,dz = \frac{4}{3}$$

Задача 43.3 (№3.8(1) [2]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

по следующим контурам :

1) C – полуокружность $|z| = 1\,,\ y \geqslant 0\,,\ \sqrt{1} = 1\,.$

Р е ш е н и е:

По контуру C интегрируется многозначная функция

$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \big\{z = r\,e^{i\,\varphi}\big\} = \dfrac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\,(\varphi+2\pi k)/2}$, где $k = 0, 1\,.$ Дополнительное условие $\sqrt{1} = 1$ выполняется при $k = 0\,.$ То есть, $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\,\varphi/2}\,.$

Тогда,

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \Big\{\text{Параметризация контура } C \;:\; z = e^{i\,t}\;,\; t\in[0\,,\,\pi]\;\to$$

$$\to\; dz = i\,e^{i\,t}dt\;,\; f(z) = e^{-i\,t/2}\Big\} = \int\limits_0^{\pi} e^{-i\,t/2}\,i\,e^{i\,t}\,dt = 2\,e^{i\,t/2}\Big|_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= -2\,(1-i)\;.$$

О т в е т:

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2\,(1-i)$$

- -

Задача 43.4 (№3.18 [2]). Показать, что если путь не проходит через начало координат, то

$$\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k\,,$$

где $z = r\,e^{i\,\varphi}$ и $k-$ целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат (Рис.43.3).

Р е ш е н и е:

Пусть заданная функция $R(t)\,,\; t\in[0\,,\,\varphi+2\pi k]\;,\; R(0)=1\,,$

$R(\varphi+2\pi k)=r$ определяет вид контура интегрирования C .

Тогда,

$$\int\limits_C \frac{d\xi}{\xi} = \Big\{\text{Параметризация контура } C \;:\; \xi = R\,(t)\;e^{i\,t}\;,$$

$$t\in[0\,,\,\varphi+2\pi k]\;\to\; d\xi = \big(R'\,(t)\;e^{i\,t} + i\,R\,(t)\;e^{i\,t}\big)\;dt\Big\} =$$

$$= \int\limits_0^{\varphi+2\pi k} \frac{R'\,(t)+iR\,(t)}{R\,(t)}dt = \int\limits_0^{\varphi+2\pi k} d\,(\ln R\,(t)) + i\int\limits_0^{\varphi+2\pi k} dt = \ln r + i\varphi + i2\pi k.$$

О т в е т:

$$\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k$$

- -

Задача 43.5 (№3.20 [2]). Показать, что если $C-$ произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n-$ целое число, то

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0\ , & \text{если}\ \ n\neq -1\ ; \\ 2\pi i\ , & \text{если}\ \ n=-1\ ,\ a-\text{внутри}\ \ C\ ; \\ 0\ , & \text{если}\ \ n=-1\ ,\ a-\text{вне}\ \ C\ . \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

Функция $f(z)=(z-a)^n$ при $n<0$ не является аналитической функцией в точке $z=a$.

Пусть точка $z=a$ расположена вне замкнутого контура интегрирования C. Тогда выполнены условия интегральной теоремы Коши и при любых значения параметра n

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = 0\ .$$

Пусть точка $z=a$ расположена внутри замкнутого контура интегрирования C и параметр $n\geqslant 0$. Тогда выполнены условия интегральной теоремы Коши и

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = 0\ .$$

Пусть точка $z=a$ расположена внутри замкнутого контура интегрирования C и параметр $n<0$. Тогда

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = \Big\{\text{Параметризация контура}\ \ C\ :\ z-a=R(t)\,e^{i\,t}\ ,$$
$$t\in[0\,,\,2\pi]\ \to\ dz=\left(R'(t)+i\,R(t)\right)e^{i\,t}\,dt\Big\}=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(R^n(t)\ R'(t)+i\,R^{n+1}(t)\right)e^{i\,(n+1)t}\,dt=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} d\left(R^{n+1}(t)\,e^{i\,(n+1)t}\right)\ , & \text{если}\ \ n\neq -1\ ; \\ & = \\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R'(t)}{R(t)}+i\right)dt\ , & \text{если}\ \ n=-1 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 0\ , & \text{если}\ \ n\neq -1\ ; \\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} d\left(\ln R(t)\right)+i\int\limits_0^{2\pi} dt\ , & \text{если}\ n=-1 \end{cases}=\begin{cases} 0\ , & \text{если}\ \ n\neq -1\ ; \\ 2\pi i\ , & \text{если}\ \ n=-1 \end{cases}\ .$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0\ , & \text{если}\ \ n \neq -1\ ; \\ 2\pi i\ , & \text{если}\ \ n=-1\ ,\ a-\text{внутри}\ \ C\ ; \\ 0\ , & \text{если}\ \ n=-1\ ,\ a-\text{вне}\ \ C\ . \end{cases}$$

- -

Задача 43.6 (№3.4(1,2) [2]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_C |z|\,dz$$

по следующим путям :

1) по радиус-вектору точки $z = 2 - i$;

2) по полуокружности $|z| = 1\,,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало интегрирования в точке $z = 1$).

Р е ш е н и е:

По контуру C интегрируется функция $f(z) = |z| = \{z = x + iy\} =$
$= \sqrt{x^2+y^2} = u + i\,v$, где $u = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ v = 0\,.$

1) Контур $C-$ отрезок прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 2 - i\,.$

$$\int\limits_C |z|\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy = \left\{u = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ v = 0\right\} =$$

$$= \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + i\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dy = \{\text{Параметризация контура}\ \ C\ :$$

$$x = t\,,\ y = -\frac{t}{2}\ ,\ t \in [0\,,\,2]\ \rightarrow\ dx = dt\,,\ dy = -\frac{dt}{2}\right\} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^2 t\,dt -$$

$$- i\frac{\sqrt{5}}{4}\int\limits_0^2 t\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2 - i\right).$$

2) Контур $C-$ полуокружность $|z| = 1\,,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало интегрирования в точке $z = 1$).

$$\int\limits_C |z|\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy = \left\{u = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ v = 0\right\} =$$

$$= \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + i \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dy = \{\text{Параметризация контура } C:$$

$$x = \cos t\,,\ y = \sin t\,,\ t \in [0\,,\,\pi] \ \to\ dx = -\sin t\,dt\,,\ dy = \cos t\,dt\} =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt + i \int\limits_0^{\pi} \cos t\,dt = -2\,.$$

О т в е т:

$$1)\quad \int\limits_C |z|\,dz = \frac{\sqrt{5}}{2}\Big(2-i\Big)\,;$$

$$2)\quad \int\limits_C |z|\,dz = -2\,.$$

- -

Задача 43.7 (№3.8(2,5) [2]). Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

по следующим контурам :

2) по полуокружности $|z| = 1\,,\ y \geqslant 0\,,\ \sqrt{1} = -1$ ($z = 1-$ начальная точка контура C) ;

5) по окружности $|z| = 1\,,\ \sqrt{-1} = i$ ($z = -1$ является начальной точкой контура C) .

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = \sqrt{z} = \big\{z = r\,e^{i\,\varphi}\big\} = \sqrt{r}\,e^{i(\varphi+2\pi k)/2}$, где $k = 0\,,\,1\,.$

2) Интегрирование проводится по полуокружности $|z| = 1\,,\ y \geqslant 0$ ($z = 1-$ начальная точка контура C).

Дополнительное условие $\sqrt{1} = -1$ выполнено при $k = 1\,.$

То есть, $\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{i(\varphi/2+\pi)}$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \big\{\text{Параметризация контура } C:\ z = e^{i\,t}\,,\ t \in [0\,,\,\pi] \ \to$$

$$\to\ dz = i\,e^{i\,t}\,dt\big\} = \int\limits_0^{\pi} \frac{i\,e^{i\,t}\,dt}{e^{i(t/2+\pi)}} = -i \int\limits_0^{\pi} e^{i\,t/2}\,dt = -2\,e^{i\,t/2}\Big|_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= -2\Big(e^{i\,\pi/2} - 1\Big) = 2\,(1-i)\,.$$

5) Интегрирование проводится по окружности $|z| = 1$ ($z = -1$ является начальной точкой контура C).

Дополнительное условие $\sqrt{-1} = i$ выполнено при $k = 0$.

То есть, $\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2}$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \Big\{\text{Параметризация контура } C \,:\, z = e^{i\,t}\,,\ t \in [-\pi\,,\,\pi] \ \to$$

$$\to\ dz = i\,e^{i\,t}\,dt\Big\} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{i\,e^{i\,t}\,dt}{e^{i\,t/2}} = i\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\,t/2}\,dt = -2\,e^{i\,t/2}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} =$$

$$= 2\left(e^{i\,\pi/2} - e^{-i\,\pi/2}\right) = 2\,(i + i) = 4i\,.$$

О т в е т:

$$2)\ \int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\,(1 - i)\ ;$$

$$5)\ \int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 4i\,.$$

- -

Задача 43.8 (№3.13 [2]). Для каких α $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ существуют интегралы :

$$1)\ I_1 = \int\limits_C e^{-1/z}\,dz\ ;$$

$$2)\ I_p = \int\limits_C e^{-1/z^p}\,dz\ \ (p - \text{натуральное число})\,,$$

взятые по радиусу-вектору точки $z = e^{i\,\alpha}$?

Р е ш е н и е:

Контур $C-$ отрезок прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = e^{i\,\alpha}$.

$$1)\ I_1 = \int\limits_C e^{-1/z}\,dz = \Big\{\text{Параметризация контура } C \,:\, z = t\,e^{i\,\alpha}\,,$$

$$t \in [0,1] \to dz = e^{i\alpha}dt\Big\} = \int\limits_0^1 e^{-(e^{-i\alpha})/t}\,e^{i\alpha}dt = \int\limits_0^1 e^{(-\cos\alpha + i\,\sin\alpha)/t}\,e^{i\,\alpha}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{-(\cos\alpha)/t}\,e^{i\,((\sin\alpha)/t + \alpha)}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{-(\cos\alpha)/t} \underbrace{\left(\cos\left((\sin\alpha)/t+\alpha\right) + i\,\sin\left((\sin\alpha)/t+\alpha\right)\right)}_{\text{Модуль этого выражения ограничен.}} dt\,.$$

Полученный интеграл является несобственным интегралом 2-ого рода. Сходимость интеграла определяется поведением сомножителя $e^{-(\cos\alpha)/t}$ в подынтегральном выражении. Если $\cos\alpha \geqslant 0$, то данный несобственный интеграл 2-ого рода сходится (существует). Итак, интеграл I_1 существует при $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

$$2)\ \ I_p = \int\limits_C e^{-1/z^p}\,dz = \Big\{\text{Параметризация контура } C\ :\ z = t\,e^{i\,\alpha}\ ,$$

$$t \in [0,1] \to dz = e^{i\alpha}dt\Big\} = \int\limits_0^1 e^{-(e^{-ip\alpha})/t^p}\,e^{i\alpha}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{(-\cos p\alpha + i\,\sin p\alpha)/t^p}\,e^{i\,\alpha}\,dt = \int\limits_0^1 e^{-(\cos p\alpha)/t^p}\,e^{i\,((\sin p\alpha)/t^p+\alpha)}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{-(\cos p\alpha)/t^p}\,\left(\cos\left((\sin p\alpha)/t^p+\alpha\right) + i\,\sin\left((\sin p\alpha)/t^p+\alpha\right)\right)\,dt\,.$$

Полученный интеграл имеет особенность в точке $t = 0$ и является несобственным интегралом 2-ого рода. Сходимость интеграла определяется поведением сомножителя $e^{-(\cos p\alpha)/t^p}$ в подынтегральном выражении. Если $\cos p\alpha \geqslant 0$, то данный несобственный интеграл 2-ого рода сходится (существует).

О т в е т:

1) I_1 существует при $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$;

2) I_p существует при $\cos p\alpha \geqslant 0$.

Задача 43.9 (№3.19 [2]). Показать, что если путь не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + \pi k\,,$$

где $k -$ целое число.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим два способа решения задачи.

1) $\operatorname{Arctg}\xi = \{\text{см. № 1.77 [2]}\} = \dfrac{1}{2\,i}\operatorname{Ln}\dfrac{1+i\,\xi}{1-i\,\xi}$

$$(\operatorname{Arctg}\xi)' = \left(\frac{1}{2\,i}\operatorname{Ln}\frac{1+i\,\xi}{1-i\,\xi}\right)' = \frac{1}{1+\xi^2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int\limits_0^1 d\,(\operatorname{Arctg}\xi) = \operatorname{Arctg}1 - \operatorname{Arctg}0 =$$

$$= \frac{1}{2\,i}\operatorname{Ln}\frac{1+i}{1-i} \;-\; \frac{1}{2\,i}\operatorname{Ln}1 = \{\operatorname{Ln}z = \ln r + i\,\varphi + i\,2\pi k\,,$$

$$z = r\,e^{i\,\varphi}\ (\text{см. № 1.71 [2]})\} = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

2) $$\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{(\xi+i)\,(\xi-i)} = \frac{i}{2}\left(\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi+i} - \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi-i}\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\operatorname{Ln}(\xi+i)\big|_{\xi=0}^{\xi=1} - \operatorname{Ln}(\xi-i)\big|_{\xi=0}^{\xi=1}\right) = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+1}{i-1} =$$

$$= \{\text{см. № 1.71 [2]}\} = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

- -

3.5.2 Занятие 44

Задача 44.1 (№3.24 [2]). Доказать равенства

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \text{ (интегралы Френеля).}$$

У к а з а н и е. Интегрировать функцию $f(z) = e^{i\,z^2}$ по границе сектора $0 \leqslant |z| \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ (Рис.44.1).

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = e^{i\,z^2}$, являющаяся аналитической функцией в области D, интегрируется по замкнутому составному контуру $C = C_1 \cup C_R \cup C_2$, ограничивающему область D. Тогда, $\oint\limits_C e^{i\,z^2}\,dz = 0$ (интегральная теорема Коши). Итак,

$$0 = \oint\limits_C e^{i\,z^2}\,dz = \int\limits_{C_1} e^{i\,z^2}\,dz + \int\limits_{C_R} e^{i\,z^2}\,dz + \int\limits_{C_2} e^{i\,z^2}\,dz =$$

$= \{$Параметризация контура $C_1\ :\ z = t\,,\ t \in [0\,,\,R]\ \to\ dz = dt\,,$ $e^{i\,z^2} = e^{i\,t^2} = \cos t^2 + i\,\sin t^2\,;$

Параметризация контура $C_R\ :\ z = R\,e^{i\,t}\,,\ t \in \left[0\,,\,\dfrac{\pi}{4}\right]\ \to$

$\to\ dz = i\,R\,e^{i\,t}dt\,,\ e^{i\,z^2} = e^{i\,R^2\,e^{i\,2t}} = e^{-R^2\sin 2t}\,e^{i\,R^2\,\cos 2t}\,;$

Параметризация контура $C_2\ :\ z = t\,e^{i\,\pi/4}\,,\ t \in [R\,,\,0]\ \to$

$\to\ dz = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\,dt\,,\ e^{i\,z^2} = e^{i\,t^2\,e^{i\,\pi/2}} = e^{-t^2}\Big\} =$

$$= \int\limits_0^R \cos t^2\,dt + i\int\limits_0^R \sin t^2\,dt +$$

$$+ i\int\limits_0^{\pi/4} R\,e^{-R^2\sin 2t}\left(\cos\left(R^2\cos 2t + t\right) + i\,\sin\left(R^2\cos 2t + t\right)\right)\,dt +$$

$$+ \int\limits_R^0 \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\,e^{-t^2}\,dt\,.$$

Следовательно, при любом $R > 0$ верно равенство

$$\int\limits_0^R \cos t^2\,dt + i\int\limits_0^R \sin t^2\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\int\limits_0^R e^{-t^2}\,dt - \\ - i\int\limits_0^{\pi/4} R\,e^{-R^2\sin 2t}\,\left(\cos\left(R^2\cos 2t + t\right) + i\,\sin\left(R^2\cos 2t + t\right)\right)\,dt\,.$$

В этом равенстве выполним предельный переход при $R \to \infty$. Тогда,

$$\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt + i\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt}_{=\sqrt{\pi}/2} - \\ \underbrace{- i\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{\pi/4}\underbrace{R\,e^{-R^2\sin 2t}}_{\to 0 \text{ при } R\to\infty}\,\left(\cos\left(R^2\cos 2t + t\right) + i\,\sin\left(R^2\cos 2t + t\right)\right)\,dt}_{=0}\,.$$

То есть,

$$\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt + i\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \to \\ \to \int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

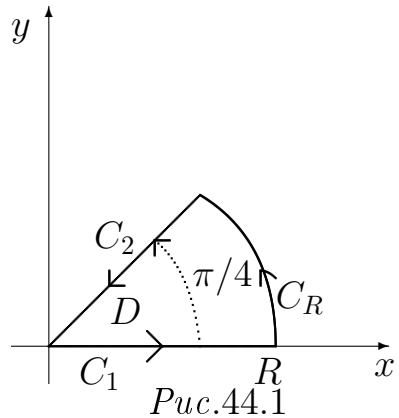

*Рис.*44.1

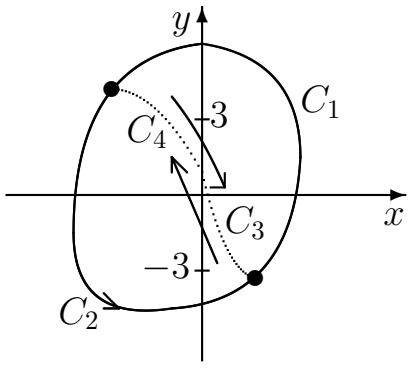

*Рис.*44.2

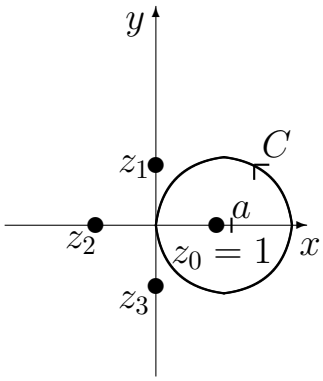

*Рис.*44.3

Интегральная формула Коши.

Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области D, контур $C-$ произвольный замкнутый контур в области D, точка $z-$ произвольная точка внутри контура C, то верно равенство (интегральная формула Коши)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\,.$$

На контуре C выбрано положительное направление обхода.

Обобщением интегральной формулы Коши является формула для $n-$ой производной аналитической функции $f(z)$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi\,.$$

Задача 44.2 (№3.27 [2]). Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9}\,,$$

если :

1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ лежит вне контура C;

2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ лежит вне контура C;

3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

Р е ш е н и е:

1) Пусть точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ лежит вне контура C. Тогда,

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9}=\oint\limits_C \frac{dz}{(z-3i)\,(z+3i)}=\left\{f\,(z)=\frac{1}{z+3i}\right\}=\oint\limits_C \frac{f\,(z)}{z-3i}\,dz=$$

$$=\{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\}=$$

$$=2\pi i\cdot f\,(3i)=\frac{2\pi i}{3i+3i}=\frac{\pi}{3}\,.$$

2) Пусть точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ лежит вне контура C. Тогда,

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = \left\{ f(z) = \frac{1}{z-3i} \right\} = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z+3i}\,dz =$$

$$= \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$

$$= 2\pi i \cdot f(-3i) = \frac{2\pi i}{-3i-3i} = -\frac{\pi}{3}\,.$$

3) Пусть точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C. Тогда,

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \{\text{Пусть контур } C = C_1 \cup C_2 \text{ (см. Рис.44.2)}\} =$$

$$= \oint\limits_{C_1 \cup C_3} \frac{dz}{z^2+9} + \oint\limits_{C_2 \cup C_4} \frac{dz}{z^2+9} = \{\text{См. предыдущие пункты 1) и 2).}\} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0\,.$$

О т в е т:

$$1) \quad \oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3}\,;$$

$$2) \quad \oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = -\frac{\pi}{3}\,;$$

$$3) \quad \oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9} = 0\,.$$

Задача 44.3 (№3.30 [2]). Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{z}{z^4-1}\,dz\,,$$

где контур C – окружность $|z-a| = a \;\; (a > 1)$.

Р е ш е н и е:

Знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в точках, в которых

$$z^4 = 1 \;\; \to \;\; z_k = e^{i\,(0+2\pi k)/4}\,,\; k = 0,1,2,3 \;\; \to \;\; z_0 = 1\,,\; z_1 = i\,,$$

$$z_2 = -1\,,\; z_3 = -i \;\; (\text{см. Рис.44.3})\,.$$

Тогда, $z^4 - 1 = (z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$ и

$$\oint\limits_C \frac{z}{z^4-1}\,dz = \oint\limits_C \frac{z}{(z-1)\,(z-i)\,(z+1)\,(z+i)}\,dz =$$

$$= \left\{ f(z) = \frac{z}{(z-i)\,(z+1)\,(z+i)} \right\} = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz =$$

$$= \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} = 2\pi i \cdot f(1) =$$

$$= \frac{2\pi i}{(1-i)\,2\,(1+i)} = i\,\frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \frac{z}{z^4-1}\,dz = i\,\frac{\pi}{2}$$

- -

Задача 44.4 (№3.32 [2]). Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{z\,e^z\,dz}{(z-a)^3}\,,$$

если точка a лежит внутри контура C.

Р е ш е н и е:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{z\,e^z\,dz}{(z-a)^3} = \{f(z) = z\,e^z\} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{2+1}}\,dz =$$

$$= \{\text{Используем формулу Коши для } n-\text{ой производной аналитической функции.}\} = \frac{1}{2!} \cdot f^{(2)}(a) =$$

$$= \left\{ f^{(2)}(z) = \frac{d}{dz}\left(e^z + z\,e^z\right) = 2\,e^z + z\,e^z \right\} = \left(1 + \frac{a}{2}\right) e^a\,.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{z\,e^z\,dz}{(z-a)^3} = \left(1 + \frac{a}{2}\right) e^a$$

- -

Задача 44.5 (№3.38 [2]). Доказать следующую теорему (интегральная формула Коши для бесконечной области).

Пусть $C-$ простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область D. Функция $f(z)$ аналитична во внешности области D и

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} -f(z) + A\,, \text{ точка } z \text{ вне области } D\,; \\ A\,, \text{ точка } z \text{ внутри области } D \end{cases}.$$

Контур C обходится в положительном направлении относительно области D.

Р е ш е н и е:

Замкнутый составной контур $\widetilde{C} = C_R \cup C_{1(+)} \cup C_{1(-)} \cup C_{(-)}$ (см. Рис.44.4) состоит из C_R – окружности радиуса R, $C_{1(+)} = C_{1(-)} = C_1$ – контур, который соединяет контур C_R и контур C (проходится дважды в противоположных направлениях), и $C_{(-)}$ – контур C, на котором задано отрицательное направление обхода. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\widetilde{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} f(z)\,, & z \text{ вне области } D \text{ (см. ф-ла Коши)}\,; \\ 0\,, & z \text{ внутри области } D \text{ (см. т-ма Коши)} \end{cases} \quad \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{1(+)}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{1(-)}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{\text{Сумма интегралов равна 0.}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} f(z)\,, & z \text{ вне области } D\,; \\ 0\,, & z \text{ внутри области } D \end{cases} \quad \to$$

$\to$ Параметризация контура $C_R\,:\,\xi = R\,e^{i\,t}\,,\ t \in [0\,,\,2\pi]\,,$

$$d\xi = i\,R\,e^{i\,t}\,dt \ \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} -f(z) + \dfrac{i}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(R\,e^{i\,t}\right)}{1 - z\,e^{-i\,t}/R}\,dt\,, & z \text{ вне } D\,; \\ \dfrac{i}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(R\,e^{i\,t}\right)}{1 - z\,e^{-i\,t}/R}\,dt\,, & z \text{ внутри } D \end{cases}.$$

Равенство выполняется для любого достаточно большого числа R. Перейдём к пределу в равенстве при $R \to \infty$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} -f(z) + A\,, \text{ точка } z \text{ вне области } D\,; \\ A\,, \text{ точка } z \text{ внутри области } D \end{cases}.$$

Задача 44.6 (№3.25 [2]). Доказать, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле).}$$

У к а з а н и е. Интегрировать функцию $f(z)=\dfrac{e^{i\,z}}{z}$ по границе области $r\leqslant|z|\leqslant R\,,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ (Рис.44.5).

Р е ш е н и е:

Проинтегрируем по замкнутому составному контуру $C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4\,,$ ограничивающему область $D\,,$ функцию $f(z)=\dfrac{e^{i\,z}}{z}\,,$ являющуюся аналитической функцией в области $D\,.$ Этот интеграл равен нулю (интегральная теорема Коши) при любых $r\ ,\ R$ (см. Рис.44.5). То есть,

$$\oint\limits_C \frac{e^{i\,z}}{z}\,dz=0\ \to$$

$$\to\ \underbrace{\int\limits_{C_1}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz}_{=I_1}+\underbrace{\int\limits_{C_2}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz}_{=I_2}+\underbrace{\int\limits_{C_3}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz}_{=I_3}+\underbrace{\int\limits_{C_4}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz}_{=I_4}=0\,.$$

$$\text{Интеграл}\ \ I_1=\int\limits_{C_1}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz=\{\text{Параметризация контура}\ \ C_1\ :\ z=x\ ,$$

$$x\in[r,R]\ \to\ dz=dx\,,\ \frac{e^{iz}}{z}=\frac{e^{ix}}{x}=\frac{\cos x+i\sin x}{x}=\frac{\cos x}{x}+i\frac{\sin x}{x}\Big\}=$$

$$=\int\limits_r^R\frac{\cos x}{x}\,dx+i\int\limits_r^R\frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

$$\text{Интеграл}\ \ I_2=\int\limits_{C_2}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz=\big\{\text{Параметризация контура}\ \ C_2\ :\ z=R\,e^{i\,\varphi}\ ,$$

$$\varphi\in[0,\pi]\ \to\ dz=R\,i\,e^{i\,\varphi}d\varphi\,,\ \frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{R}\,e^{-R\,\sin\varphi}\,e^{i\,(R\,\cos\varphi-\varphi)}\Big\}=$$

$$=i\int\limits_0^\pi e^{-R\,\sin\varphi}\,e^{i\,R\,\cos\varphi}\,d\varphi\,.$$

$$\text{Интеграл}\ \ I_3=\int\limits_{C_3}\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz=\{\text{Параметризация контура}\ \ C_3\ :\ z=x\ ,$$

$$x\in[-R,-r]\ \to\ dz=dx\,,\ \frac{e^{iz}}{z}=\frac{e^{ix}}{x}=\frac{\cos x}{x}+i\frac{\sin x}{x}\Big\}=$$

$$= \int\limits_{-R}^{-r} \frac{\cos x}{x}\,dx + i \int\limits_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_{r}^{R} \frac{\cos x}{x}\,dx + i \int\limits_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Интеграл $I_4 = \int\limits_{C_4} \frac{e^{i\,z}}{z}\,dz = \Big\{$Параметризация контура C_4 : $z = r\,e^{i\,\varphi}$,

$\varphi \in [0,\pi] \;\to\; dz = r\,i\,e^{i\,\varphi} d\varphi\,,\; \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{r}\,e^{-r\,\sin\varphi}\,e^{i\,(r\,\cos\varphi - \varphi)}\Big\} =$

$$= -i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-r\,\sin\varphi}\,e^{i\,r\,\cos\varphi}\,d\varphi\,.$$

Вычислим двойной предел при $r \to 0$ и $R \to \infty$ суммы $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = 0 \;\to$$

$$\to \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} i\,2 \int\limits_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx \;+ \underbrace{\lim_{R\to\infty} i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-R\,\sin\varphi}\,e^{i\,R\,\cos\varphi}\,d\varphi}_{=0} -$$

$$- \underbrace{i \lim_{r\to 0} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-r\,\sin\varphi}\,e^{i\,r\,\cos\varphi}\,d\varphi}_{=\pi} = 0 \;\to\; i\,2 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \;-\; i\,\pi = 0 \;\to$$

$$\to \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

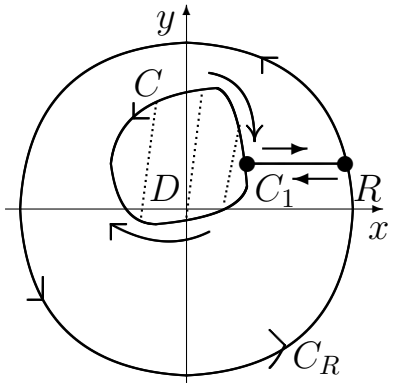

*Рис.*44.4

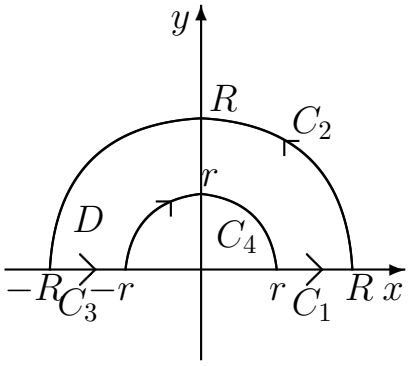

*Рис.*44.5

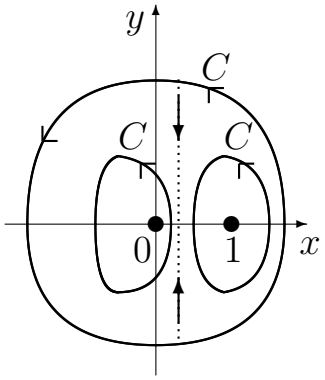

*Рис.*44.6

Задача 44.7 (№3.28 [2]). Вычислить все возможные значения интеграла

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z^2-1)}$$

при различных положениях контура C. Предполагается, что контур C не проходит ни через одну из точек 0, 1 и -1.

Р е ш е н и е:

По замкнутому контуру интегрируется функция

$$f\,(z) = \frac{1}{z\,(z^2-1)} = \frac{1}{z\,(z+1)\,(z-1)}\,.$$

1) Пусть внутри контура C нет точек 0, 1 и -1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную теорему Коши.}\} = 0\,.$$

2) Пусть внутри контура C расположена точка 1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z+1)}\bigg|_{z=1} = i\,\pi\,.$$

3) Пусть внутри контура C расположена точка 0. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{(z+1)\,(z-1)}\bigg|_{z=0} = -i\,2\pi\,.$$

4) Пусть внутри контура C расположена точка -1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z-1)}\bigg|_{z=-1} = i\,\pi\,.$$

5) Пусть внутри контура C расположены точки -1, 0, 1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$
$$= 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z-1)}\bigg|_{z=-1} + 2\pi i\,\frac{1}{(z+1)\,(z-1)}\bigg|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z+1)}\bigg|_{z=1} =$$
$$= i\,\pi - i\,2\pi + i\,\pi = 0\,.$$

6) Пусть внутри контура C расположены точки 0, 1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$
$$= 2\pi i\,\frac{1}{(z+1)\,(z-1)}\bigg|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z+1)}\bigg|_{z=1} = -i\,2\pi + i\,\pi = -i\,\pi\,.$$

7) Пусть внутри контура C расположены точки -1, 0. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$
$$= 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z-1)}\bigg|_{z=-1} + 2\pi i\,\frac{1}{(z+1)\,(z-1)}\bigg|_{z=0} = i\,\pi - i\,2\pi = -i\,\pi\,.$$

8) Пусть внутри контура C расположены точки -1, 1. Тогда

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z\,(z+1)\,(z-1)} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$
$$= 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z-1)}\bigg|_{z=-1} + 2\pi i\,\frac{1}{z\,(z+1)}\bigg|_{z=1} = i\,\pi + i\,\pi = i\,2\pi\,.$$

Задача 44.8 (№3.33 [2]). Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)^3}\,,$$

если :

1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 лежит вне контура C;

2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 лежит вне контура C;

3) точки 0 и 1 обе лежат внутри контура C (Рис.44.6).

Р е ш е н и е:

1) Пусть внутри контура C расположена точка 0. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)^3} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши.}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\,\frac{e^z}{(1-z)^3}\bigg|_{z=0}\right) = 1\,.$$

2) Пусть внутри контура C расположена точка 1. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)^3} = \{\text{Используем формулу для 2-ой производной}$$

$$\text{аналитической функции } f(z) = -\frac{e^z}{z}\Big\} = \frac{1}{2!}\,f^{(2)}(1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right)\bigg|_{z=1} = -\frac{e}{2}\,.$$

3) Пусть внутри контура C расположены точки 0, 1. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)^3} = \{\text{Используем интегральную формулу Коши и}$$

$$\text{формулу для 2-ой производной аналитической функции } \left(-\frac{e^z}{z}\right)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\,\frac{e^z}{(1-z)^3}\bigg|_{z=0}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right)\bigg|_{z=1} = 1 - \frac{e}{2}\,.$$

- -

Задача 44.9 (№3.34 [2]). Функция $f(z)$ аналитическая в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, содержащим внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f'(z)\,\operatorname{Ln} z\,dz = f(z_0) - f(0)\,,$$

где z_0 — начальная точка интегрирования.

У к а з а н и е. Интегрировать по частям.

Р е ш е н и е:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f'(z)\,\mathrm{Ln}\,z\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \mathrm{Ln}\,z\,df(z) = \{z_0\ ,\ z_k - \text{начальная и}$$

конечная точка интегрирования на контуре $C\} =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(f(z)\ \mathrm{Ln}\,z\Big|_{z=z_0}^{z=z_k} - \oint\limits_C \frac{f(z)\ dz}{z-0}\right) = \{\text{Используем интегральную}$$

формулу Коши и равенство $\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\ \arg z + i\,2\pi n\} =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(f(z_k)\left(\ln|z_k| + i\ (\arg z_0 + 2\pi) + i\,2\pi n\right) -\right.$$

$$\left. - f(z_0)\left(\ln|z_0| + i\ \arg z_0 + i\,2\pi n\right) - i\,2\pi f(0)\right) =$$

$$= \{|z_k| = |z_0|\ ,\ f(z_k) = f(z_0)\} = \frac{1}{2\pi i}\left(f(z_0)\ i\,2\pi - i\,2\pi f(0)\right) =$$

$$= f(z_0)\ -\ f(0)\ .$$

- -

3.6 Степенные ряды

3.6.1 Занятие 45

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \ldots + c_k (z-a)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (1),$$

в котором c_0, c_1, $\ldots$ — заданные комплексные числа, называемые коэффициентами данного степенного ряда, и комплексное число a — центр степенного ряда.

Теорема. Для любого степенного ряда (1), если он не является рядом сходящимся только в точке $z = a$, существует положительное число R (возможно равное ∞) такое, что степенной ряд (1) сходится внутри круга $|z-a| < R$ и расходится вне этого круга.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости используется формула Адамара

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

В частном случае, когда при $n > n_0$ все $c_n \neq 0$, радиус сходимости R может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

На границе круга сходимости ($|z-a| = R$) степенной ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

- -

Задача 45.1 (№3.40 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (1)\,.$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда (1).

Коэффициенты степенного ряда (1)

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{1}{n}, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Степенной ряда (1) сходится в круге $|z| < 1$ и расходится в области $|z| > 1$.

О т в е т:

$$R = 1$$

- -

Задача 45.2 (№3.44 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n\,.$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ есть центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \dfrac{n!}{n^n}, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

а) Радиус сходимости степенного ряда равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

б) Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \Big\{\text{Формула Стирлинга:}$$
$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+O(1/n)}\Big\} = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{1/(2n)}\; n^{1/(2n)}\, e^{-1+O\left(1/n^2\right)} = e^{-1} \;\to$$
$$\to \quad R = e\,.$$

О т в е т:

$$R = e$$

- -

Задача 45.3 (№3.46 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \, z^{n!} \, .$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0 -$ центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны

$$c_k = \begin{cases} 0 \, , & \text{при } k \neq n! \, ; \\ 2^n, & \text{при } k = n! \, . \end{cases}$$

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$R^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/(n-1)!} = 1 \;\to\; R = 1 \, .$$

О т в е т:

$$R = 1$$

- -

Задача 45.4 (№3.48 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(3 + (-1)^n\Big)^n \, z^n \, .$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0 -$ центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны $c_n = \Big(3 + (-1)^n\Big)^n$.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\Big(3 + (-1)^n\Big)^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(3 + (-1)^n\Big) =$$

$$= \{n = 2k\} = \lim_{k\to\infty} 4 = 4 \;\to\; R = \frac{1}{4} \, .$$

О т в е т:

$$R = \frac{1}{4}$$

Ряд Тейлора.

Пусть $D-$ область аналитичности функции $f(z)$ и z_0- фиксированная внутренняя точка области D.

Теорема. Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть единственным образом представлена в этом круге сходящимся степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\,,$$

коэффициенты которого равны

$$c_n=\frac{f^{(n)}\,(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\;.$$

Задача 45.5 (№3.68 [2]). Разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,z^n$$

функцию $f(z)=\operatorname{sh}z$ и найти радиус сходимости степенного ряда.

Р е ш е н и е:

Точка $a=0-$ центр степенного ряда.

$$f(z)=\operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\left\{e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,w^n\;\;,\;\;R=\infty\right\}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^n-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,z^n\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}\,z^n=\{n=2k+1\;,\;k=0,1,\dots\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\,z^{2k+1}\;\;,\;\;R=\infty\;.$$

О т в е т:

$$\operatorname{sh}z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\,z^{2k+1}\;\;,\;\;R=\infty\;.$$

Задача 45.6 (№3.75 [2]). Разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,z^n$$

функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ и найти радиус сходимости степенного ряда.

Р е ш е н и е:

Точка $a=0-$ центр степенного ряда. Функция $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ в точке $z=-1$ не является аналитической функцией. Радиус круга сходимости равен расстоянию от центра круга сходимости до ближайшей точки, в которой функция $f(z)$ не является аналитической функцией. В данном случае $R=1$.

$$f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}=\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right)=-\frac{1}{(z+1)^2}\right\}=-z^2\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right)=$$
$$=\left\{\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\;z^n\quad\text{при}\quad|z|<1\right\}=-z^2\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\;z^n\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\;n\,z^{n+1}=\{k=n+1\}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\;(k-1)\;z^k\;,\;|z|<1\;.$$

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда можно использовать формулу

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1\;.$$

О т в е т:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,(n-1)\;z^n\;,\;R=1\;.$$

Задача 45.7 (№3.80 [2]). Разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,z^n$$

функцию $f(z)$ и найти радиус сходимости степенного ряда, если

$$f(z)=\int_0^z e^{\xi^2}\,d\xi\;.$$

Р е ш е н и е:

$$f(z)=\int_0^z e^{\xi^2}\,d\xi=\left\{e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,w^n\;\;,\;\;R=\infty\right\}=\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{2n}}{n!}\right)d\xi=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z \xi^{2n}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \ , \ R = \infty \ .$$

О т в е т:

$$\int_0^z e^{\xi^2}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \ , \ R = \infty \ .$$

- -

Задача 45.8 (№3.88 [2]). Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z функции

$$f(z) = e^{z \sin z} \ .$$

Р е ш е н и е:

$$f(z) = e^{z \sin z} = \Big\{ w = z \sin z \ , \ e^w = 1 + w + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{6} w^3 + \frac{1}{24} w^4 + \dots \ ;$$

$$z \sin z = z \left(z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \dots \right) = z^2 - \frac{1}{6} z^4 +$$

$$+ \frac{1}{120} z^6 - \frac{1}{5040} z^8 + \dots \ ;$$

$$(z \sin z)^2 = z^4 - \frac{1}{3} z^6 + \frac{2}{45} z^8 + \dots \ ;$$

$$(z \sin z)^3 = z^6 - \frac{1}{2} z^8 + \dots \ ;$$

$$(z \sin z)^4 = z^8 + \dots \Big\} = 1 + \left(z^2 - \frac{1}{6} z^4 + \frac{1}{120} z^6 - \frac{1}{5040} z^8 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(z^4 - \frac{1}{3} z^6 + \frac{2}{45} z^8 + \dots \right) + \frac{1}{6} \left(z^6 - \frac{1}{2} z^8 + \dots \right) + \frac{1}{24} \left(z^8 + \dots \right) =$$

$$= 1 + z^2 + \frac{1}{3} z^4 + \frac{1}{120} z^6 - \frac{11}{560} z^8 + \dots \quad .$$

О т в е т:

$$e^{z \sin z} = 1 + z^2 + \frac{1}{3} z^4 + \frac{1}{120} z^6 - \frac{11}{560} z^8 + \dots$$

- -

Задача 45.9 (№3.42 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n \quad .$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ – центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ n^n\,, & \text{при } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \to \quad R = 0\,.$$

О т в е т:

$$R = 0$$

- -

Задача 45.10 (№3.45 [2]). Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}\,.$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ – центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны

$$c_k = \begin{cases} 0\,, & \text{при } k \neq n!\,; \\ 1\,, & \text{при } k = n!\,. \end{cases}$$

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$R^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{1} = 1 \quad \to \quad R = 1\,.$$

О т в е т:

$$R = 1$$

- -

Задача 45.11 (№3.52(1) [2]). Радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

равен R $(0 < R < \infty)$. Определить радиус сходимости ряда

$$1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^k\, c_n\, z^n\,.$$

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ – центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны $\tilde{c}_n = n^k\, c_n$.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда используем формулу

$$\tilde{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tilde{c}_n}{\tilde{c}_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^k c_n}{(n+1)^k c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1\cdot R = R\,.$$

О т в е т:

Радиус сходимости равен R.

- -

Задача 45.12 (№3.56 [2]). Исследовать поведение степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

на границе круга сходимости.

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0$ – центр степенного ряда.

Коэффициенты степенного ряда равны

$$c_k = \begin{cases} 0\,, & \text{при } k = 0\,; \\ \dfrac{1}{k}\,, & \text{при } k \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Для вычисления радиуса круга сходимости степенного ряда используем формулу

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1\,.$$

Окружность $|z| = 1$ является границей круга сходимости. На границе круга сходимости $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ – параметр. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \left\{z = e^{i\varphi}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\,n\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}\,.$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$$

расходится при $\varphi = 0$ и сходится условно при $\varphi \neq 0$. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}$$

сходится условно при любых значениях параметра φ.

Задача 45.13 (№3.69 [2]). Функцию $f(z) = \sin^2 z$ разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и найти радиус сходимости степенного ряда.

Р е ш е н и е:

Точка $a = 0 -$ центр степенного ряда.

$$f(z) = \sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z = \left\{ \cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!} \;\;,\;\; R = \infty \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \;\;,\;\; R = \infty .$$

О т в е т:

$$\sin^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \;\;,\;\; R = \infty .$$

Задача 45.14 (№3.74 [2]). Функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$ разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и найти радиус сходимости степенного ряда.

Р е ш е н и е:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 13} = \left\{ z^2 - 4z + 13 = 0 \;\; \to \;\; z_{1,2} = 2 \pm i\,3 \;\; \to \right.$$

$$\to \;\; f(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} \;\; \to \;\; \begin{cases} A + B = 1 \\ A z_2 + B z_1 = 0 \end{cases} ; \;\; \to \; A = \frac{2 + i\,3}{i\,6},$$

$$\left. B = -\frac{2 - i\,3}{i\,6} \right\} = -\frac{A}{z_1} \cdot \frac{1}{1 - z/z_1} - \frac{B}{z_2} \cdot \frac{1}{1 - z/z_2} = \left\{ \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \;\;, \right.$$

$$\left. |q| < 1 \;\; \to \;\; \text{Пусть} \;\; |z| < |z_1| = |z_2| = \sqrt{13} = R\,. \right\} = -\frac{A}{z_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_1^n} -$$

$$- \frac{B}{z_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{A}{z_1^{n+1}} - \frac{B}{z_2^{n+1}} \right) z^n =$$

$$= \frac{i}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - i\,3)^n - (2 + i\,3)^n}{13^n}\, z^n \quad \text{при} \quad |z| < R = \sqrt{13}\ .$$

О т в е т:

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 13} = \frac{i}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - i\,3)^n - (2 + i\,3)^n}{13^n}\, z^n\ ,\ |z| < R = \sqrt{13}$$

- -

Задача 45.15 (№3.81 [2]). Функцию

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin z}{z}\, dz$$

разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

и найти радиус сходимости.

Р е ш е н и е:

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin z}{z}\, dz = \left\{ \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\ \ ,\ \ R = \infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^z \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_0^z z^{2n-2}\, dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}\, z^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}\, z^{2n+1}\ ,\ R = \infty\ .$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^z \frac{\sin z}{z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}\, z^{2n+1}\ ,\ R = \infty\ .$$

- -

Задача 45.16 (№3.84 [2]). Функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ разложить в ряд по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости.

Р е ш е н и е:

$$f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}=\{w=z-1\}=\frac{(1+w)^2}{(2+w)^2}=\frac{((2+w)-1)^2}{(2+w)^2}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2+w}\right)^2=1-\frac{2}{2+w}+\frac{1}{(2+w)^2}=1-\frac{1}{1+w/2}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{1+w/2}\right)=$$
$$=\left\{\text{Пусть}\quad |w|<2=R\quad\to\quad\frac{1}{1+w/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\,w^n\right\}=$$
$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\,w^n-\frac{1}{2}\frac{d}{dw}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\,w^n\right)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\,w^n-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{2^{n+1}}\,w^{n-1}=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\,w^n-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{2^{n+1}}\,w^{n-1}=\frac{1}{4}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\,w^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)}{2^{n+2}}\,w^n=$$
$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\left(1-\frac{n+1}{4}\right)w^n=\{w=z-1\}=$$
$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-3)}{2^{n+2}}\,(z-1)^n\quad\text{при}\quad|z-1|<R=2\,.$$

О т в е т:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-3)}{2^{n+2}}\,(z-1)^n\;,\;|z-1|<R=2\,.$$

- -

Задача 45.17 (№3.90 [2]). Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z функции

$$f(z)=(1+z)^z=e^{z\,\ln(1+z)}\,.$$

Р е ш е н и е:

$$f(z)=e^{z\,\ln(1+z)}=\left\{w=z\,\ln(1+z)=z^2-\frac{z^3}{2}+\frac{z^4}{3}-\frac{z^5}{4}+\dots\right\}=$$
$$=e^w=1+w+\frac{1}{2}\,w^2+\frac{1}{6}\,w^3+\dots=\left\{w=z^2-\frac{z^3}{2}+\frac{z^4}{3}-\frac{z^5}{4}+\dots\,,\right.$$
$$\left.w^2=z^4-z^5-\frac{z^6}{4}+\dots\,,\;\;w^3=z^6+\dots\right\}=$$

$$= 1 + \left(z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} - \frac{z^5}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(z^4 - z^5 + \dots \right) + \dots =$$

$$= 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{5}{6} z^4 - \frac{3}{4} z^5 + \dots \quad .$$

Ответ:

$$(1+z)^z = 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{5}{6} z^4 - \frac{3}{4} z^5 + \dots$$

- -

3.7 Ряды Лорана

3.7.1 Занятие 46

Пусть $D-$ область аналитичности функции $f(z)$ и z_0- фиксированная внутренняя точка области D.

Определение. Точка z_0 называется нулём функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Если точка z_0- нуль функции $f(z)$, то из разложения $f(z)$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ следует, что $c_0=0$ $\left(c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)$.

Определение. Если не только c_0, но и $c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=0$, а $c_k\neq 0$, то точка z_0 называется нулём $k-$ого порядка функции $f(z)$.

- -

Задача 46.1 (№3.120(1) [2]). Найти порядок нуля $z=0$ для функции

$$f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right).$$

Р е ш е н и е:

$$f(0)=0\ \rightarrow\ z=0-\text{нуль функции } f(z)$$

$$f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)=\left\{e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\ ,\ \ w=z^2\right\}=$$

$$=z^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+2}}{n!}=z^4+\ldots\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\quad c_0=c_1=c_2=c_3=0\ ,\ c_4=1\neq 0$$

Следовательно, $z=0-$ нуль 4-ого порядка функции $f(z)$.

О т в е т:

$$z=0\ -\text{нуль 4-ого порядка функции } z^2\left(e^{z^2}-1\right).$$

- -

Задача 46.2 (№3.124 [2]). Найти порядки всех нулей функции

$$f(z)=z\sin z\,.$$

Р е ш е н и е:

$f(z) = z\,\sin z = 0 \;\to\; z_n = \pi n -$ нули функции $f(z)$ $(n -$ любое целое$)$

$$f'(z) = \sin z + z\,\cos z \quad , \quad f''(z) = 2\,\cos z + z\,\sin z\,;$$

$$f'(z_n) = \pi n\,(-1)^n = \begin{cases} 0\,, & \text{при } n = 0; \\ \neq 0, & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \;\to$$

$\to$ При $n \neq 0$ $z_n = \pi n -$ нули 1-ого порядка функции $f(z) = z\,\sin z$.

$f''(0) = 2 \neq 0 \;\to\; z_0 = 0 -$ нуль 2-ого порядка функции $f(z) = z\,\sin z$.

- -

Пусть $D -$ область аналитичности функции $f(z)$. Внутренние точки области D называются правильными точками функции $f(z)$.

Точки, не являющиеся правильными, называются особыми точками функции $f(z)$.

Определение. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует кольцо $0 < |z - z_0| < R$, в котором функция $f(z)$ является однозначной и аналитической функцией.

Определение. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n$, в котором $z_0 -$ фиксированная точка, а $c_n -$ комплексные числа, называется рядом Лорана.

Областью сходимости ряда Лорана является кольцо $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

Теорема. Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце

$R_1 < |z - z_0| < R_2$, однозначно представима в этом кольце сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n\,,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,,$$

$C -$ замкнутый контур, лежащий в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ и охватывающий точку z_0.

- -

Задача 46.3 (№4.3 [2]). Функцию

$$f(z) = \frac{1}{z\,(1 - z)}$$

разложить в ряд Лорана в окрестности точек : 1) $z_0 = 0$; 2) $z_0 = 1$; 3) $z_0 = \infty$.

Р е ш е н и е:

$$1)\ z_0 = 0 -\ \text{изолированная особая точка функции}\ \ f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} \to$$

$$\to\ \ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n\ \ \to\ \ f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n\ \ ,\ \ |q|<1 \right\} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n\ \ ,\ \ 0<|z|<1\ ;$$

$$2)\ z_0 = 1 -\ \text{изолированная особая точка функции}\ \ f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} \to$$

$$\to f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-1)^n \to f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} = -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, q^n\ \ ,\ \ |q|<1 \right\} = -\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n\ \ ,\ \ 0<|z-1|<1\ ;$$

$$3)\ z_0 = \infty\ \ \to\ \ f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} = \left\{ z = \frac{1}{w} \right\} = \frac{w^2}{w-1} = -w^2\cdot\frac{1}{1-w} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\ \ ,\ \ |w|<1 \right\} = -w^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=-2}^{\infty} w^n =$$

$$= \left\{ w = \frac{1}{z} \right\} = -\sum_{n=-2}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{2} z^n\ \ ,\ \ |z|>1\ .$$

О т в е т:

$$1)\ \ \frac{1}{z\,(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n\ \ ,\ \ 0<|z|<1\ ;$$

$$2)\ \ \frac{1}{z\,(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n\ \ ,\ \ 0<|z-1|<1\ ;$$

$$3)\ \ \frac{1}{z\,(1-z)} = -\sum_{n=-\infty}^{2} z^n\ \ ,\ \ |z|>1\ .$$

Задача 46.4 (№4.11 [2]). Функцию

$$f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$$

разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

Р е ш е н и е:

$$z_0=2-\text{ изолированная особая точка функции }\ f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}\ \to$$

$$\to\ \ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,(z-2)^n\ \ \to\ \ f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=$$

$$=\cos\left(1-\frac{4}{(z-2)^2}\right)=\cos 1\cdot\cos\left(\frac{2}{z-2}\right)^2+\sin 1\cdot\sin\left(\frac{2}{z-2}\right)^2=$$

$$=\left\{\cos w=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n)!}\ \ ,\ \ \sin w=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{w^{2n-1}}{(2n-1)!}\ \ ,\right.$$

$$\left.w=\left(\frac{2}{z-2}\right)^2\right\}=\cos 1\ +\ \cos 1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!\,(z-2)^{4n}}+$$

$$+\ \sin 1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}}{(2n-1)!\,(z-2)^{4n-2}}\ \ ,\ \ 0<|z-2|\ .$$

О т в е т:

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos 1\ +\ \cos 1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!\,(z-2)^{4n}}+$$

$$+\ \sin 1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}}{(2n-1)!\,(z-2)^{4n-2}}\ \ ,\ \ 0<|z-2|\ .$$

Задача 46.5 (№4.19(3) [2]). Выяснить, допускает ли функция

$$f(z)=\sec\frac{1}{z-1}$$

разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_*=1$.

Р е ш е н и е:

$$z_*=1-\text{ особая точка функции }\ f(z)=\sec\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\dfrac{1}{z-1}}\ .$$

Значения z, при которых $\cos\dfrac{1}{z-1} = 0$, также являются особыми точками функции $f(z) = \sec\dfrac{1}{z-1}$.

$$\cos\frac{1}{z-1} = 0 \;\;\rightarrow\;\; \frac{1}{z-1} = \frac{\pi}{2} + \pi n \;,\;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \;\;\rightarrow$$
$$\rightarrow\;\; z_n = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \;-\; \text{особые точки функции } f(z)\,.$$

Особая точка $z_* = 1$ является предельной точкой для последовательности особых точек $\{z_n\}$. То есть, $z_* = 1$ не является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и, следовательно, функция $f(z) = \sec\dfrac{1}{z-1}$ не может быть представлена в виде ряда Лорана в окрестности точки $z_* = 1$.

- -

Задача 46.6 (№3.120(2,3) [2]). Найти порядок нуля $z = 0$ для функций

$$2)\;\; 6\,\sin z^3 + z^3\left(z^6 - 6\right)\;;$$

$$3)\;\; e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}\,.$$

Р е ш е н и е:

$$2)\;\; f(z) = 6\,\sin z^3 + z^9 - 6z^3 = \left\{\sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{5!} + \ldots\right\} =$$
$$= 6\left(z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{5!} + \ldots\right) + z^9 - 6z^3 = \frac{6}{5!}\,z^{15} + \ldots \;\;\rightarrow$$
$$\rightarrow\;\; c_0 = c_1 = \ldots = c_{14} = 0\,,\; c_{15} = \frac{6}{5!} \neq 0 \;\;\rightarrow\;\; z = 0 \;-\; \text{нуль 15-ого}$$
$$\text{порядка функции } \; f(z) = 6\,\sin z^3 + z^9 - 6z^3\,.$$

$$3)\;\; f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z} = \left\{\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \ldots \;,\;\; \operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \ldots\;,\right.$$
$$\left. e^w = w + \ldots\right\} = \left(1 + z - \frac{z^3}{6} + \ldots\right) - \left(1 + z + \frac{z^3}{3} + \ldots\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,z^3 + \ldots \;\rightarrow\;\; c_0 = c_1 = c_2 = 0\,,\; c_3 = -\frac{1}{2} \neq 0 \;\;\rightarrow\;\; z = 0 \;-\; \text{нуль}$$
$$\text{3-ого порядка функции } \; f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}\,.$$

- -

Задача 46.7 (№3.122 [2]). Найти порядки всех нулей функции

$$f(z) = z^2 + 9\,.$$

Р е ш е н и е:

$$f(z) = z^2 + 9 = 0 \;\to\; z_1 = 3\,i \;\;,\;\; z_2 = -3\,i - \text{нули функции } f(z)\,.$$

$$f'(z) = 2\,z \quad ,$$
$$f'(z_1) = 2\,z_1 = 6\,i \neq 0 \;\to\; z_1 = 3\,i \;-\; \text{нуль 1-ого порядка.}$$
$$f'(z_2) = 2\,z_2 = -6\,i \neq 0 \;\to\; z_2 = -3\,i \;-\; \text{нуль 1-ого порядка.}$$

- -

Задача 46.8 (№4.1 [2]). Функцию

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Р е ш е н и е:

$$1)\; z = 0 - \text{ точка аналитичности функции } f(z) = \frac{1}{z-2} \;\to$$

$$\to\;\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \;\;\to\;\; f(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \;\;,\;\; |q| < 1 \right\} = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \;\;,\;\; |z| < 2\,;$$

$$2)\; z = \infty \;\;\to\;\; f(z) = \frac{1}{z-2} = \left\{ z = \frac{1}{w} \right\} = \frac{w}{1-2w} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{1-2w} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n w^n \;\;,\;\; |2w| < 1 \right\} = w\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^n w^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} w^n =$$

$$= \left\{ w = \frac{1}{z} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}} \;\;,\;\; |z| > 2\,.$$

О т в е т:

$$1)\;\; \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \;\;,\;\; |z| < 2\,;$$

$$2)\ \ \frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}}\ \ ,\ \ |z|>2\ .$$

Задача 46.9 (№4.10 [2]). Функцию

$$f(z)=e^{1/(1-z)}$$

разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z=1$ и $z=\infty$.

Р е ш е н и е:

$1)\ z=1-$ изолированная особая точка функции $f(z)=e^{1/(1-z)}\ \ \to$

$$\to\ \ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,(z-1)^n\ \ \to\ \ f(z)=e^{1/(1-z)}=e^{-1/(z-1)}=$$

$$=\left\{e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\ \ ,\ \ w=\frac{-1}{z-1}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z-1)^n}\ \ ,\ \ 0<|z-1|\ ;$$

$$2)\ z=\infty\ \ \to\ \ f(z)=e^{1/(1-z)}=\left\{z=\frac{1}{w}\right\}=e^{-w/(1-w)}=\{|w|<1\}=$$

$$=e^{-w\cdot\sum_{n=0}^{\infty}w^n}=e^{-\sum_{n=1}^{\infty}w^n}=\left\{e^{\xi}=1+\xi+\frac{1}{2}\,\xi^2+\frac{1}{6}\,\xi^3+\ldots\ \ ,\right.$$

$$\left.\xi=-\sum_{n=1}^{\infty}w^n\right\}=1-\left(w+w^2+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(w+w^2+\ldots\right)^2+\cdots=$$

$$=1-w-\frac{1}{2}\,w^2+\cdots=\left\{w=\frac{1}{z}\right\}=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2\,z^2}+\ldots\ \ ,\ \ |z|>1\ .$$

Задача 46.10 (№4.19(1,4) [2]). Выяснить, допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки :

$$1)\ \ f(z)=\cos\frac{1}{z}\ \ ,\ \ z=0\ ;$$

$$4)\ \ f(z)=\operatorname{ctg}z\ \ ,\ \ z=\infty\ .$$

Р е ш е н и е:

1) В точке $z=0$ функция $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$ не определена. Точка $z=0-$ изолированная особая точка функции $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$. Следовательно, функция $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$ допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$.

4) Для функции $f(z) = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ точки, в которых $\sin z = 0 \;\to$ $\to \; z_k = \pi k \;,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – особые точки функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Точка $z = \infty$ является предельной точкой для последовательности $\{z_k\}$. Следовательно, функцию $f(z) = \operatorname{ctg} z$ нельзя представить в виде ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

- -

3.8 Классификация особых точек и вычет функции

3.8.1 Занятие 47

Классификация изолированных особых точек.

Точка $z_0 -$ изолированная особая точка функции $f(z)$. В окрестности точки z_0, в кольце аналитичности $0 < |z - z_0| < R$, функция $f(z)$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n \, .$$

Для изолированных особых точек функции $f(z)$ введена следующая классификация, использующая либо вид ряда Лорана, либо характер поведения функции.

1) Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана не содержит слагаемых с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$ или существует конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0 \;\; (|c_0| < \infty)$.

2) Точка z_0 называется полюсом порядка m функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит слагаемые с отрицательными степенями разности $(z - z_0)^n$ $(-m \leqslant n \leqslant -1)$ или существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

3) Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$ или не существует предельное значение функции $f(z)$ в точке z_0.

Точка $z_0 = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует такое R, что в области $|z| > R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z = 0$.

4) Точка $z_0 = \infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана не содержит слагаемых с положительными степенями z или существует конечный $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = c_0 \;\; (|c_0| < \infty)$.

5) Точка $z_0 = \infty$ называется полюсом порядка m функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит слагаемые с положительными степенями z^n $(1 \leqslant n \leqslant m)$ или существует $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

6) Точка $z_0 = \infty$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит бесконечное число слагаемых с положительными

степенями переменной z или не существует предельное значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$.

- -

Задача 47.1 (№4.23 [2]). Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3} = \dfrac{1}{z(1 - z^2)}$ имеет следующие изолированные особые точки: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$ и $z_4 = \infty$.

1) Тип точки $z_1 = 0$.

$$\text{а)}\ \ f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z^2} = \{|z| < 1\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + z + z^3 + \ldots \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \ c_{-1} = 1 \neq 0$$

Следовательно, точка $z_1 = 0$ является полюсом 1-ого порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$.

б) Рассмотрим вспомогательную функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Если точка z_0 является нулём $m-$ого порядка для функции $g(z)$, то эта же точка z_0 является полюсом $m-$ого порядка для функции $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3}\ \rightarrow\ g(z) = \frac{1}{f(z)} = z - z^3\ \rightarrow\ g(0) = 0\,,\ g'(z) = 1 - 3z^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow\quad g'(0) = 1 \neq 0$$

Следовательно, точка $z_1 = 0$ является нулём $1-$ого порядка для функции $g(z)$ и полюсом 1-ого порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$.

2) Тип точки $z_2 = -1$.

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3}\quad \rightarrow\quad g(z) = \frac{1}{f(z)} = z - z^3\quad \rightarrow\quad g(-1) = 0\ \ ,$$

$$g'(z) = 1 - 3z^2\quad \rightarrow\quad g'(-1) = -2 \neq 0$$

Следовательно, точка $z_2 = -1$ является нулём $1-$ого порядка для функции $g(z)$ и полюсом 1-ого порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$.

3) Тип точки $z_3 = 1$.

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3} \;\to\; g(z) = \frac{1}{f(z)} = z - z^3 \to g(1) = 0\,,\; g'(z) = 1 - 3z^2 \to$$
$$\to \quad g'(1) = -2 \neq 0$$

Следовательно, точка $z_3 = 1$ является нулём $1-$ого порядка для функции $g(z)$ и полюсом 1-ого порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$.

4) Тип точки $z_4 = \infty$.

$f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0-$ точка $z_4 = \infty$ является нулём функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$. Определим порядок нуля $z_4 = \infty$.

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3} = \left\{z = \frac{1}{\xi}\right\} = \frac{\xi^3}{\xi^2 - 1} = -\,\xi^3 \cdot \frac{1}{1 - \xi^2} = \{|\xi| < 1\} =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{2n+3} = \left\{\xi = \frac{1}{z}\right\} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+3}} = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \ldots\,,\; |z| > 1 \;\to$$
$$\to \quad c_0 = c_{-1} = c_{-2} = 0\,,\; c_{-3} = -1 \neq 0 \;\to\; z_4 = \infty - \text{ нуль 3-ого}$$
$$\text{порядка функции } f(z) = \frac{1}{z - z^3}\,.$$

- -

Задача 47.2 (№4.37 [2]). Найти особые точки функции

$$f(z) = e^{z/(1-z)}\,,$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = e^{z/(1-z)}$ имеет следующие изолированные особые точки: $z_1 = 1$ и $z_2 = \infty$.

1) Тип точки $z_1 = 1$.

а) $f(z) = e^{z/(1-z)} = e^{-(1+1/(z-1))} = e^{-1} \cdot e^{-1/(z-1)} = \left\{e^w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{w^n}{n!}\right\} =$

$$= e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,(z-1)^{-n} = e^{-1} \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-n}}{(-n)!}\,(z-1)^n$$

Следовательно, точка $z_1 = 1$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

б) Рассмотрим две последовательности точек $z'_k = 1 + \dfrac{1}{k}$ и $z''_k = 1 - \dfrac{1}{k}$, сходящихся при $k \to \infty$ к изолированной особой точке $z_1 = 1$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-k(1+1/k)} = 0$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(z''_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{k(1-1/k)} = \infty$, то $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$ не существует. Следовательно, точка $z_1 = 1$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

2) Тип точки $z_2 = \infty$.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} e^{z/(1-z)} = \lim_{z\to\infty} e^{1/(1/z-1)} = e^{-1}$$

Следовательно, точка $z_2 = \infty$ является устранимой точкой для функции $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

- -

Задача 47.3 (№4.54 [2]). Найти особые точки функции

$$f(z) = e^{-z} \cdot \cos\frac{1}{z},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = e^{-z} \cdot \cos\dfrac{1}{z}$ имеет следующие изолированные особые точки: $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$.

1) Тип точки $z_1 = 0$.

Рассмотрим две последовательности точек $z'_k = \dfrac{1}{\pi/2 + \pi k}$ и $z''_k = \dfrac{1}{2\pi k}$, сходящихся при $k \to \infty$ к изолированной особой точке $z_1 = 0$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-z'_k} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \cos\dfrac{1}{z'_k} = 1 \cdot 0 = 0$,

а $\lim\limits_{k\to\infty} f(z''_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-z''_k} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \cos\dfrac{1}{z''_k} = 1 \cdot 1 = 1$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует.

Следовательно, точка $z_1 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{-z} \cdot \cos\dfrac{1}{z}$.

2) Тип точки $z_2 = \infty$.

Рассмотрим две последовательности точек $z'_k = k$ и $z''_k = -k$, сходящихся при $k \to \infty$ к точке $z_2 = \infty$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-z'_k} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \cos\dfrac{1}{z'_k} = 0 \cdot 1 = 0$,

а $\lim\limits_{k\to\infty} f(z''_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-z''_k} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \cos\dfrac{1}{z''_k} = \infty \cdot 1 = \infty$, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует.

Следовательно, точка $z_2 = \infty$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{-z} \cdot \cos \frac{1}{z}$.

- -

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.

Точка z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$. В окрестности точки z_0, в кольце аналитичности $0 < |z - z_0| < R$, функция $f(z)$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n \ ,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ ,$$

Γ – замкнутый контур, лежащий в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и охватывающий точку z_0.

Формула для коэффициентов c_n при $n = -1$ имеет вид

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\, dz \, .$$

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент ряда Лорана

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\, dz \, .$$

Для обозначения вычета функции $f(z)$ в точке z_0 используются выражения $\text{Выч}\,[f(z), z_0]$ или $res\,[f(z), z_0]$.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ называется коэффициент ряда Лорана $(-\,c_{-1})$ $\quad (\text{Выч}\,[f(z), \infty] = -\,c_{-1})$.

Теорема (основная теорема о вычетах). Сумма вычетов во всех изолированных особых точках, включая точку $z = \infty$, равна нулю.

Формулы для вычисления вычета в полюсе.

1) Пусть точка z_0 является полюсом первого порядка. Тогда:

а) $\quad c_{-1} = res\,[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) \ ;$

б) Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\quad c_{-1} = res\,[f(z), z_0] = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

2) Пусть точка z_0 является полюсом $m-$ого порядка. Тогда

$$c_{-1} = res\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z - z_0)^m \cdot f\,(z) \Big) \,.$$

- -

Задача 47.4 (№4.79 [2]). Найти вычеты функции

$$f\,(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z = \infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f\,(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$ имеет следующие изолированные особые точки:

1) $z_1 = -1$ – полюс 1-ого порядка ;

2) $z_2 = 0$ – полюс 3-ого порядка ;

3) $z_3 = 1$ – полюс 1-ого порядка ;

4) $z_4 = \infty$ – нуль 5-ого порядка $\rightarrow$ $c_{-1} = 0$.

Вычеты функции $f\,(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$ в этих точках равны:

1) $res\,[f(z), z_1] = \left\{ f\,(z) = \dfrac{\varphi\,(z)}{\psi\,(z)} \text{ , где } \varphi\,(z) = 1 \text{ , } \psi\,(z) = z^3 - z^5 \right\} =$

$$= \frac{\varphi\,(-1)}{\psi'\,(-1)} = -\frac{1}{2} \,;$$

3) $\text{Выч}\,[f(z), z_3] = \left\{ f\,(z) = \dfrac{\varphi\,(z)}{\psi\,(z)} \text{ , где } \varphi\,(z) = 1 \text{ , } \psi\,(z) = z^3 - z^5 \right\} =$

$$= \frac{\varphi\,(1)}{\psi'\,(1)} = -\frac{1}{2} \,;$$

4) $\text{Выч}\,[f(z), \infty] = -\,c_{-1} = 0$;

2) $res\,[f(z), z_2] = \{\text{см. «Основная теорема о вычетах»}\} =$

$$= -\Big(res\,[f(z), -1] + res\,[f(z), 1] + res\,[f(z), \infty] \Big) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\right) = 1 \ .$$

Задача 47.5 (№4.87 [2]). Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z = \infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ имеет изолированные особые точки $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – полюса 1-ого порядка.

Точка $z = \infty$ является предельной точкой последовательности $\{z_k\}$.

Вычеты функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ в точках z_k равны

$$res\,[f(z), z_k] = \left\{ f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \ , \text{ где } \ \varphi(z) = 1 \ , \ \psi(z) = \sin z \right\} =$$

$$= \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{1}{\cos(\pi k)} = (-1)^k \ .$$

Задача 47.6 (№4.91 [2]). Найти вычеты функции

$$f(z) = e^{z+1/z}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z = \infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = e^{z+1/z}$ имеет две изолированные особые точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$.

Ряд Лорана для функции $f(z) = e^{z+1/z}$ с центром в точке $z_1 = 0$ имеет вид

$$f(z) = e^z \cdot e^{1/z} = \left\{ e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \ , \text{ где } \ d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k-n}}{k!(n-k)!} \ .$$

Представляют интерес слагаемые, у которых показатель степени $2k - n = -1$. Этому условию удовлетворяют нечётные индексы суммирования

$n = 2l+1 \qquad (l = 0, 1, 2, \dots)$ во внешней сумме, при которых индекс суммирования $k = \left.\dfrac{n-1}{2}\right|_{n=2l+1} = l$.

Итак, $\text{Выч}\,[f(z), z_1 = 0] = c_{-1} = \left.\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!}\right|_{\substack{n=2l+1 \\ k=l}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!}$.

Вычет функции $f(z) = e^{z+1/z}$ в точке $z_2 = \infty$ равен

$$\text{Выч}\,[f(z), \infty] = \{\text{см. «Основная теорема о вычетах»}\} = -\text{Выч}\,[f(z), 0] = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!}\,.$$

Задача 47.7 (№4.27 [2]). Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}\,,$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$ имеет следующие изолированные особые точки: $z_1 = -i$, $z_2 = i$ и $z_3 = \infty$.

1) Тип точек $z_{1,2} = \pm i$.

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2} \;\to\; g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1+z^2}{e^z} \;\to\; g(\pm i) = 0\,,$$

$$g'(z) = \frac{2z - 1 - z^2}{e^z} \;\to\; g'(\pm i) \neq 0$$

Следовательно, точки $z_{1,2} = \pm i$ являются нулями 1–ого порядка для функции $g(z)$ и полюсами 1–ого порядка функции $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$.

2) Тип точки $z_3 = \infty$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{1+x^2} = \infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty} f(z)|_{z=-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+x^2} = 0$, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует. Следовательно, точка $z_3 = \infty$ является существенно особой точкой функции $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$.

Задача 47.8 (№4.40 [2]). Найти особые точки функции

$$f(z)=\frac{1}{\sin z},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ имеет следующие изолированные особые точки:

$$z_k=\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Точка $z=\infty$ является предельной точкой последовательности $\{z_k\}$.

Тип точек $z_k=\pi k$.

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}\ \rightarrow\ g(z)=\frac{1}{f(z)}=\sin z\ \rightarrow\ g(\pi k)=\sin\pi k=0\,,$$
$$g'(z)=\cos z\ \rightarrow\quad g'(\pi k)=\cos\pi k=(-1)^k\neq 0$$

Следовательно, точки $z_k=\pi k$ являются нулями $1-$ого порядка для функции $g(z)$ и полюсами 1-ого порядка функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

Задача 47.9 (№4.80 [2]). Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z=\infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$ имеет следующие изолированные особые точки: $z_1=-i$, $z_2=i$ и $z_3=\infty$.

1) Тип точек $z_{1,2}=\pm i$.

$$f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\ \rightarrow\ g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z^2}=\frac{1}{z^2}+2+z^2\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ g(\pm i)=0\,,\ g'(z)=-\frac{2}{z^3}+2z\ \rightarrow\quad g'(\pm i)=0\ ,\ \ g''(z)=\frac{6}{z^4}+2\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\quad g''(\pm i)\neq 0$$

Следовательно, точки $z_{1,2}=\pm i$ являются нулями $2-$ого порядка для функции $g(z)$ и полюсами $2-$ого порядка функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

Вычеты функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$ в этих точках равны:

$$res\,[f(z),z_{1,2}]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to z_{1,2}}\frac{d}{dz}\Big((z-z_{1,2})^2\cdot f(z)\Big)=$$

$$=\lim_{z\to z_{1,2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-z_{1,2})^2\cdot z^2}{(z-z_1)^2\,(z-z_2)^2}\right)=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{z\to z_1}\left(-\dfrac{2zz_2}{(z-z_2)^3}\right)=-\dfrac{2z_1z_2}{(z_1-z_2)^3}=\dfrac{i}{4}\,;\\[2ex]\lim\limits_{z\to z_2}\left(-\dfrac{2zz_1}{(z-z_1)^3}\right)=-\dfrac{2z_1z_2}{(z_2-z_1)^3}=-\dfrac{i}{4}\end{cases}.$$

2) $res\,[f(z),\infty]=\{$см. «Основная теорема о вычетах»$\}=$

$$=-\Big(res\,[f(z),-i]\,+\,res\,[f(z),i]\Big)=-\left(\frac{i}{4}-\frac{i}{4}\right)=0\,.$$

Задача 47.10 (№4.85 [2]). Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2\,(z^2+9)}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z=\infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\,(z^2+9)}$ имеет следующие изолированные особые точки:

1) $z_1=-3i$ – полюс 1-ого порядка ;

2) $z_2=0$ – полюс 2-ого порядка ;

3) $z_3=3i$ – полюс 1-ого порядка ;

4) $z_4=\infty$ – существенно особая точка .

Вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\,(z^2+9)}$ в этих точках равны:

1) $res\,[f(z),-3i]=\Big\{f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)=\dfrac{e^z}{z^2\,(z-3i)}$,

$$\psi(z)=z+3i\Big\}=\frac{\varphi(-3i)}{\psi'(-3i)}=-\frac{i}{54}\,e^{-3i}=-\frac{\sin 3\,+\,i\,\cos 3}{54}\,;$$

2) $res\,[f(z),0]=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^z}{z^2+9}\right)=\lim\limits_{z\to 0}e^z\,\dfrac{z^2+9-2z}{(z^2+9)^2}=\dfrac{1}{9}$;

3) $res\,[f(z),3i]=\left\{f\,(z)=\dfrac{\varphi\,(z)}{\psi\,(z)}\text{ , где }\ \varphi\,(z)=\dfrac{e^z}{z^2\,(z+3i)}\text{ ,}\right.$

$\left.\psi\,(z)=z-3i\right\}=\dfrac{\varphi\,(3i)}{\psi'\,(3i)}=\dfrac{i}{54}\,e^{3i}=\dfrac{-\sin 3\,+\,i\,\cos 3}{54}$;

4) $res\,[f(z),\infty]=\{\text{см. «Основная теорема о вычетах»}\}=$

$=-\Big(res\,[f(z),-3i]\,+\,res\,[f(z),0]\,+\,res\,[f(z),3i]\Big)=\dfrac{\sin 3}{27}-\dfrac{1}{9}$.

- -

Задача 47.11 (№4.93 [2]). Найти вычеты функции

$$f\,(z)=\sin\frac{z}{z+1}$$

относительно всех изолированных особых точек и точки $z=\infty$.

Р е ш е н и е:

Функция $f\,(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$ имеет следующие изолированные особые точки:

1) $z_1=-1$ – существенно особая точка ;

2) $z_2=\infty$.

Вычислим вычеты функции $f\,(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$ в этих точках.

1) $f\,(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}=\sin\left(1-\dfrac{1}{z+1}\right)=\sin 1\cdot\cos\dfrac{1}{z+1}-$

$-\ \cos 1\cdot\sin\dfrac{1}{z+1}=\left\{\sin w=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\dfrac{w^{2n-1}}{(2n-1)!}\ ,\ \cos w=\right.$

$\left.=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{w^{2n}}{(2n)!}\ ,\ w=\dfrac{1}{z+1}\right\}=\sin 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n}}-$

$-\ \cos 1\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-1}}\ \ \to$

$\to\ \ res\,[f(z),-1]=c_{-1}=-\cos 1\cdot\left.\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right|_{n=1}=-\cos 1$.

4) $res\,[f(z),\infty] = \{$см. «Основная теорема о вычетах»$\} =$

$$= -res\,[f(z),-1] = \cos 1\ .$$

- -

3.9 Вычисление интегралов с помощью вычетов

3.9.1 Занятие 48

Вычисление интеграла $\oint\limits_{C} \mathbf{f(z)\,dz}$ по замкнутому контуру.

Пусть внутри замкнутого контура C находится конечное число изолированных особых точек z_k функции $f(z)$ и на контуре C выбрано положительное направление его обхода. Тогда

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k} \text{Выч}\,[f(z), z_k]\ .$$

- -

Задача 48.1 (№4.115 [2]). Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1}\,,$$

где $C-$ окружность $x^2 + y^2 = 2x$, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении.

Р е ш е н и е:

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1} = \Bigg\{ \text{Изолированные особые точки функции } f(z) = \frac{1}{z^4+1}\ :$$

$$z^4 + 1 = 0 \ \rightarrow\ z_k = e^{i\,(\pi+2\pi k)/4}\,,\ k = 0, 1, 2, 3\ \text{(Рис.48.3)}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \text{Внутри круга}\ \ |z-1| < 1\ \text{находятся точки}\ z_0 = e^{i\,\pi/4}$$

$$\text{и}\ z_3 = e^{i\,7\pi/4}\ \text{(полюса 1-ого порядка)} \Bigg\} = 2\pi i\,(\text{Выч}\,[f(z), z_0] +$$

$$+\,\text{Выч}\,[f(z), z_3]) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_3^3} \right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-i\,3\pi/4} + e^{-i\,5\pi/4} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\,\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} - i\,\sin\frac{5\pi}{4} \right) = \pi i \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = -\,\frac{i\,\pi}{\sqrt{2}}$$

О т в е т:

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1} = -\,\frac{i\,\pi}{\sqrt{2}}$$

- -

Задача 48.2 (№4.118 [2]). Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}\,,$$

где $C-$ окружность $x^2+y^2=1$, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении.

Р е ш е н и е:

$$\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1} = \Bigg\{\text{Изолированные особые точки функции } f(z)=\frac{z^3}{2z^4+1}:$$

$2z^4+1=0 \;\to\; z_k=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\,e^{i\,(\pi+2\pi k)/4}\,,\; k=0,1,2,3 \;\to\;$ Внутри круга

$|z|<1$ находятся все точки z_k (Рис.48.2)$\Big\} = 2\pi i\sum\limits_{k=0}^{3}\text{Выч}\,[f(z),z_k] =$

$$= \{\text{см. «Основная теорема о вычетах»}\} = 2\pi i\Big(-\text{Выч}\,[f(z),\infty]\Big) =$$

$$= 2\pi i\cdot c_{-1}$$

Коэффициент c_{-1} в разложении с центром в точке $z=\infty$ в ряд Лорана функции $f(z)=z^3/\left(2z^4+1\right)$ равен:

$$f(z)=\frac{z^3}{2z^4+1}=\left\{z=\frac{1}{\xi}\right\}=\frac{\xi}{2+\xi^4}=\frac{\xi}{2}\cdot\frac{1}{1+\xi^4/2}=\frac{\xi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\xi^{4n}}{2^n}=$$

$$=\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^5}{4}+\dots=\left\{\xi=\frac{1}{z}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^5}+\dots\;\to\;c_{-1}=\frac{1}{2}\,.$$

Интеграл $\oint\limits_C f(z)=2\pi i\cdot c_{-1}=\pi i\,.$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}=\pi i$$

Вычисление определённого интеграла $\int\limits_0^{2\pi} R\,(\sin\varphi\,,\,\cos\varphi)\;d\varphi\,.$

Интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi} R\,(\sin\varphi\,,\,\cos\varphi)\;d\varphi=\big\{$Замена переменной: $z=e^{i\,\varphi}\;\to$

$$\to \;\; d\varphi = \frac{dz}{i\,z}\;,\; \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\;,\; \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\;,$$

$$R\left(\sin\varphi\,,\,\cos\varphi\right) \;\to\; \widetilde{R}\,(z)\Big\} = -\,i \oint\limits_{C\,:\,|z|=1} \frac{1}{z}\,\widetilde{R}\,(z)\,dz =$$

$$= 2\pi \sum_k \text{Выч}\left[\frac{1}{z}\,\widetilde{R}\,(z)\,,\,z_k\right]\;,\;\text{где}\;\; z_k \;-\; \text{изолированные особые точки}$$

функции $\dfrac{1}{z}\,\widetilde{R}\,(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

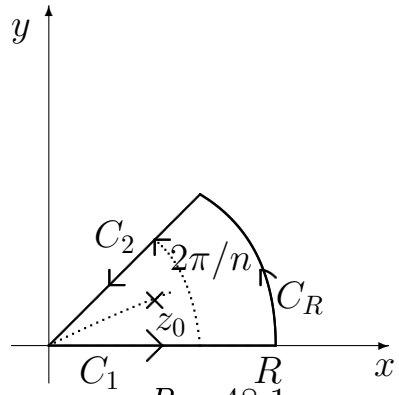

*Рис.*48.1

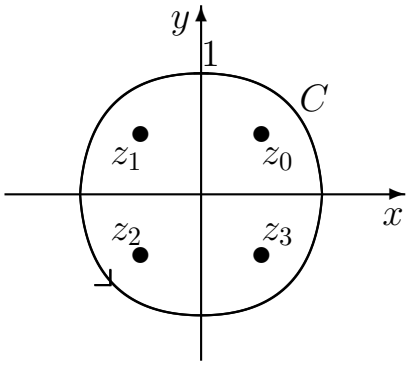

*Рис.*48.2

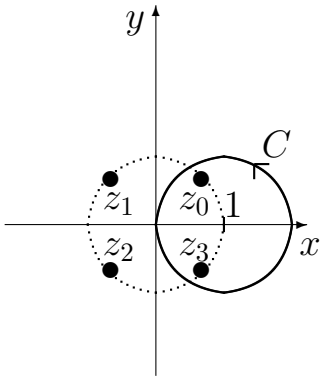

*Рис.*48.3

Задача 48.3 (№4.131 [2]). Вычислить определённый интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}\;\;(a>1)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \left\{z = e^{i\,\varphi}\;,\; d\varphi = \frac{dz}{i\,z}\;,\; \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} =$$

$$= -\,2i \oint\limits_{C\,:\,|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \left\{f\,(z) = \frac{1}{z^2+2az+1}\right\} =$$

$$= 4\pi \sum_k \text{Выч}\left[f\,(z)\,,\,z_k\right]\;,\;\text{где}\;\; z_k \;-\; \text{изолированные особые точки}$$

функции $f\,(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

Выбор изолированных особых точек z_k :

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2az+1}\ \to\ z^2+2az+1=0\ \to$$

$\to z_1=-a+\sqrt{a^2-1}\,,\ z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$ – полюса первого порядка,

$|z_1|=a-\sqrt{a^2-1}<1$ – находится внутри круга $|z|<1$,

$|z_2|=a+\sqrt{a^2-1}>1$ – находится вне круга $|z|<1$.

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=4\pi\,\text{Выч}\left[f(z),z_1\right]=$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{2z_1+2a}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

- -

Вычисление несобственного интеграла 1-ого рода $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$.

Интеграл $\displaystyle I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_k\text{Выч}\left[f(z),z_k\right]$,

где $f(z)$ – аналитическое продолжение функции $f(x)$ на комплексную плоскость z и z_k – изолированные особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости z $(\operatorname{Im}z>0)$.

- -

Задача 48.4 (№4.140 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода, так как

$$\frac{|x|}{\left(x^2+4x+13\right)^2}\underset{|x|\gg1}{=}O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)\quad\text{и}\quad x^2+4x+13\neq0\quad\text{при}\quad-\infty<x<+\infty\,.$$

Особые точки функции $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+4z+13)^2}$:

$z^2+4z+13=0 \;\to\; z_1=-2+i\,3\;,\; z_2=-2-i\,3$ - полюса 2-ого порядка ,
$\operatorname{Im} z_1>0$ – точка z_1 в верхней полуплоскости .

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}=2\pi i\,\text{Выч}\left[f(z)\,,z_1\right]=$

$$=2\pi i\,\frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2\,f(z)\right)\Big|_{z=z_1}=2\pi i\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)\Big|_{z=z_1}=$$

$$=2\pi i\;\frac{(z-z_2)-2z}{(z-z_2)^3}\Big|_{z=z_1}=-2\pi i\,\frac{z_2+z_1}{(z_1-z_2)^3}=2\pi i\,\frac{4}{(6\,i)^3}=-\frac{\pi}{27}\;.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}=-\frac{\pi}{27}$$

- -

Задача 48.5 (№4.145 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}\quad(n\geqslant 2\;-\;\text{натуральное число})\;.$$

У к а з а н и е. Рассмотреть интеграл $\displaystyle\oint\limits_C\frac{dz}{1+z^n}$, где $C-$ контур, состоящий из лучей $\arg z=0$, $\arg z=2\pi/n$ и соединяющей их дуги окружности (см. Рис.48.1).

Р е ш е н и е:

1) Вычисление интеграла с использованием вычета.

Функция $f(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$ имеет следующие изолированные особые точки :

$1+z^n=0\to z_k=e^{i\,(\pi+2\pi k)/n}, k=0,1,\ldots,(n-1)-$полюса 1-го порядка;
Особая точка $z_0=e^{i\,\pi/n}$ находится внутри замкнутого составного контура $C=C_1\cup C_R\cup C_2$ (см. Рис.48.1) .

Следовательно, $\displaystyle\oint\limits_C\frac{dz}{1+z^n}=2\pi i\,\text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^n},z_0\right]\;\to$

$$\to \int\limits_{C_1} \frac{dz}{1+z^n} \,+\, \int\limits_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \,+\, \int\limits_{C_2} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i\, \frac{1}{n\, z_0^{n-1}} \,.$$

Параметризация контуров $C_1\,,\ C_R$ и C_2 :

$$C_1 \ :\ z = x\ ,\ x \in [0\,,\ R] \ \to\ dz = dx\ ,\ \frac{dz}{1+z^n} = \frac{dx}{1+x^n} \ \ ;$$

$$C_R \ :\ z = R\, e^{i\,t}\ ,\ t \in [0\,,\ 2\pi/n] \ \to\ dz = i\, R\, e^{i\,t} dt\ ,\ \frac{dz}{1+z^n} = \frac{i\, R\, e^{i\,t} dt}{1+R^n e^{i\,nt}} \ ;$$

$$C_2 \ :\ z = t\, e^{i\,2\pi/n}\ ,\ t \in [0\,,\ R] \ \to\ dz = e^{i\,2\pi/n} dt\ ,\ \frac{dz}{1+z^n} = \frac{e^{i\,2\pi/n} dt}{1+t^n} \,.$$

Получили равенство

$$\int\limits_0^R \frac{dx}{1+x^n} \,+\, \int\limits_0^{2\pi/n} \frac{i\, R\, e^{i\,t} dt}{1+R^n e^{i\,nt}} \,+\, \int\limits_R^0 \frac{e^{i\,2\pi/n} dt}{1+t^n} = \frac{2\pi i}{n\, z_0^{n-1}} \,,$$

верное при любом значении $R > 1$. Выполнив в этом равенстве предельный переход при $R \to \infty$, получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \,+\, \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{2\pi/n} \frac{i\, R\, e^{i\,t} dt}{1+R^n e^{i\,nt}}}_{=\,0} - e^{i\,2\pi/n} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{n}\, e^{-i\,\pi(n-1)/n} \to$$

$$\to \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \cdot \left(1 - e^{i\,2\pi/n}\right) = -\,\frac{2\pi i}{n}\, e^{i\,\pi/n} \ \to$$

$$\to \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\left(e^{i\,\pi/n} - e^{-i\,\pi/n}\right)/(2i)} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \,.$$

2) Вычисление интеграла с использованием Бета-функции Эйлера.

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \left\{ x^n = t \ \to\ dx = \frac{1}{n}\, t^{1/n-1}\, dt \right\} = \frac{1}{n} \int\limits_0^\infty \frac{t^{1/n-1}\, dt}{1+t} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot B\left(\frac{1}{n}\,,\, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

Задача 48.6 (№4.119 [2]). Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2\,(z^2-9)}\,,$$

где C – окружность $|z|=1$, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении.

Р е ш е н и е:

$$\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2\,(z^2-9)} = \{\text{Изолированные особые точки функции}$$

$$f\,(z)=\frac{e^z}{z^2\,(z^2-9)}\,:\,z_1=0\ \text{(полюс 2-ого порядка)}\ ,\ z_{2,3}=\pm 3$$

$$\text{(полюса 1-ого порядка)}\ ,\ z_4=\infty\ \text{(существенно особая точка)}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \text{Внутри круга}\ |z|<1\ \text{находится точка}\ z_1=0\}=$$

$$=2\pi i\,\text{Выч}\,[f(z),z_1=0]=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2-9}\right)=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}e^z\cdot\frac{z^2-9-2z}{(z^2-9)^2}=-\frac{2\pi i}{9}$$

О т в е т:

$$\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2\,(z^2-9)}=-\frac{2\pi i}{9}$$

Задача 48.7 (№4.132 [2]). Вычислить определённый интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}\ \ (a>b>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}=\left\{z=e^{i\,\varphi}\ ,\ d\varphi=\frac{dz}{i\,z}\ ,\ \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}=$$

$$=-4i\oint\limits_{C\,:\,|z|=1}\frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2}=\left\{f\,(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}\right\}=$$

$$=8\pi\sum_k\text{Выч}\,[f\,(z)\,,z_k]\ ,\ \text{где}\ \ z_k\ -\ \text{изолированные особые точки}$$

функции $f(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

Выбор изолированных особых точек z_k:

$$f(z)=\frac{z}{\left(bz^2+2az+b\right)^2} \to bz^2+2az+b=0 \to$$

$$\to z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},\ z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \text{полюса 2-ого порядка,}$$

$$|z_1|=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}<1 - \text{находится внутри круга } |z|<1,$$

$$|z_2|=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}>1 - \text{находится вне круга } |z|<1.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=8\pi\,\text{Выч}\left[f(z),z_1\right]=$

$$=\frac{8\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)=-\frac{8\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{z+z_2}{(z-z_2)^3}=-\frac{8\pi}{b^2}\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3}=$$

$$=\frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}=\frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}$$

Задача 48.8 (№4.142 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$I_n=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad (n - \text{ натуральное число}).$$

Р е ш е н и е:

1) Заданный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода, так как

$$\frac{1}{(x^2+1)^n}\underset{|x|\gg 1}{=}O\left(\frac{1}{|x|^{2n}}\right) \quad \text{и} \quad x^2+1\neq 0 \quad \text{при} \quad -\infty<x<+\infty.$$

Особые точки функции $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n}$:

$z^2+1=0 \;\to\; z_1=i\,,\; z_2=-i$ - полюса n-ого порядка ,

$\operatorname{Im} z_1>0$ – точка z_1 в верхней полуплоскости .

Следовательно, $I_n=\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{(x^2+1)^n}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^n}=$

$$=\pi i\,\text{Выч}\left[f\left(z\right),z_1=i\right]\,.$$

Если $n=1$, то $I_1=\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x\big|_{x=0}^{x=\infty}=\dfrac{\pi}{2}\,.$

Если $n\geqslant 2$, то $I_n=\pi i\,\text{Выч}\left[f\left(z\right),i\right]=\dfrac{\pi i}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\dfrac{1}{(z+i)^n}\right)=$

$$=\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)=(-1)^k\cdot\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+(k-1))}{(z+i)^{n+k}}\right\}=$$

$$=\frac{\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to i}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+(n-2))}{(z+i)^{2n-1}}=$$

$$=\frac{\pi i}{(n-1)!}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+(n-2))}{2^{2n-1}\,i^{2n-1}}=$$

$$=\frac{\pi}{(n-1)!\,2^{n-1}}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(2n-2)}{2^n}=\frac{\pi}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,2^{n-1}\,2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\,.$$

2) $I_n=\int\limits_0^\infty\dfrac{du}{(u^2+1)^n}=\left\{u^2=t\;\to\;du=\dfrac{t^{-1/2}\,dt}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty\dfrac{t^{-1/2}\,dt}{(1+t)^n}=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{t^{1/2-1}\,dt}{(1+t)^n}=\left\{x=\frac{1}{2}\;\;,\;\;x+y=n\right\}=\frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{1}{2}\,,\;n-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{1}{2}\,,\;\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3/2}{n-1}\cdot B\left(\frac{1}{2}\,,\;n-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot B\left(\frac{1}{2}\,,\;\left(n-\frac{5}{2}\right)+1\right)=\cdots=\frac{(2n-3)\ldots3\cdot1}{(2n-2)\ldots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}\,;$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} \underset{n\geqslant 2}{=} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\,.$$

- -

3.9.2 Занятие 49

Вычисление несобственного интеграла 1-ого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx \ \ (\alpha > 0)$.

Интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\ dx = 2\pi i \sum\limits_{k} \text{Выч}\left[e^{i\alpha z} f(z), z_k\right]$,

где $f(z)$ – аналитическое продолжение функции $f(x)$ на комплексную плоскость z , z_k – изолированные особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости z $(\text{Im}\, z_k > 0)$ и функция $f(z)$ равномерно относительно $\arg z$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$ (см. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов Теория функций комплексной переменной (стр.128)) .

- -

Задача 49.1 (№4.149(1) [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10}\ .$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода (признак сходимости Дирихле-Абеля и $x^2 - 2x + 10 \neq 0$ при $-\infty < x < +\infty$).

Функция $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 10} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$.

Особые точки функции $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 10}$:

$z^2 - 2z + 10 = 0 \ \to\ z_1 = 1 + i\,3$, $z_2 = 1 - i\,3$ - полюса 1-ого порядка , $\text{Im}\, z_1 > 0 -$ точка z_1 в верхней полуплоскости .

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10} = \{\alpha = 1 > 0\} = \text{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)\ dx =$

$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Выч}\left[e^{iz} f(z), z_1\right]\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i\, e^{iz_1} \frac{z_1}{2z_1 - 2}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3\sin 1 + i(\sin 1 + 3\cos 1))\right) = \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3\sin 1).$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3}\, e^{-3} (\cos 1 - 3\sin 1)$$

- -

Задача 49.2 (№4.152 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\, \sin(ax)\, dx}{x^2 + b^2} \quad (a > 0\ ,\ b > 0)\ .$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\, \sin(ax)\, dx}{x^2 + b^2}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода (признак сходимости Дирихле-Абеля и $x^2 + b^2 \neq 0$ при $-\infty < x < +\infty$).

Функция $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + b^2} \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$

Особые точки функции $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + b^2}$:

$z^2 + b^2 = 0 \ \to\ z_1 = i\,b\ ,\ z_2 = -i\,b$ - полюса 1-ого порядка ,

$\operatorname{Im} z_1 > 0 -$ точка z_1 в верхней полуплоскости .

Следовательно, $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\, \sin(ax)\, dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \sin(ax)\, dx}{x^2 + b^2} =$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{x\, dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{Выч}\left[e^{iaz} f(z), z_1\right]\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i\, e^{iaz_1} \frac{z_1}{2z_1}\right) = \operatorname{Im}\left(\pi i\ e^{-ab} \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\, e^{-ab}\ .$$

О т в е т:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\, \sin(ax)\, dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-ab}$$

- -

Задача 49.3 (№4.153 [2]). Пусть $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ обладает следующими свойствами :

1) в верхней полуплоскости она имеет конечное число особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) аналитична во всех точках действительной оси, кроме точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$, являющихся простыми полюсами;

3) $F(z) \to 0$, если $z \to \infty$ и $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Доказать, что

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[f(z), a_k\right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \text{Выч}\left[f(z), x_k\right] \right),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (относительно всех точек x_k и ∞).

Р е ш е н и е:

Пусть $m = n = 1$.

Рассмотрим составной контур $C_* = C_R \cup C_2 \cup C_\rho^- \cup C_1$ (Рис.49.1).

$$\oint\limits_{C_*} f(z)\, dz = 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), a_1\right]$$

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \int\limits_{C_\rho^-} f(z)\,dz + \int\limits_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), a_1\right] \quad (*1)$$

Рассмотрим составной контур $C_{**} = C_R \cup C_2 \cup C_\rho^+ \cup C_1$.

$$\oint\limits_{C_{**}} f(z)\, dz = 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), a_1\right] + 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), x_1\right]$$

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \int\limits_{C_\rho^+} f(z)\,dz + \int\limits_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), a_1\right] + 2\pi i \,\text{Выч}\left[f(z), x_1\right] \quad (*2)$$

Полусумма соотношений $(*1)$ и $(*2)$ имеет вид

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_{C_\rho^-} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_{C_\rho^+} f(z)\,dz + \int\limits_{C_1} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), a_1\right] + \pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), x_1\right] \ (*3).$$

Параметризация контуров C_R, C_2, C_ρ^-, C_ρ^+ и C_1 :

$$C_R \ : \ z = R\,e^{i\,t} \ , \ t \in [0\,,\,\pi] \ \to \ dz = i\,R\,e^{i\,t}dt \ ;$$
$$C_2 \ : \ z = x \ , \ x \in [-R\,,\,x_1 - \rho] \ \to \ dz = dx \ ;$$
$$C_\rho^- \ : \ z = x_1 + \rho\,e^{i\,t} \ , \ t \in [\pi\,,\,0] \ \to \ dz = i\,\rho\,e^{i\,t}dt \ ;$$
$$C_\rho^+ \ : \ z = x_1 + \rho\,e^{i\,t} \ , \ t \in [-\pi\,,\,0] \ \to \ dz = i\,\rho\,e^{i\,t}dt \ ;$$
$$C_1 \ : \ z = x \ , \ x \in [x_1 + \rho\,,\,R] \ \to \ dz = dx \ .$$

Так как точка x_1 является полюсом 1-ого порядка, то в окрестности этой точки функция $f\left(z\right)$ представима в виде $f\left(z\right) = \dfrac{\Phi\left(z\right)}{z - x_1}$, где $\Phi\left(x_1\right) \neq 0$.

Тогда, равенство $(*3)$ принимает следующий вид

$$i \int\limits_0^\pi f\left(R\,e^{i\,t}\right) R\,e^{i\,t}dt \ + \int\limits_{-R}^{x_1-\rho} f\left(x\right) dx \ + \ \frac{i}{2} \int\limits_\pi^0 \Phi\left(x_1 + \rho\,e^{i\,t}\right) dt \ +$$
$$+ \ \frac{i}{2} \int\limits_{-\pi}^0 \Phi\left(x_1 + \rho\,e^{i\,t}\right) dt \ + \int\limits_{x_1+\rho}^R f\left(x\right) dx = 2\pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), a_1\right] +$$
$$+ \ \pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), x_1\right] \ .$$

Выполнив в последнем равенстве двойной предельный переход при $R \to \infty$ и $\rho \to 0$, получим

$$i \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\pi f\left(R\,e^{i\,t}\right) R\,e^{i\,t}dt}_{=0 \text{ (см. «лемма Жордана»)}} \ + \int\limits_{-\infty}^{x_1} f\left(x\right) dx \ - \ \frac{i}{2}\,\Phi\left(x_1\right)\,\pi \ + \ \frac{i}{2}\,\Phi\left(x_1\right)\,\pi \ +$$
$$+ \int\limits_{x_1}^\infty f\left(x\right) dx = 2\pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), a_1\right] \ + \ \pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), x_1\right] \ \to$$
$$\to \ v.p. \int\limits_{-\infty}^\infty f\left(x\right) dx = 2\pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), a_1\right] \ + \ \pi i \operatorname{Выч}\left[f\left(z\right), x_1\right] \ .$$

Если функция $f\left(z\right)$ в верхней полуплоскости имеет n особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а на действительной оси имеет m особых точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

являющихся простыми полюсами, то формула принимает вид

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\text{Выч}\left[f(z), z_k = a_k\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\text{Выч}\left[f(z), z_k = x_k\right]\right).$$

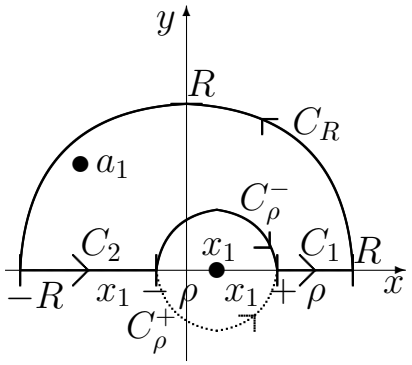

*Рис.*49.1

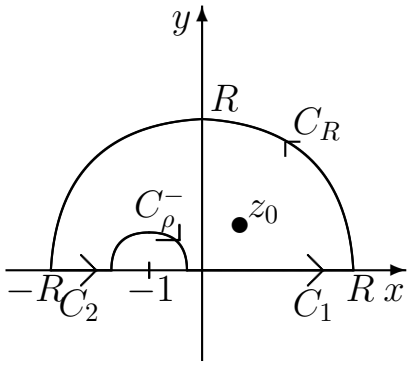

*Рис.*49.2

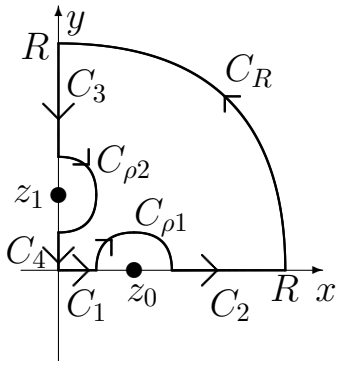

*Рис.*49.3

Задача 49.4 (№4.156 [2]). Найти главное значение интеграла

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}.$$

Р е ш е н и е:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)} = v.p.\,\text{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\frac{1}{(x^2+4)(x-1)}dx = \{\alpha = 1 > 0,$$

$(n=1)\ a_1 = i\,2$ – полюс 1-ого порядка , $(m=1)\ x_1 = 1$ – полюс 1-ого порядка $\} = \text{Im}\,2\pi\,i\left(\text{Выч}\left[e^{iz}\frac{1}{(z^2+4)(z-1)}, a_1\right] + \right.$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\text{Выч}\left[e^{iz}\frac{1}{(z^2+4)(z-1)}, x_1\right]\right) = \text{Im}\,2\pi\,i\left(e^{i\,a_1}\frac{1}{(a_1+2\,i)(a_1-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,e^{i\,x_1}\frac{1}{x_1^2+4}\right) = \text{Im}\,\pi\,i\left(-e^{-2}\frac{2-i}{10} + \frac{1}{5}\,(\cos 1 + i\,\sin 1)\right) =$$

$$= \text{Im}\,\pi\left(-e^{-2}\frac{1+2\,i}{10} + \frac{1}{5}\,(-\sin 1 + i\,\cos 1)\right) = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right).$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right)$$

Задача 49.5 (№4.157 [2]). Найти главное значение интеграла

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx\,dx}{1+x^3}\ \ (-\infty<t<\infty)\,.$$

Р е ш е н и е:

1) Пусть параметр $t>0$.

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx\,dx}{1+x^3}=v.p.\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\,tx}\,\frac{dx}{1+x^3}=\left\{F\,(z)=\frac{1}{1+z^3}\ \to\right.$$

$$\to\ 1+z^3=0\ \to\ z_k=e^{i\,(\pi+2\pi k)/3}\,,\ k=0,1,2\ \to\ z_0=e^{i\,\pi/3},\ \mathrm{Im}\,z_0>0,$$

$$a_1=z_0-\text{полюс 1-ого порядка}\ ,\ z_1=e^{i\,\pi}=-1,\ x_1=z_1-\text{полюс 1-ого}$$

$$\left.\text{порядка}\ ,\ z_2=e^{i\,5\pi/3}=e^{-i\,\pi/3}\,,\ \mathrm{Im}\,z_2<0\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\,2\pi\,i\left(\mathrm{Выч}\left[e^{i\,tz}\,\frac{1}{1+z^3},z_0\right]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Выч}\left[e^{i\,tz}\,\frac{1}{1+z^3},z_1\right]\right)=$$

$$=\mathrm{Re}\,2\pi\,i\left(e^{i\,tz_0}\,\frac{1}{3\,z_0^2}+\frac{1}{2}\,e^{i\,tz_1}\,\frac{1}{3\,z_1^2}\right)=\mathrm{Re}\,2\pi\,i\left(-\frac{1}{6}\,e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{t}{2}+\right.\right.$$

$$\left.+i\,\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+i\,\sqrt{3}\right)+\frac{1}{6}\,(\cos t-i\,\sin t)\Bigg)=$$

$$=\mathrm{Re}\,2\pi\,i\left(-\frac{1}{6}\,e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sqrt{3}\,\sin\frac{t}{2}+i\,\left(\sqrt{3}\,\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\,(\cos t-i\,\sin t)\right)=\mathrm{Re}\,\frac{\pi}{3}\,\left(e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\,\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)+\sin t+\right.$$

$$\left.+i\,\left(-e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sqrt{3}\,\sin\frac{t}{2}\right)+\cos t\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\,\left(e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\,\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)+\sin t\right)$$

2) Пусть параметр $t<0$.

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx\,dx}{1+x^3}=v.p.\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\,tx}\,\frac{dx}{1+x^3}=\{\text{При } t<0 \text{ рассматривается}$$

аналитическое продолжение функции $F\,(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ на нижнюю комплексную полуплоскость и аналогично № 4.153 [2] доказывается

равенство, следующее далее.\} =

$$= -\operatorname{Re} 2\pi\, i \left(\text{Выч} \left[e^{i\,tz}\, \frac{1}{1+z^3}, z_2 \right] + \frac{1}{2}\, \text{Выч} \left[e^{i\,tz}\, \frac{1}{1+z^3}, z_1 \right] \right) = \cdots =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(e^{t\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{3}\, \cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} \right) - \sin t \right)$$

3) Пусть параметр $t = 0$. Заданный интеграл имеет вид $v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$.

Особые точки функции $F(z) = \dfrac{1}{1+z^3}$:

$z^3 + 1 = 0 \;\to\; z_k = e^{i\,(\pi+2\pi k)/3}$, $k = 0, 1, 2 \;\to\; z_0 = e^{i\,\pi/3}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$,
z_0 – полюс 1-ого порядка , $z_1 = e^{i\,\pi} = -1$, z_1 – полюс 1-ого порядка ,
$z_2 = e^{i\,5\pi/3} = e^{-i\,\pi/3}$, $\operatorname{Im} z_2 < 0$.

Рассмотрим составной контур $C = C_R \cup C_2 \cup C_\rho^- \cup C_1$ (Рис.49.2).

$$\oint\limits_C \frac{dz}{1+z^3} = 2\pi i\, \text{Выч}\left[F(z), z_0 \right]$$

$$\int\limits_{C_R} F(z)\, dz + \int\limits_{C_2} F(z)\, dz + \int\limits_{C_\rho^-} F(z)\, dz + \int\limits_{C_1} F(z)\, dz = 2\pi i\, \text{Выч}\left[F(z), z_0 \right] \quad (*)$$

Параметризация контуров C_R, C_2, C_ρ^- и C_1 :

C_R : $z = R\, e^{i\,t}$, $t \in [0, \pi] \;\to\; dz = i\, R\, e^{i\,t} dt$;
C_2 : $z = x$, $x \in [-R, -1-\rho] \;\to\; dz = dx$;
C_ρ^- : $z = -1 + \rho\, e^{i\,t}$, $t \in [\pi, 0] \;\to\; dz = i\, \rho\, e^{i\,t} dt$;
C_1 : $z = x$, $x \in [-1+\rho, R] \;\to\; dz = dx$.

Тогда, равенство $(*)$ принимает следующий вид

$$i \int\limits_0^\pi \frac{R\, e^{i\,t} dt}{1 + R^3\, e^{i\,3t}} + \int\limits_{-R}^{-1-\rho} \frac{dx}{1+x^3} + i \int\limits_\pi^0 \frac{dt}{3 - 3\rho\, e^{i\,t} + \rho^2\, e^{i\,2t}} + \int\limits_{-1+\rho}^{R} \frac{dx}{1+x^3} =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1 + i\,\sqrt{3}}{6} \right) .$$

Выполнив в последнем равенстве двойной предельный переход при $R \to \infty$ и $\rho \to 0$, получим

$$i \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{\pi} \frac{R\,e^{it}dt}{1+R^3\,e^{i\,3t}}}_{=0} + v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3} + i \underbrace{\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{dt}{3-3\rho\,e^{i\,t}+\rho^2\,e^{i\,2t}}}_{=-i\,\pi/3} =$$

$$= -\,\pi i\,\frac{1+i\sqrt{3}}{3} \;\to$$

$$\to\; v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\;.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx\,dx}{1+x^3} = \frac{\pi}{3}\,\left(e^{-|t|\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\,\cos\frac{t}{2}\,+\,\sin\frac{|t|}{2}\right)\,+\,\sin|t|\right)\;\;(-\infty<t<\infty)$$

- -

Задача 49.6 (№4.176 [2]). Вычислить главное значение интеграла

$$v.p.\int\limits_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^4-1}\;\;.$$

Р е ш е н и е:

Пусть $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$. Особые точки функции $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$:

$z^4-1=0\;\to\; z_k=e^{i\,\pi k/2}\,,\; k=0,1,2,3\;\to\; z_0=1$ (полюс 1-ого порядка), $z_1=i$ (полюс 1-ого порядка), $z_2=-1$ (полюс 1-ого порядка), $z_3=-i$ (полюс 1-ого порядка) .

Рассмотрим составной контур $C = C_1\cup C_{\rho 1}\cup C_2\cup C_R\cup C_3\cup C_{\rho 2}\cup C_4$ (Рис.49.3).

$$\oint\limits_C f(z)\;dz = 0\;\to$$

$$\to\int\limits_{C_1} f(z)\,dz+\int\limits_{C_{\rho 1}} f(z)\,dz+\int\limits_{C_2} f(z)\,dz+\int\limits_{C_R} f(z)\,dz+\int\limits_{C_3} f(z)\,dz+$$

$$+\int\limits_{C_{\rho 2}} f(z)\,dz+\int\limits_{C_4} f(z)\,dz = 0\;\;(*)$$

Параметризация контуров C_1 , $C_{\rho 1}$, C_2 , C_R , C_3 , $C_{\rho 2}$ и C_4 :

$$C_1 \ : \ z = x \ , \ x \in [0\,, \, 1-\rho 1] \ \to \ dz = dx \ \ ;$$
$$C_{\rho 1} \ : \ z = 1 + \rho 1 \cdot e^{i\,t} \ , \ t \in [\pi\,, \, 0] \ \to \ dz = i\,\rho 1 \cdot e^{i\,t} dt \ \ ;$$
$$C_2 \ : \ z = x \ , \ x \in [1+\rho 1\,, \, R] \ \to \ dz = dx \ \ ;$$
$$C_R \ : \ z = R\,e^{i\,t} \ , \ t \in [0\,, \, \pi/2] \ \to \ dz = i\,R\,e^{i\,t} dt \ \ ;$$
$$C_3 \ : \ z = i\,x \ , \ x \in [R\,, \, 1+\rho 2] \ \to \ dz = i\,dx \ \ ;$$
$$C_{\rho 2} \ : \ z = i + \rho 2 \cdot e^{i\,t} \ , \ t \in [\pi/2\,, \, -\pi/2] \ \to \ dz = i\,\rho 2 \cdot e^{i\,t} dt \ \ ;$$
$$C_4 \ : \ z = i\,x \ , \ x \in [1-\rho 2\,, \, 0] \ \to \ dz = i\,dx \ \ .$$

Тогда, равенство $(*)$ принимает следующий вид

$$\int\limits_0^{1-\rho 1} \frac{x\,dx}{x^4-1} \ + \ i \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\left(1+\rho 1 \cdot e^{i\,t}\right)\,dt}{4 + 6\,\rho 1 \cdot e^{i\,t} + 4\,\rho 1^2 \cdot e^{i\,2t} + \rho 1^3 \cdot e^{i\,3t}} +$$
$$+ \int\limits_{1+\rho 1}^{R} \frac{x\,dx}{x^4-1} \ + \ i \int\limits_0^{\pi/2} \frac{R^2\,e^{i\,2t}\,dt}{R^4\,e^{i\,4t}-1} \ - \ \int\limits_R^{1+\rho 2} \frac{x\,dx}{x^4-1} +$$
$$+ \ i \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\left(i+\rho 2 \cdot e^{i\,t}\right)\,dt}{-i\,4 - 6\,\rho 2 \cdot e^{i\,t} + i\,4\,\rho 2^2 \cdot e^{i\,2t} + \rho 2^3 \cdot e^{i\,3t}} \ - \int\limits_{1-\rho 2}^{0} \frac{x\,dx}{x^4-1} = 0 \ .$$

Выполнив в последнем равенстве предельный переход при $R \to \infty$, $\rho 1 \to 0$ и $\rho 2 \to 0$, получим

$$v.p. \int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4-1} \ - \ \frac{i\,\pi}{4} + \ \underbrace{i \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{R^2\,e^{i\,2t}\,dt}{R^4\,e^{i\,4t}-1}}_{=\,0} + v.p. \int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4-1} + \ \frac{i\,\pi}{4} = 0 \ \to$$
$$\to \ v.p. \int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4-1} = 0 \ .$$

О т в е т:

$$v.p. \int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4-1} = 0$$

\- -

Задача 49.7 (№4.150 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin x\,dx}{x^2+4x+20}\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода (признак сходимости Дирихле-Абеля и

$x^2+4x+20\neq 0$ при $-\infty<x<+\infty$).

Функция $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4z+20} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ равномерно по $\arg z$.

Особые точки функции $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4z+20}$:

$z^2+4z+20=0 \;\to\; z_1=-2+i\,4\,,\; z_2=-2-i\,4$ - полюса 1-ого порядка ,

$\operatorname{Im} z_1>0-$ точка z_1 в верхней полуплоскости .

$$\text{Следовательно, } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin x\,dx}{x^2+4x+20} = \operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,f(x)\,dx = \{\alpha=1>0\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i\,\text{Выч}\left[e^{iz}\,f(z)\,,z_1\right]\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i\,e^{iz_1}\,\frac{z_1}{2z_1+4}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{2}\,e^{-4}\,(\cos 2-i\,\sin 2)\,(-1+i\,2)\right) = \frac{\pi}{2}\,e^{-4}\,(2\cos 2+\sin 2)\,.$$

О т в е т:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin x\,dx}{x^2+4x+20} = \frac{\pi}{2}\,e^{-4}\,(2\cos 2+\sin 2)$$

- -

Задача 49.8 (№4.151 [2]). Вычислить несобственный интеграл 1-ого рода

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2+b^2}\;\;(a\,,\;b>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданный интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2+b^2}$ является сходящимся несобственным интегралом 1-ого рода (признак сходимости Дирихле-Абеля и $x^2+b^2\neq 0$ при $-\infty<x<+\infty$).

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + b^2} \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0$ равномерно по $\arg z$.

Особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + b^2}$:

$z^2 + b^2 = 0 \;\to\; z_1 = i\,b\,,\; z_2 = -i\,b$ - полюса 1-ого порядка ,
$\operatorname{Im} z_1 > 0 -$ точка z_1 в верхней полуплоскости .

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2 + b^2} =$

$$= \frac{1}{2}\,\operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\,\frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2}\,\operatorname{Re}\left(2\pi i\,\text{Выч}\left[e^{iaz}\,\frac{1}{z^2 + b^2}, z_1\right]\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\pi i\,e^{iaz_1}\,\frac{1}{2z_1}\right) = \operatorname{Re}\left(\pi i\;e^{-ab}\,\frac{1}{2i\,b}\right) = \frac{\pi}{2b}\,e^{-ab}\ .$$

О т в е т:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b}\,e^{-ab} \quad (a, b > 0)\ .$$

- -

3.10 Преобразование Лапласа

3.10.1 Занятие 50

Пусть для функции $f(t)$ действительной переменной $-\infty < t < +\infty$ выполнены условия:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ непрерывна на любом отрезке действительной оси, кроме конечного числа точек, в которых $f(t)$ может иметь разрыв первого рода ;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $a > 0$, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < M e^{at}$.

Точная нижняя грань констант $a > 0$, для которых выполняется последнее неравенство, называется показателем степени роста функции $f(t)$.

Определение. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексной переменной p, равная

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt .$$

Областью определения функции $F(p)$ является правая полуплоскость $\operatorname{Re} p > a^*$, где a^*- показатель степени роста функции $f(t)$.

Функция $F(p)$, определённая через функцию $f(t)$ с помощью преобразования Лапласа, называется изображением Лапласа функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется оригиналом функции $F(p)$. Для обозначения связи функций $f(t)$ и $F(p)$ используется символ $f(t) \doteq F(p)$.

Восстановление оригинала по изображению.

Теорема (формула Меллина). Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$ является изображением функции $f(t)$, имеющей показатель степени роста равный a. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp , \quad x > a .$$

Теорема (достаточные условия существования оригинала). Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ удовлетворяет условиям:

1) $F(p) -$ аналитическая функция в области $\operatorname{Re} p > a$;

2) в области $\operatorname{Re} p > a$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$;

3) для всех $\operatorname{Re} p = x > a$ сходится интеграл

$$\int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} |F(p)|\, dy < M \quad .$$

Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является изображением функции $f(t)$, которая есть

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} e^{pt}\, F(p)\, dp \;, \quad x > a \;.$$

Свойства оригиналов и изображений Лапласа.

1) Пусть $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > a_1$ и $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > a_2$. Тогда $\beta_1 \cdot f_1(t) + \beta_2 \cdot f_2(t) \doteqdot \beta_1 \cdot F_1(p) + \beta_2 \cdot F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$ для любых констант β_1, β_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$\beta_1 \cdot f_1(t) + \beta_2 \cdot f_2(t) \doteqdot \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\, (\beta_1 \cdot f_1(t) + \beta_2 \cdot f_2(t))\, dt =$$

$$= \beta_1 \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\, f_1(t)\, dt + \beta_2 \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\, f_2(t)\, dt = \beta_1 \cdot F_1(p) + \beta_2 \cdot F_2(p)$$

при $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$.

2) Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ и параметр $\beta > 0$.

Тогда $f(\beta\, t) \doteqdot \dfrac{1}{\beta}\, F\left(\dfrac{p}{\beta}\right)$ при $\operatorname{Re} p > \beta\, a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$f(\beta\, t) \doteqdot \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\, f(\beta\, t)\, dt = \left\{ \beta\, t = \tau \;,\; dt = \frac{d\tau}{\beta} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \int\limits_0^{\infty} e^{-(p/\beta)\tau}\, f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\beta}\, F\left(\frac{p}{\beta}\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > \beta\, a\,.$$

3) Пусть $f(t) \doteq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ и рассматривается функция

$$f_1(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } t < \tau \text{ где } \tau > 0\,; \\ f(t-\tau)\,, & \text{при } t \geqslant \tau \end{cases}.$$

Тогда $f_1(t) \doteq e^{-p\tau} F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство:

$$f_1(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t)\, dt = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\, dt = \left\{ t - \tau = t',\ dt = dt' \right\} =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pt'} f\left(t'\right) dt' = e^{-p\tau} F(p) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > a\,.$$

4) Пусть $f(t) \doteq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Тогда для любого комплексного числа λ верно следующее равенство $e^{-\lambda t} f(t) \doteq F(p+\lambda)$ при $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda$.

Доказательство:

$$e^{-\lambda t} f(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} f(t)\, dt = F(p+\lambda)$$

$$\text{при} \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda\,.$$

5) Пусть функция $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \doteq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Тогда $f'(t) \doteq p\,F(p) - f(0)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство:

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, d\left(f(t)\right) = e^{-pt} f(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} +$$

$$+ p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = p\,F(p) - f(0) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda\,.$$

Обобщением данного свойства является следующее утверждение. Если функция $f^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \doteq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f^{(2)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

при $\operatorname{Re} p > a$.

6) Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Тогда $F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n\, t^n f(t)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство:

Так как $F(p)$ является в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a^*$ аналитической функцией, то её можно дифференцировать по p.

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \{\text{Возможно дифференцирование под знаком интеграла, так как интеграл сходится равномерно относительно } p \text{ в любой полуплоскости } \operatorname{Re} p \geqslant a > a^*\} =$$

$$= -\int\limits_0^\infty t\, f(t)\, e^{-pt}\, dt\ ,\ F^{(2)}(p) = \int\limits_0^\infty t^2 f(t)\, e^{-pt}\, dt\ ,\ \ldots$$

$$\ldots\ ,\ F^{(n)}(p) = (-1)^n \int\limits_0^\infty t^n f(t)\, e^{-pt}\, dt \ \to\ F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n\, t^n f(t)$$

7) Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Тогда $\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \dfrac{1}{p} F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство:

Так как функция $f(t)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является оригиналом, то и функция $f_1(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$ так же является оригиналом для своего изображения $F_1(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$. Функция $f_1(t)$ удовлетворяет условиям $f_1'(t) = f(t)$ и $f_1(0) = 0$. Тогда (см. свойство «5»)

$$f(t) = f_1'(t) \doteqdot p\, F_1(p) - f_1(0) = F(p) \ \to$$

$$\to\ F_1(p) = \frac{1}{p} F(p) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > a\ .$$

8) Свёрткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\ f_2(\tau)\ d\tau\,.$$

Пусть $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > a_1$ и $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > a_2$.

Тогда

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau \doteq F_1(p)\ F_2(p)$$

при $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Свёртка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с ограниченной степенью роста является функцией с ограниченной степенью роста, равной наибольшей степени роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, и удовлетворяет условиям существования изображения. Тогда

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau \doteq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau =$$

$$= \{\text{Возможно изменение порядка интегрирования в повторном интеграле, так как однократные внутренние интегралы сходятся абсолютно}\} = \int_0^\infty f_1(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \{\text{Замена переменной во внутреннем интеграле : } t-\tau = t'\ ,\ dt = dt'\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-pt'} f_2(t')\, dt' = F_1(p)\ F_2(p)\ .$$

9) Изображение единичной функции Хевисайда.

Пусть функция $\sigma(t) = \begin{cases} 0\ , \text{ если } t < 0\ ; \\ 1\ , \text{ если } t \geqslant 0 \end{cases}$.

Тогда $\sigma(t) \doteq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p > 0$.

- -

Задача 50.1 (№3(4) [3]). Используя свойства изображений, найти изображение Лапласа функции $\operatorname{ch} ax$.

Р е ш е н и е:

$$\operatorname{ch} ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = \frac{1}{2} e^{ax}\, \sigma(x) + \frac{1}{2} e^{-ax}\, \sigma(x) \doteq \frac{1}{2} \frac{1}{p-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+a} =$$

$$= \frac{p}{p^2 - a^2} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > a\ .$$

О т в е т:

$$\operatorname{ch} ax \doteq \frac{p}{p^2 - a^2}$$

Задача 50.2 (№4(1) [3]). Найти изображение функции $\sin^4 x$.

Р е ш е н и е:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\right)^4 = \frac{1}{16}\,\left(e^{i\,4x} - 4\,e^{i\,2x} + 6 - 4\,e^{-i\,2x} + e^{-i\,4x}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\,\left(e^{i\,4x}\,\sigma\,(x) - 4\,e^{i\,2x}\,\sigma\,(x) + 6\,\sigma\,(x) - 4\,e^{-i\,2x}\,\sigma\,(x) + e^{-i\,4x}\,\sigma\,(x)\right) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{16}\left(\frac{1}{p-4i} - \frac{4}{p-2i} + \frac{6}{p} - \frac{4}{p+2i} + \frac{1}{p+4i}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{4\,p}{p^2+4} + \frac{3}{p}\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > 0\ .$$

О т в е т:

$$\sin^4 x \doteqdot \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{4\,p}{p^2+4} + \frac{3}{p}\right)$$

Задача 50.3 (№5(1,6) [3]). Найти изображения функций :

1) $e^{ax}\,\sin bx$;

6) $\operatorname{sh} x\,\cos 2x\,\cos 3x$.

Р е ш е н и е:

1) Изображение Лапласа функции $\sin bx$ имеет вид

$$\sin bx = \frac{e^{i\,bx} - e^{-i\,bx}}{2\,i} = \frac{1}{2i}\,e^{i\,bx}\,\sigma\,(x) - \frac{1}{2i}\,e^{-i\,bx}\,\sigma\,(x) \doteqdot \frac{1}{2i}\,\frac{1}{p - i\,b} -$$

$$- \frac{1}{2i}\,\frac{1}{p + i\,b} = \frac{b}{p^2 + b^2} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > 0\ .$$

Тогда

$$e^{ax}\,\sin bx \doteqdot \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > a\ .$$

6) Преобразуем заданную функцию

$$\operatorname{sh} x\,\cos 2x\,\cos 3x = \operatorname{sh} x\,\frac{1}{2}\,(\cos 5x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\left(e^x - e^{-x}\right)\,(\cos 5x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\left(e^x\,\cos 5x + e^x\,\cos x - e^{-x}\,\cos 5x - e^{-x}\,\cos x\right)\ .$$

Изображение Лапласа функции $\cos bx$ имеет вид

$$\cos bx = \frac{e^{i\,bx} + e^{-i\,bx}}{2} = \frac{1}{2}\,e^{i\,bx}\,\sigma\,(x) + \frac{1}{2}\,e^{-i\,bx}\,\sigma\,(x) \doteq \frac{1}{2}\,\frac{1}{p - i\,b} + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p + i\,b} = \frac{p}{p^2 + b^2} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > 0\ .$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\left(e^x\,\cos 5x + e^x\,\cos x - e^{-x}\,\cos 5x - e^{-x}\,\cos x\right) \doteq \\ \doteq \frac{1}{4}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2 + 25} + \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 25} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}\right)\ .$$

О т в е т:

1) $e^{ax}\,\sin bx \doteq \dfrac{b}{(p-a)^2 + b^2}$;

6) $\operatorname{sh} x\,\cos 2x\,\cos 3x \doteq$

$$\doteq \frac{1}{4}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2 + 25} + \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 25} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}\right)\ .$$

Задача 50.4 (№6(1,2) [3]). Найти изображения функций :

1) $x\,\cos bx$;

2) $x^2\,\sin bx$.

Р е ш е н и е:

1) Так как

$$\cos bx \doteq F\,(p) = \frac{p}{p^2 + b^2}$$

при $\operatorname{Re} p > 0$, то

$$x\,\cos bx \doteq -F'\,(p) = -\left(\frac{p}{p^2 + b^2}\right)' = \frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}\,.$$

2) Так как

$$\sin bx \doteq F\,(p) = \frac{b}{p^2 + b^2}$$

при $\operatorname{Re} p > 0$, то

$$x^2 \sin bx \risingdotseq F^{(2)}(p) = -\left(\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}\right)' = 2b\,\frac{3p^2-b^2}{(p^2+b^2)^3}\,.$$

О т в е т:

$$1)\ \ x\,\cos bx \risingdotseq \frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}\ ;$$

$$2)\ \ x^2\,\sin bx \risingdotseq 2b\,\frac{3p^2-b^2}{(p^2+b^2)^3}\,.$$

- -

Задача 50.5 (№7(3) [3]). Найти изображение функции

$$f(ax-b)\quad (a,b>0)\,.$$

Р е ш е н и е:

Пусть функция $f(x) \risingdotseq F(p)$.

Тогда

$$f(ax-b) = f\left(a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right) \risingdotseq e^{-pb/a}\,\frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)\,.$$

О т в е т:

$$f(ax-b) \risingdotseq \frac{1}{a}\,e^{-pb/a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)$$

- -

Задача 50.6 (№12(1) [3]). Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\,(p-2)}\,,\quad \operatorname{Re} p > 2\,.$$

Р е ш е н и е:

1) Используем формулу Меллина.

Пусть функция $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда

$$f(t) = \{\text{Формула Меллина при } x>2\} = \frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} e^{pt}\,F(p)\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} e^{pt}\,\frac{1}{(p-1)\,(p-2)}\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,i}\left(2\pi i\sum_{k=1}\text{Выч}\left[e^{pt}\,\frac{1}{(p-1)\,(p-2)}, p_k\right]\right) = \{p_k - \text{изолированные}$$

особые точки функции $F(p)$ в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < 2$:
$p_1 = 1\,,\ p_2 = 2$ – полюса первого порядка$\}$ =

$$= \text{Выч}\left[e^{pt}\,\frac{1}{(p-1)\,(p-2)}, 1\right] + \text{Выч}\left[e^{pt}\,\frac{1}{(p-1)\,(p-2)}, 2\right] = -e^t + e^{2t}.$$

2) Используем свойства оригиналов и изображений.

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\,(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1} \doteqdot e^{2t}\,\sigma(t) - e^t\,\sigma(t) =$$

$$= e^{2t} - e^t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

О т в е т:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\,(p-2)} \doteqdot e^{2t} - e^t$$

- -

Задача 50.7 (№15(2) [3]). Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p+2)^2}\,.$$

Р е ш е н и е:

Заданная функция

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p+2)^2} = F_1(p)\cdot F_2(p)\ , \quad \text{где} \quad F_1(p) = \frac{1}{p+1}\ ,$$

$$F_2(p) = \frac{1}{(p+2)^2}\,.$$

Так как

$$F_1(p) = \frac{1}{p+1} \doteqdot e^{-t} = f_1(t) \quad \text{и} \quad F_2(p) = \frac{1}{(p+2)^2} = -\left(\frac{1}{p+2}\right)' \doteqdot$$

$$\doteqdot t\,e^{-2t} = f_2(t) \quad (\text{см. свойство 6}))\ ,\ \text{то (см. свойство 8)})$$

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\ f_2(\tau)\ d\tau = \int\limits_0^t e^{-t+\tau}\,\tau\,e^{-2\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{-t}\int\limits_0^t \tau\,e^{-\tau}\,d\tau = e^{-t}\left(-\tau\,e^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int\limits_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right) =$$

$$= e^{-t}\left(-t\,e^{-t} - e^{-t} + 1\right) = e^{-t} - e^{-2t} - t\,e^{-2t}\,.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{(p+1)\,(p+2)^2} \risingdotseq e^{-t} - e^{-2t} - t\,e^{-2t}$$

- -

Задача 50.8 (№37 [3]). Найти изображения Лапласа функций, заданных графически:

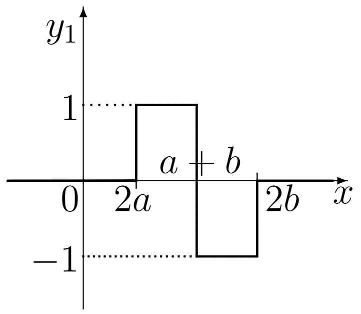

*Рис.*50.1

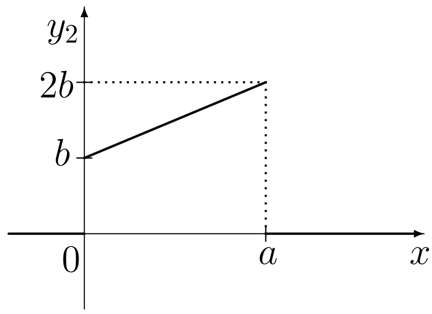

*Рис.*50.2

Р е ш е н и е:

1) Используя функцию Хевисайда, запишем функцию $y_1(x)$ (Рис.50.1) в виде

$$y_1(x) = \sigma(x-2a) \,-\, 2\,\sigma(x-a-b) \,+\, \sigma(x-2b)\ .$$

Тогда

$$y_1 \risingdotseq e^{-2ap}\,\frac{1}{p} - 2\,e^{-(a+b)p}\,\frac{1}{p} + e^{-2bp}\,\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\,\left(e^{-2ap} - 2\,e^{-ap}\,e^{-bp} + e^{-2bp}\right) =$$

$$= \frac{\left(e^{-ap} \,-\, e^{-bp}\right)^2}{p}\ .$$

2) Запишем функцию $y_2(x)$ (Рис.50.2) в виде

$$y_2(x) = \left(\frac{b}{a}\,x + b\right)\cdot\Big(\sigma(x) - \sigma(x-a)\Big)\,.$$

Тогда

$$y_2(x) = \frac{b}{a}\,x\,\sigma(x) + b\,\sigma(x) - \frac{b}{a}\,x\,\sigma(x-a) - b\,\sigma(x-a) =$$

$$= \frac{b}{a}\,x\,\sigma(x) + b\,\sigma(x) - \frac{b}{a}\,(x-a)\,\sigma(x-a) - 2b\,\sigma(x-a) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{p}\right)' + \frac{b}{p} + \frac{b}{a}\,e^{-ap}\,\left(\frac{1}{p}\right)' -\, 2b\;e^{-ap}\,\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{1}{p^2} + \frac{b}{p} - \frac{b}{a}\,e^{-ap}\,\frac{1}{p^2} -\, e^{-ap}\,\frac{2b}{p} = \frac{b}{a}\,\frac{1 \,-\, e^{-ap}}{p^2} +\, b\,\frac{1 \,-\, 2\,e^{-ap}}{p}\ .$$

О т в е т:

$$1)\quad y_1(x) \doteqdot \frac{\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)^2}{p}\ ;$$

$$2)\quad y_2(x) \doteqdot \frac{b}{a}\frac{1 - e^{-ap}}{p^2} + b\frac{1 - 2e^{-ap}}{p}\ .$$

- -

Задача 50.9 (№50(2) [3]). Найти частное решение уравнения

$$y'' + y = \sin 2x\,,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е:

Пусть $y(x) \doteqdot Y(p)$.

Так как $y''(x) \doteqdot p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$ (свойство 5)) и $y(0) = y'(0) = 0$, то $y''(x) \doteqdot p^2 Y(p)$. Функция $\sin 2x \doteqdot \dfrac{2}{p^2+4}$.

Тогда

$$y'' + y = \sin 2x \doteqdot p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{2}{p^2+4} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(p) = \frac{2}{(p^2+4)(p^2+1)} = -\frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4} + \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+1} \doteqdot -\frac{1}{3}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin x.$$

О т в е т:

$$y(x) = \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

- -

Задача 50.10 (№53(3) [3]). Найти частные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y' + 7y - z = 0\ ; \\ z' + 2y + 5z = 0\ ; \\ y(0) = z(0) = 1\ . \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

Пусть $y(x) \doteqdot Y(p)$ и $z(x) \doteqdot Z(p)$.

Тогда

$$\begin{cases} y' + 7y - z = 0\ ; \\ z' + 2y + 5z = 0\ ; \\ y(0) = z(0) = 1 \end{cases} \quad \doteqdot \begin{cases} pY(p) - y(0) + 7Y(p) - Z(p) = 0\ ; \\ pZ(p) - z(0) + 2Y(p) + 5Z(p) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (p+7)\ Y(p) - Z(p) = 1 \ ; \\ 2\,Y(p) + (p+5)\ Z(p) = 1 \end{cases} ,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+7 & -1 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = p^2 + 12p + 37 = (p+6)^2 + 1 \ ,$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & p+5 \end{vmatrix} = p+6 \ , \qquad \Delta_Z = \begin{vmatrix} p+7 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (p+6) - 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p+6}{(p+6)^2+1} \doteq e^{-6x}\cos x = y(x) \ ,$$

$$Z(p) = \frac{\Delta_Z}{\Delta} = \frac{p+6}{(p+6)^2+1} - \frac{1}{(p+6)^2+1} \doteq e^{-6x}\cos x - e^{-6x}\sin x = z(x) \, .$$

Ответ:

$$y(x) = e^{-6x}\cos x$$

$$z(x) = e^{-6x}\cos x - e^{-6x}\sin x$$

- -

Литература

[1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Астрель, 2009.

[2] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[3] Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1976.

Учебное издание

СОСНИН Николай Васильевич

КОНСПЕКТ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебно-методическое пособие

Отпечатано с готового оригинал-макета.
Подписано в печать 06.06.2023 г. Заказ №1171.
Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л.31,7.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Тираж 40 экз.

ISBN 978-5-9216-2440-5