

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**ПАМЯТИ АКАДЕМИКА А.А.САМАРСКОГО  
К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ**

**МОСКВА,**

**18-20 ИЮНЯ 2019 ГОДА**

**МОСКВА - 2019**

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### ЧЛЕНЫ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:

- АКАДЕМИК РАН В.А. САДОВНИЧИЙ,
- АКАДЕМИК РАН Е.И. МОИСЕЕВ,
- АКАДЕМИК РАН Б.Н. ЧЕТВЕРУШКИН,
- АКАДЕМИК РАН А.С. БУГАЕВ,
- АКАДЕМИК РАН А.Н. КОНОВАЛОВ,
- АКАДЕМИК РАН Е.Е. ТЫРТЫШНИКОВ,
- ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН В.Ф. ТИШКИН,
- ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ РАН А.И. АПТЕКАРЕВ.

Конференция проводится при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований.  
Проект №19-01-20026.

SCIENTIFIC COMMITTEE OF THE CONFERENCE

## CONTEMPORARY PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS

### MEMBERS OF THE SCIENTIFIC COMMITTEE

- FULL MEMBER OF RAS V.A. SADOVNICHII,
- FULL MEMBER OF RAS E.I. MOISEEV,
- FULL MEMBER OF RAS B.N. CHETVERUSHKIN
- FULL MEMBER OF RAS A.S. BUGAEV,
- FULL MEMBER OF RAS A.N. KONOVALOV,
- FULL MEMBER OF RAS E.E. TYRTYSHNIKOV,
- CORRESPONDING MEMBER OF RAS V.F. TISHKIN,
- CORRESPONDING MEMBER OF RAS A.I. APTEKAREV .

The International Conference supported  
by Russian Foundation of Basic Research.  
Project №19-01-20026.

*К столетию  
со дня рождения академика  
А.А. Самарского*



*A.A. Самарский  
19.02.1919 - 11.02.2008*



ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
МГУ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

---

## МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПАМЯТИ АКАДЕМИКА А.А.САМАРСКОГО  
К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

## ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

---

## INTERNATIONAL CONFERENCE

---

# CONTEMPORARY PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS

IN MEMORY OF THE ACADEMICIAN ALEXANDER A. SAMARSKII  
ON OCCASION OF HIS 100-TH ANNIVERSARY

## ABSTRACTS

МОСКВА, 18-20 июня 2019 года

УДК 519.6

ББК 22.19

Т46

Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 18-20 июня 2019 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 2019, – \_\_\_\_ стр.

*Компьютерная верстка:  
Ильютко В.П.*

ISBN 978-5-89407-602-7

© Факультет ВМК  
МГУ имени М.В.Ломоносова, 2019  
© Коллектив авторов, 2019

# Оглавление

---

## Секция. Уравнения математической физики

---

Pohozhaev identities for semi-linear elliptic-hyperbolic equations and for fractional laplacian Popivanov N. I. . . . .	12
Inverse medium problem for singular contrast Serov V. S. . . . .	14
Асимптотика решения уравнения переноса излучения в многослойной среде с условиями диффузного отражения и преломления Амосов А. А. . . . .	16
Асимптотики решений неоднородных стационарных скалярных и векторных уравнений с локализованными правыми частями Аникин А. Ю., Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е. . . . .	18
О единственности решения задачи Бицадзе–Самарского для параболических систем в плоских негладких областях Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. . . . .	19
О решении одной обратной задачи рассеяния в нестационарной среде Баев А. В. . . . .	20
О некоторых проблемах конструктивной теории гармонических секток Безродных С. И., Власов В. И. . . . .	21
О разрешимости задачи Римана теории аналитических функций в весовых классах Смирнова с весом общего вида Билалов Б. Т. . . . .	23
О сингулярно возмущенных уравнениях типа реакция-диффузия-адвекция Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. . . . .	25
Спектральный анализ операторных моделей линейной вязкоупругости Власов В. В. . . . .	27
Обратные коэффициентные задачи для гиперболических уравнений Денисов А. М. . . . .	28
О стабилизации решений параболических уравнений с растущими коэффициентами Денисов В. Н. . . . .	29

---

Краевая задача для интегро-функционального уравнения смешанного типа <i>Зарубин А. Н.</i>	31
Обратные задачи одновременного определения двух коэффициентов в параболических уравнениях <i>Камынин В. Л.</i>	33
О задаче Трикоми для параболо-гиперболического уравнения <i>Капустин Н. Ю.</i>	35
Обратные задачи определения параметров в уравнениях математической физики <i>Кожанов А. И.</i>	37
Асимптотика производных по времени фундаментальных решений параболических уравнений с одной пространственной переменной <i>Коненков А. Н.</i>	38
Классические решения смешанных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка в криволинейной полуполосе <i>Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н.</i>	39
Границное управление для волнового уравнения при однородном граничном условии наклонной производной и докритических временах <i>Мусеев Е. И., Фролов А. А.</i>	41
Сравнение решений задачи Коши для уравнений параболического и гиперболизированного типа <i>Мусеев Т. Е.</i>	42
Проблемы математического моделирования российской экономики <i>Обросова Н. К., Шананин А. А.</i>	44
Обратная задача для дифференциального уравнения с дробной производной Капуто <i>Орловский Д. Г.</i>	46
О задаче с наклонной производной для уравнения смешанного типа со спектральным параметром <i>Полосин А. А.</i>	48
Итерационные методы решения линейных и нелинейных обратных задач для параболических уравнений <i>Прилепко А. И., Костин А. Б.</i>	49
Функции Грина краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения в многомерных областях <i>Псху А. В.</i>	51
Нелокальный подход к исследованию колебаний стержня <i>Пулькина Л. С.</i>	52

---

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием пространственных аргументов и запаздыванием	
<i>Разгулин А. В., Романенко Т. Е., Будзинский С. С.</i>	54
Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами	
<i>Раутян Н. А.</i>	56
Задача Дирихле для двумерного волнового уравнения	
<i>Сабитов К. Б.</i>	57
Определение и свойства операторной экспоненты, порожденной одномерным оператором Дирака	
<i>Савчук А. А., Садовничая И. В.</i>	59
Об одном свойстве регулярного разностного оператора в цилиндре	
<i>Скубачевский А. Л., Лийко В. В.</i>	60
Решение основных краевых задач плоской теории упругости в классах Харди	
<i>Солдатов А. П.</i>	62
Разрешимость обратной задачи определения источника с компактным носителем в уравнении теплопроводности	
<i>Соловьев В. В.</i>	63
Единственность решения обратной задачи с финальным условием для эволюционного уравнения произвольного порядка	
<i>Тихонов И. В., Алмохамед Муатаз</i>	64
О нелокальной задаче стабилизации одной системы гидродинамического типа	
<i>Фурсиков А. В.</i>	65
Задача Трикоми для смешанно-составного сингулярного интегрофункционального уравнения	
<i>Чаплыгина Е. В.</i>	66
О моделировании эффективных коэффициентов упруго-ползучей слоистой среды	
<i>Шамаев А. С., Бобылева Т. Н.</i>	68
<b>Секция. Численные методы</b>	
Computational identification of adsorption and desorption parameters for pore scale transport in porous media	
<i>Grigoriev V. V., Iliev O. P.</i>	70
Numerical Methods for Spectral Fractional Elliptic Equations	
<i>Lazarov R. D.</i>	71
High-order adaptive time stepping for the incompressible Navier-Stokes Equations	
<i>Peter Minev</i>	72

---

Методы декомпозиции в задачах аномального транспорта Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. . . . .	73
Новая методика формулировки алгоритмов разделения области Агошков В. И. . . . .	74
Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для диф- ференциальных уравнений дробного порядка Алиханов А. А. . . . .	75
Декомпозиция решения двумерного сингулярно возмущенного урав- нения конвекции-диффузии с переменными коэффициентами в квадрате; оценки в гёльдеровых нормах Андреев В. Б., Белухина И. Г. . . . .	76
О численном решении нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих диффузионный хаос в диссипативных средах Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. . . . .	78
Современные методы численного решения жестких задач Коши Белов А. А., Калиткин Н. Н. . . . .	80
Локально-одномерная разностная схема для псевдопараболического уравнения третьего порядка Бештоков М. Х. . . . .	82
Редукция размерности в задачах равномерной рациональной ап- проксимации Богатырев А. Б. . . . .	84
Работы А.А. Самарского по вычислительной математике Вабищевич П. Н. . . . .	85
Устойчивый метод расчета несжимаемых течений в областях с из- меняющейся границей Василевский Ю. В. . . . .	86
Модели и алгоритмы для задач электромагнитного ускорения про- водящих макротел Галанин М. П., Сорокин Д. Л. . . . .	87
Точная оценка погрешности неявной схемы конечных элементов для задачи об американских опционах Даутов Р. З., Лапин А. В. . . . .	89
Численные методы для двух классов нелинейных задач Димова С. Н. . . . .	91
Применение рационального метода Арнольди для приближённого вычисления некоторых матричных функций с параметром Друскин В. Л., Заславский М. Ю., Книжнерман Л. А. . . . .	93
Вычислительные методы решения задачи Коши для гамильтоновых систем Еленин Г. Г., Еленина Т. Г. . . . .	95

---

О решении нелинейных краевых задач при наличии сосредоточенных источников	
<i>Задворнов О. А., Трифонова Г. О.</i>	96
Условия $L^2$ -диссипативности явных линеаризованных КГД-разностных схем для 1D уравнений газовой динамики	
<i>Злотник А. А., Ломоносов Т. А.</i>	97
Вклад А.А. Самарского в развитие электродинамической теории волноводов	
<i>Ильинский А. С.</i>	98
Методы идентификации математических моделей	
<i>Кабанихин С. И., Шишлиенин М. А.</i>	100
Смешанные методы конечных элементов для геометрически нелинейных задач теории тонких непологих оболочек	
<i>Карчевский М. М.</i>	101
О точности разностных схем сквозного счета в областях гладкости рассчитываемых обобщенных решений	
<i>Ковыркина О. А., Остапенко В. В.</i>	102
Применение разностных схем метода опорных операторов для расчета остаточных напряжений, возникающих при лазерном спекании металлических порошков	
<i>Колдoba А. В., Повещенко Ю. А.</i>	103
Оптимальные, явно разрешимые дискретные математические модели с контролируемым дисбалансом «тепловой энергии»	
<i>Коновалов А. Н.</i>	105
Итерационные методы для сеточных аппроксимаций линейно-квадратических задач оптимального управления с дробной производной по времени	
<i>Лапин А. В., Романенко А. Д.</i>	106
Итерационный метод для моделирования связанной задачи обтекания и теплопроводности летательных аппаратов	
<i>Лукин В. В.</i>	108
Численные методы для перспективного программного обеспечения, устроенного по принципу «чёрного ящика»	
<i>Мартыненко С. И.</i>	110
Двусторонние оценки решений конечно-разностных схем и их приложения	
<i>Матус П. П.</i>	112
Нелокальные контактные задачи для линейных эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами	
<i>Меладзе Г. В., Давиташвили Т. Д.</i>	114

---

Алгоритм адаптивной интерполяции с ТТ-разложением для моделирования динамических систем с интервальными параметрами <i>Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.</i>	116
Аппроксимация дробных по времени уравнений <i>Пискарев С. И.</i>	118
Дисперсионные и диссипативные свойства высокоточных бикомпактных схем для уравнений гиперболического типа <i>Рогов Б. В., Брагин М. Д., Чикиткин А. В.</i>	119
Численное моделирование взаимодействия упругих тел в случае контактной поверхности сложной формы <i>Родин А. С., Аронов П. С., Соломенцева П. В.</i>	121
Математические задачи теории волноведущих систем <i>Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е.</i>	123
Математическое моделирование, как метод исследования новых процессов физической химии. <i>Тихонов Н. А.</i>	125
Быстрые методы численного решения кинетических уравнений многочастичной агрегации <i>Тыртышников Е. Е., Матвеев С. А., Смирнов А. П., Сорокин А. А., Стефонишин Д. А.</i>	126
Надежные разностные схемы для сингулярно возмущенных краевых и начально-краевых задач <i>Шишкин Г. И., Шишкина Л. П.</i>	128
О технике экспериментального исследования сходимости решений разностных схем для сингулярно возмущенных начально-краевых задач <i>Шишкина Л. П., Шишкин Г. И.</i>	130
Восстановление коэффициентов параболических уравнений: приложения в финансах и медицине <i>Шишленин М. А., Кабанихин С. И.</i>	131
К задаче движения пузырька в узком цилиндрическом канале <i>Щур Л. Н.</i>	132
<b>Секция. Математическое моделирование</b>	
Mathematical modelling of muscle activity <i>Nedyalkova Z. D., Ivanov T. B.</i>	134
Initial calibration of MEMS accelerometers, used for measuring orientation in space <i>Lyutskanova-Zhekova G. S., Ivanov T. B.</i>	136
О построении и применении разностных схем годуновского типа для расчетов течений вязкого газа в криволинейных координатах <i>Абакумов М. В.</i>	138

---

---

Математическое моделирование гемодинамики человека в примерах	
Абакумов М. В., Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б. . . . .	140
Дискретные и асимптотические аппроксимации одной задачи сложного теплообмена	
Амосов А. А., Крымов Н. Е. . . . .	142
Широкодиапазонные модели теплофизических свойств плазмы	
Белов А. А., Калиткин Н. Н., Козлитин И. А. . . . .	144
Вычислительные методы на основе иерархии моделей	
Богомолов С. В. . . . .	146
Разрывный метод Галеркина: вариационный подход в газодинамических задачах	
Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкун В. Ф. . . . .	147
Численное исследование влияния продольного магнитного поля на ускорение и сжатие плазмы в коаксиальных каналах	
Брушлинский К. В., Степин Е. В. . . . .	149
О решении задач с быстро меняющимися коэффициентами с помощью однородных разностных схем	
Васильев В. И. . . . .	151
Беспараметрическое моделирование задач водородной безопасности	
Глотов В. Ю., Канаев А. А., Киселев А. Е., Головизнин В. М. .	152
КАБАРЕ	
Головизнин В. М. . . . .	154
Новый алгоритм моделирования течения на сфере в приближении мелкой оды на основе уравнения сохранения момента импульса	
Головизнин В. М., Залесный В. Б., Соловьев А. В. . . . .	155
Оптимальные стратегии достижения Th1-Th2 равновесия в математической модели лечения аллергии	
Григоренко Н. Л., Хайлор Е. Н., Григорьева Э. В. . . . .	156
Распределение тепловых характеристик в одномерном дискретном материале	
Гузев М. А., Qi Ch. . . . .	158
Композиционные методы моделирования поведения систем	
Гузев М. А., Цициашвили Г. Ш. . . . .	159
Моделирование течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью с помощью методики КАБАРЕ	
Гущин В. А., Кондаков В. Г. . . . .	160
Адаптивное уточнение нижней границы спектра оператора в чебышевских итерациях	
Жуков В. Т., Феодоритова О. Б., Новикова Н. Д. . . . .	161
Математические модели гидродинамики океана	
Залесный В. Б., Гусев А. В., Мошонкин С. Н., Семенов Е. В. . .	163

---

Моделирование развития гидродинамических неустойчивостей в задачах физики высоких плотностей энергии	
<i>Змитренко Н. В., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.</i>	164
Метод декомпозиции в динамических контактных задачах многих тел	
<i>Караваев А. С., Копысов С. П.</i>	166
Расчет внешней баллистики осесимметричных тел с учетом угла атаки в реальном масштабе времени	
<i>Козлгин И. А., Жуков В. Т., Феодоритова О. Б., Краснов М. М.</i>	168
Новый подход к решению проблемы УТС	
<i>Козлов А. Н.</i>	170
EBR схемы для неструктурированных сеток и примеры их использования для решения прикладных задач аэrodинамики и аэроакустики	
<i>Козубская Т. К.</i>	172
Решение задач газовой динамики методом Галеркина с разрывными базисными функциями	
<i>Краснов М. М., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.</i>	174
Моделирование лесных пожаров на основе двумерных многофазных моделей	
<i>Кулешов А. А., Мышецкая Е. Е., Якуш С. Е.</i>	176
Вычислительный эксперимент как инструмент исследования конвективной неустойчивости	
<i>Мажсорова О. С., Колмычков В. В., Щерица О. В.</i>	178
Моделирование волновых процессов в гетерогенных средах	
<i>Петров И. Б.</i>	179
Формирование модели пограничного слоя в системе газ–металл на основе результатов расчетов методами молекулярной динамики	
<i>Поляков С. В., Подрыга В. О.</i>	180
О задаче календарного планирования на промышленном производстве	
<i>Савенкова Н. П., Артемьевая Л. А., Дряжсенков А. А., Ильютков В. П., Лапонин В. С., Мокин А. Ю.</i>	182
Физико-математические многофункциональные модели, специализированные численные алгоритмы и программные комплексы для моделирования распространения загрязнения с учетом конкретной 3D городской застройки или промышленного объекта	
<i>Сороковикова О. С., Дзама Д. В.</i>	184
Математическое моделирование катастрофических явлений, возникающих при разрушении плотин	
<i>Схиртладзе Н. М., Чантурия А. З., Меладзе Г. В.</i>	186

Тезисы конференции «Современные проблемы вычислительной математики  
и математической физики»

---

Численное решение кинетического уравнения в задачах гиперзвуковой аэродинамики космических аппаратов <i>Титарев В.А.</i> . . . . .	187
Преобразование нелинейных уравнений взаимодействия малоперiodных лазерных импульсов к каноническому виду <i>Трофимов В. А., Разгулин А. В., Степаненко С. В.</i> . . . . .	188
Высокопроизводительные вычисления, включая суперкомпьютерные технологии. Актуальные проблемы развития и внедрения в практические приложения <i>Шагалиев Р. М.</i> . . . . .	189
Параллельные алгоритмы решения трёхмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса <i>Щерица О. В., Шатров О. А., Мажсорова О. С.</i> . . . . .	191

# СЕКЦИЯ

## Уравнения математической физики

POHOZHAEV IDENTITIES FOR SEMI-LINEAR ELLIPTIC-HYPERBOLIC  
EQUATIONS AND FOR FRACTIONAL LAPLACIAN

*Popivanov Nedyu Ivanov*

*D. Sc., Professor*

*E-mail: nedyu@fmi.uni-sofia.bg*

*Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy  
of Sciences and Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia,  
Bulgaria*

For the first time so called Pohozhaev identities had been used in 1965, for the study of the homogeneous Dirichlet problem for semilinear elliptic equations. In that case the behaviour of the solution strongly connected with the power of the pure nonlinear term and the Sobolev embedding number of  $H_0^1(\Omega)$  into  $L^p(\Omega)$ . From that time in this area have been appeared many different kinds of Pohozhaev identities, which have been used in quite different situations. Especially, Lupo and Payne shown that the nonexistence principle in supercritical case also holds for certain two dimensional problems for the mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator  $L$  (instead of  $\Delta$ ), with some appropriate boundary conditions. In dimension 2, such operators have a long-standing connection with transonic fluid flow. Of course, the critical Sobolev embedding in this case is for a suitable weighted version of  $H_0^1(\Omega)$  into  $L^p(\Omega)$ . As usual, in the BVP for such mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator  $L$ , the boundary data are given only on the proper subset of the boundary of  $\Omega$ . To compensate the lack of a boundary condition on a part of boundary, a sharp Hardy-Sobolev inequality is used, as was first done by Lupo and Payne and later in some papers, already published or in progress, prepared jointly with colleagues from Italy, Norway and Russia (see for example [1, 2, 3]). Let mention also some first results from using Pohozhaev identities in the case of Fractional Laplacian BVP [4].

Acknowledgments. This work is supported by Bulgarian NSF and Russian NSF under Grant DHTC 01/2/2017 "BVP for mixed type equations".

### Список литературы

1. Lupo D., Payne K. R., Popivanov N. On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2014. Vol. 108. P. 29–56.

2. Dechevski L., Payne K. R., Popivanov N. Nonexistence of nontrivial generalized solutions for 2-D and 3-D BVPs with nonlinear mixed type equations // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1910, Art. No. 040015. P. 1–13; doi: 10.1063/1.5013982.
3. Popivanov N., Moiseev E., Boshev Y. On the degenerate hyperbolic Cauchy-Goursat problem for nonlinear Gellerstedt equations in the frame of generalized solvability // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048, Art. No. 040027. P. 1–13; doi: 10.1063/1.5082099.
4. Ros-Oton X., Serra J. The Pohozaev Identity for the Fractional Laplacian // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer. 2014. Vol. 213, Issue 2. P. 587–628.

**INVERSE MEDIUM PROBLEM FOR SINGULAR CONTRAST**

*Serov Valery S.*

*professor*

*E-mail: valserov@gmail.com*

*University of Oulu, Oulu, Finland*

It is well known (see, for example, [1]) that the propagation of time harmonic acoustic waves (with frequency  $\omega$ ) of small amplitude in a slowly varying inhomogeneous medium can be governed by the following steady-state Helmholtz equation

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u(x) = 0, \quad x \in R^n, \quad n = 2, 3,$$

where  $u(x)$  denotes the corresponding amplitude in two or three dimensions,  $\Delta$  is the multidimensional Laplacian and  $c^2(x)$  is the speed of sound. The wave motion is caused by an incident wave  $u_0$  satisfying the unperturbed linearised equation being scattered by the inhomogeneous medium. Assuming the inhomogeneous region is contained inside a bounded domain  $\Omega \subset R^n$ , i.e.,  $c(x) = c_0 = \text{constant}$  for  $x \in R^n \setminus \Omega$ , we can see that the scattering problem under consideration is now modelled by

$$-\Delta u(x) - k_0^2 u(x) = k_0^2 m(x) u(x),$$

where  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  is a fixed wave number,  $m(x) = \frac{c_0^2}{c^2(x)} - 1 := n(x) - 1$  is a perturbation of the refractive index  $n(x)$  and

$$u(x) = u_0(x) + u_{sc}(x), \quad u_0(x) = e^{ik_0(x,\theta)}, \quad \theta \in S^{n-1},$$

where the scattered field  $u_{sc}$  is required to satisfy the Sommerfeld radiation condition at the infinity. We allow for  $m$  to be complex-valued in order to include the possibility that the medium is absorbing. As described in [1], this is often modelled in the literature by adding a term that is proportional to velocity in Euler's equation which implies that  $n(x)$  is now of the form

$$n(x) = n_1(x) + i \frac{n_2(x)}{k_0} =: 1 + m(x),$$

such that  $m$  has compact support in some bounded domain  $\Omega$ . It is assumed (for uniqueness purposes of the corresponding boundary value problem) that  $0 < n_1 \leq 1$ ,  $n_2(x) \geq 0$ , that is,  $-1 < \operatorname{Re}(m) \leq 0$  and  $\operatorname{Im}(m) \geq 0$ .

Our basic assumption for refractive index  $m$  is that it is a complex-valued function which belongs to  $L^2(\Omega)$  (physically, only imaginary part of  $m$  can have some infinite singularities from  $L^2$  whereas the real part of  $m$  can only have jump

singularities). In this case, for any fixed  $k_0 > 0$ , there is a unique solution  $u$  of the above mentioned form such that

$$\|u_{sc}\|_{L^s(R^n)} < \infty$$

for some  $s$  depending on the dimension  $n$  (see [2]).

These properties allow us to conclude that the solution  $u(x, k_0, \theta)$  for fixed  $k_0 > 0$  admits asymptotically as  $|x| \rightarrow \infty$  uniformly with respect to  $\theta$  the representation

$$u(x, k_0, \theta) = e^{ik_0(x, \theta)} + C_n \frac{e^{ik_0|x|} k_0^{\frac{n-3}{2}}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} A(k_0, \theta', \theta) + O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}\right),$$

where  $\theta' := \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ ,  $C_n$  is known constant depending only on the dimension  $n$ , and the function  $A(k_0, \theta', \theta)$  is called the scattering amplitude and is defined by

$$A(k_0, \theta', \theta) := k_0^2 \int_{\Omega} e^{-ik_0(\theta', y)} m(y) u(y, k_0, \theta) dy.$$

The following theorems hold.

**Theorem 1.** [ $n = 3$ ] Suppose that  $m_1(x), m_2(x) \in L^2(\Omega)$  and the corresponding scattering amplitudes are equal to each other

$$A_1(k_0, \theta', \theta) = A_2(k_0, \theta', \theta)$$

for fixed  $k_0 > 0$  and for all  $\theta', \theta \in \mathbb{S}^2$ . Then

$$m_1(x) = m_2(x)$$

a.e. in  $\Omega$ .

**Theorem 2.** [ $n = 2$ ] Suppose that  $m_1, m_2 \in L^2(\Omega)$  and the corresponding scattering amplitudes are equal to each other

$$A_1(k_0, \theta', \theta) = A_2(k_0, \theta', \theta)$$

for fixed  $k_0 > 0$  and for all  $\theta', \theta \in \mathbb{S}^1$ . Then

$$m_1(x) = m_2(x) \pmod{H_{\text{loc}}^t(R^2)}$$

for  $t < 1$ .

**Corollary** Suppose all conditions of Theorem 2 are satisfied. If the contrasts  $m_1$  and  $m_2$  contain jumps over some smooth curves, then these curves and the height functions of the jumps are the same for both contrasts  $m_1$  and  $m_2$ .

### Список литературы

1. Colton D. and Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd edition. New York: Springer, 2013.
2. Serov V. Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. New York: Springer, 2017.

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С УСЛОВИЯМИ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ**

**Амосов Андрей Авенирович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: AmosovAA@mei.ru*

*Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт Москва, Россия*

Получена асимптотика при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения  $I_\varepsilon$  задачи о переносе излучения в полупрозрачной среде, составленной из  $m$  плоских слоев оптической толщины  $\varepsilon = \tau_*/m$  в случае, когда поверхности раздела слоев – диффузно отражающие и диффузно преломляющие. Искомая величина  $I_\varepsilon(\mu, \tau)$  имеет смысл интенсивности излучения. Она определена на  $\bigcup_{j=1}^m D_{\varepsilon,j}$ , где  $D_{\varepsilon,j} = D_{\varepsilon,j}^- \cup D_{\varepsilon,j}^+$ ,  $D_{\varepsilon,j}^- = [-1, 0] \times (\tau_{j-1}, \tau_j)$ ,  $D_{\varepsilon,j}^+ = (0, 1] \times (\tau_{j-1}, \tau_j)$ ,  $\tau_j = \varepsilon j$ , и является решением задачи

$$\mu \frac{d}{d\tau} I_{\varepsilon,j} + I_{\varepsilon,j} = \frac{\varpi}{2} \int_{-1}^1 I_{\varepsilon,j}(\mu', \tau) d\mu' + (1 - \varpi)F, \quad (\mu, \tau) \in D_{\varepsilon,j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1)$$

$$I_{\varepsilon,j+1,\ell}^+ = \mathcal{R}^+(I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-) + \mathcal{P}^+(I_{\varepsilon,j,r}^+), \quad \mu \in (0, 1], \quad 1 \leq j < m, \quad (2)$$

$$I_{\varepsilon,j,r}^- = \mathcal{R}^-(I_{\varepsilon,j,r}^+) + \mathcal{P}^-(I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-), \quad \mu \in [-1, 0), \quad 1 \leq j < m, \quad (3)$$

$$I_{\varepsilon,1,\ell}^+ = \mathcal{R}_\ell^+(I_{\varepsilon,1,\ell}^-) + (1 - \theta_\ell)J_\ell, \quad \mu \in (0, 1], \quad (4)$$

$$I_{\varepsilon,m,r}^- = \mathcal{R}_r^-(I_{\varepsilon,m,r}^+) + (1 - \theta_r)J_r, \quad \mu \in [-1, 0). \quad (5)$$

Здесь  $I_{\varepsilon,j,\ell}^\pm = I_{\varepsilon,j}^\pm|_{\tau=\tau_{j-1}+0}$ ,  $I_{\varepsilon,j,r}^\pm = I_{\varepsilon,j}^\pm|_{\tau=\tau_j-0}$ . Через  $I_{\varepsilon,j}$  и  $I_{\varepsilon,j}^\pm$  обозначены сужения  $I_\varepsilon$  на  $D_{\varepsilon,j}$  и  $D_{\varepsilon,j}^\pm$ . Функция  $F$  и постоянные  $J_\ell$ ,  $J_r$ , характеризующие плотность объемных источников излучения и потоки излучения, падающего на систему слоев слева и справа, считаются заданными.

Уравнение (1) описывает перенос излучения внутри  $j$ -го слоя. В нем  $\varpi \in [0, 1]$  – показатель альбедо. Условия (2) и (3) описывают отражение и преломление излучения на границе раздела  $j$ -го и  $(j+1)$ -го слоев, а условия (4) и (5) – отражение и преломление излучения на левой и правой границах системы слоев. В них  $\mathcal{R}^\pm$ ,  $\mathcal{R}_\ell^+$ ,  $\mathcal{R}_r^-$  и  $\mathcal{P}^\pm$  – операторы диффузного отражения и диффузного преломления

$$\mathcal{R}^+(I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-) = 2\theta \int_{-1}^0 I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-(\mu') |\mu'| d\mu', \quad \mathcal{P}^+(I_{\varepsilon,j,r}^+) = 2(1 - \theta) \int_0^1 I_{\varepsilon,j,r}^+(\mu') \mu' d\mu',$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^-(I_{\varepsilon,j,r}^+) &= 2\theta \int_0^1 I_{\varepsilon,j,r}^+(\mu') \mu' d\mu', \quad \mathcal{P}^-(I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-) = 2(1-\theta) \int_{-1}^0 I_{\varepsilon,j+1,\ell}^-(\mu') |\mu'| d\mu', \\ \mathcal{R}_\ell^+(I_{\varepsilon,1,\ell}^-) &= 2\theta_\ell \int_{-1}^0 I_{\varepsilon,1,\ell}^-(\mu') |\mu'| d\mu', \quad \mathcal{R}_r^-(I_{\varepsilon,m,r}^+) = 2\theta_r \int_0^1 I_{\varepsilon,m,r}^+(\mu') \mu' d\mu',\end{aligned}$$

где  $0 < \theta < 1$ ,  $0 < \theta_\ell < 1$ ,  $0 < \theta_r < 1$  – величины, характеризующие отражающие свойства поверхностей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00033).

**АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ  
СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ  
ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ**

**Аникин Анатолий Юрьевич, Дорохотов Сергей Юрьевич,**

**Назайкинский Владимир Евгеньевич**

к.ф.-м.н.; д.ф.-м.н., профессор; д.ф.-м.н., чл.корр. РАН

E-mail: anikin83@inbox.ru, dobr@ipmnet.ru,

nazaikinskii@googlemail.com

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*НИУ МФТИ, Долгопрудный, Московская область, Россия*

В  $n$ -мерном пространстве с координатами  $x = (x_1, \dots, x_n)$  рассматриваются дифференциальные и псевдодифференциальные уравнения вида  $\widehat{L}w = F$ , где  $\widehat{L} = L(x, -ih\nabla, h)$  — (псевдо)дифференциальный оператор с гладким символом  $L(x, p, h)$ , заданный в  $2n$ -мерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$  с координатами  $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ ,  $h$  — малый параметр. Предполагается, что функция  $F = f((x - y)/h)$  локализована в окрестности точки  $x = y$  (при соответствующей нормировке в пределе при  $h \rightarrow +0$  она становится дельта-функцией Дирака). Если гамильтониан  $H(x, p) = L(x, p, 0)$  не обращается в нуль при  $x = y$ , то задача является “эллиптической”, и асимптотика решения выражается в стандартном для теории псевдодифференциальных операторов виде. Если же  $H(x, p) = 0$  на некотором  $(n - 1)$ -мерном подмногообразии  $N$  вертикальной лагранжевой плоскости  $M = \{x = y\} \subset \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ , то при некоторых дополнительных условиях в асимптотике решения появляется “волновая” составляющая, связанная с лагранжевым многообразием  $\Lambda_+$  с краем  $\partial\Lambda_+ = N$ , которое представляет собой объединение выпущенных из  $N$  положительных полутраекторий гамильтоновой системы, отвечающей функции  $H(x, p)$ . На паре  $(\Lambda_+, M)$  определяется канонический оператор Маслова, который и доставляет асимптотику решения исходной задачи, причём её волновая часть даётся достаточно эффективными асимптотическими формулами. В других задачах пары лагранжевых многообразий появлялись в работах Хёрмандера–Дюистермаата, Мельроуза–Ульмана и Стернина–Шаталова. Эта конструкция обобщается на случай, когда правая часть задается каноническим оператором Маслова на произвольном лагранжевом многообразии  $M$ , а также на случай систем уравнений. В качестве примеров рассмотрены уравнение Гельмгольца во всем пространстве, уравнение Гельмгольца в слое переменной толщины, уравнения линейной теории волн на воде и уравнения Дирака для графена. В случае уравнения Гельмгольца полученные формулы обобщают результаты Келлера, Бабича и Кучеренко.

Доклад основан на работах, совместных с П. Петровым и М. Руло, и поддержан грантом РФФИ-CNRS 17-51-150006.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЛОСКИХ НЕГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ**

*Бадерко Елена Александровна<sup>1</sup>*

*Черепова Марина Федоровна<sup>2</sup>*

1: *д.ф.-м.н., профессор, Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва,  
Россия*

2: *д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический  
институт», Москва, Россия*

*E-mail: baderko.ea@yandex.ru, cherepovamf@mpei.ru*

Рассмотрена нелокальная задача Бицадзе–Самарского для одномерной (по пространственной переменной) параболической по Петровскому системы второго порядка в плоских областях с негладкими боковыми границами. Установлена единственность классического решения этой задачи в пространстве Гёльдера функций, непрерывных вместе с производной по пространственной переменной в замыкании области.

**Список литературы**

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. // ДАН СССР. 1969. Т.185. № 4. С. 739–740.
2. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. Решение задачи Бицадзе–Самарского для параболической системы в полуограниченной области. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1327–1335.

**О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В  
НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ**

**Баев Андрей Владимирович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: drbaev@mail.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений в частных производных, описывающую распространение звуковых волн в трубке:

$$\rho_0(t)s_t + p_x = 0, \quad p_t + \rho_0(t)s_x = 0, \quad (1)$$

где  $s(x, t)$  — скорость малых смещений среды,  $p(x, t)$  — флюктуации давления. Работа посвящена решению обратной задачи, состоящей в определении функции  $\rho_0(t)$  по данным рассеяния — акустическим волнам, рассеянным полупрямой  $x > 0$  с изменяющейся во времени  $t$  плотностью  $\rho_0$ .

Системе (1) сопоставим эквивалентную каноническую систему в римановых инвариантах (нестационарную систему Дирака):

$$v_t + v_x + z(t)u = 0, \quad u_t - u_x + z(t)v = 0, \quad z(t) = -\rho'_0(t)/(2\rho_0(t)). \quad (2)$$

Римановы инварианты  $v$ ,  $u$  имеют физический смысл волн, распространяющихся вправо и влево вдоль оси  $x$ .

Поставим следующую начально-краевую задачу (*прямая задача рассеяния*) для системы (2) при  $x, t > 0$ :

$$v(x, 0) = u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad v(0, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $\varphi(t)$  — источник в граничном условии. В данной работе рассматриваются граничные источники  $\varphi(t)$  из класса  $\bar{C}^1[0, \infty)$  кусочно-гладких функций таких, что в конечном числе точек  $t_n$  потеря гладкости либо имеет место разрыв непрерывности первого рода, либо  $\varphi \in C^p(\mathcal{O}(t_n)) \setminus C^{p+\gamma}(\mathcal{O}(t_n))$  для некоторого  $p \in (0, 1)$  и любого  $\gamma > 0$  в некоторой окрестности  $\mathcal{O}(t_n)$  точки  $t_n$ . Обозначим указанный класс функций как  $\bar{C}^{1,p}[0, \infty)$  для  $0 \leq p < 1$ .

Рассмотрим *обратную задачу рассеяния* для (2,3) в  $T$ -локальной формулировке: найти  $z \in C[0, 2T]$  при известном граничном источнике  $\varphi \in \bar{C}^{1,p}[0, 2T]$  и данных рассеяния  $u(0, t) = f(t)$ ,  $f \in C^1[0, 2T]$ .

**Теорема.** Пусть  $\varphi(t)$  принадлежит на  $[0, 2T]$  указанному классу функций. Тогда обратная задача рассеяния имеет на  $[0, 2T]$  не более одного непрерывного решения.

На базе установленных в работе условий единственности решения обратной задачи рассеяния предложен численный алгоритм решения, основанный на методе обращения разностных схем и итерационном методе, и приведены некоторые результаты его применения для решения модельных задач.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ СЕТОК

*Безродных Сергей Игоревич, Власов Владимир Иванович*  
*д.ф.-м.н., д.ф.-м.н.*

*E-mail: sbezrodnykh@mail.ru, vlasov@ccas.ru*

*Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН,  
Москва, Россия*

Такие дефекты гармонических сеток, как самоналегание или самопересечение ячеек сетки и их выход за пределы расчетной области, часто связывают с нарушением гомеоморфизма отображения  $\mathcal{F}$  и обращением в нуль его якобиана  $J(\mathcal{F})$  (см., например, [1], [2]). Здесь, разумеется, речь идет о гармоническом отображении  $\mathcal{F} : G \xrightarrow{\text{harm}} Q$  расчетной области  $G$  на логическую  $Q$ . Оказывается, однако, что перечисленные дефекты, делающие сетку непригодной (или малопригодной) для расчетов, могут возникать даже тогда, когда все теоретические требования к  $\mathcal{F}$  удовлетворены, т.е.  $\mathcal{F}$  — гомеоморфизм и  $J(\mathcal{F}) \neq 0$  в  $G$ , что заведомо выполняется, если  $G$  и  $Q$  жордановы, а  $Q$  выпукла (например, квадрат).

В докладе мы остановимся на двух проблемах, приводящих к возникновению указанных дефектов сетки: 1) сингулярное поведение гармонического отображения вблизи входящих углов; 2) трудности при реализации подхода Уинслоу для вытянутых областей с глубокими выемками.

Первая проблема была обозначена, в частности, в работах [2], [3], где строилась гармоническая сетка в прямоугольном уголке ( $L$ -образной области). Оказалось, что если один из узлов некоторой ячейки  $\sigma_{m,n}$  создаваемой регулярной четырехугольной сетки помещается в вершине входящего угла, то одна из пар противоположных сторон этой ячейки может пересекаться, т.е. может возникнуть самоналегание ячейки  $\sigma_{m,n}$ . Более того, в [2] было выдвинуто предположение, что при достаточно малом шаге сетки самоналегание ячейки  $\sigma_{m,n}$  обязательно возникает. Это предположение получило строгое обоснование в работе [4], где было исследовано поведение гармонического отображения вблизи вершины входящего угла и обратного к нему отображения вблизи образа этой вершины. Были получены соответствующие асимптотики, из которых следует, в частности, что исходящая из вершины сеточная линия обязательно (за исключением особого случая) касается одной из сторон угла; это и приводит к указанному самоналеганию ячейки  $\sigma_{m,n}$ . Таким образом, проведенное в [4] исследование дало исчерпывающее объяснение обсуждаемой трудности, что открывает путь к ее радикальному преодолению.

Вторая проблема возникла в работе Стейнберга 1985 г., где строилась гармоническая сетка в "подковообразной" области  $G$ . В последующем эта задача рассматривалась во многих работах, см., например, [1], [5] и приведенную

там библиографию. Требуемое для такого построения отображение  $\mathcal{F}$  находилось в рамках подхода Уинслоу путем решения введенной им системы квазилинейных уравнений с помощью конечно-разностных методов, см. [1]-[3], [5] и цитированную литературу. Получаемая таким способом сетка оказалась неудовлетворительной: некоторые ячейки были неестественно вытянутыми, а другие — чрезмерно узкими; кроме того, возникало самоналегание ячеек и их выход за пределы области. Следует отметить, что попытки исправить ситуацию, предпринятые в работе [5], хотя и привели к некоторому ее улучшению за счет резкого увеличения количества узлов, модификации разностной схемы и привлечения других методов (в том числе вариационного "барьерного" метода [2]), но, тем не менее, не сделали сетку удовлетворительной. Выход из положения был найден в работе [6], где рассматриваемая задача была решена с помощью аналитико-численного метода [7], допускающего апостериорную (в норме  $C(\bar{G})$ ) оценку погрешности. Эта оценка показала, что с помощью метода [7] при минимальных вычислительных усилиях удалось достичь относительной погрешности не хуже  $10^{-6}$ , тогда как для наилучшей из построенных в [5] сеток в подковообразной области средняя по области относительная погрешность составила около 50%. В докладе предлагается для построения гармонических сеток использовать модификацию метода [7], основанную на его сочетании с аддитивным методом Шварца.

### Список литературы

1. Knupp P., Steinberg S. Fundamentals of Grid Generation. Florida: CRC Press. Boca Raton, 1993.
2. Иваненко С. А. Адаптивно–гармонические сетки. М.: ВЦ РАН, 1997.
3. Азаренок Б. Н., Чарахчян А. А. Об одной трудности построения двумерных регулярных сеток с помощью отображений // Матем. моделирование. 2014. Т. 26, №. 12. С. 48 – 64.
4. Безродных С. И., Власов В. И. О поведении гармонического отображения в углах // Матем. заметки. 2017. Т. 101, №. 3. С. 474 – 480.
5. Азаренок Б. Н. О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, №. 5. С. 826 – 839.
6. Безродных С. И., Власов В. И. Об одной проблеме конструктивной теории гармонических отображений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 46. С. 5 – 30.
7. Vlasov V. I. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitschr. Angew. Math. Mech. V. 76, Suppl. 1. P. 279 – 282.

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ РИМАНА ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ СМИРНОВА С ВЕСОМ ОБЩЕГО ВИДА**

**Билалов Билал Тельманович**

*д. ф.-м. н., профессор, чл.корр. НАН Азербайджана*

*E-mail: b\_bilalov@mail.ru*

*Отдел "Негармонический анализ Института Математики и Механики  
НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*

В работе определяются весовые классы Смирнова в ограниченной и неограниченной областях. Рассматриваются в этих классах однородная и неоднородная задачи Римана с измеримом коэффициентом, аргумент которой является кусочно непрерывной функцией. В случае однородной задачи находится достаточное условие на весовую функцию общего вида, которому удовлетворяют весы из класса Макенхупта, и строится общее решение этой задачи. В случае неоднородной задачи на весовую функцию налагается условие типа Макенхупта и находится условие ортогональности для разрешимости неоднородной задачи в весовых классах Смирнова, выводится формула для индекса задачи. Рассматриваются отдельные случаи относительно весовой функции степенного вида и выписаны конкретные условия на порядки вырождения.

Итак, рассмотрим неоднородную задачу Римана

$$F^+(z(s)) - G(z(s)) F^-(z(s)) = g(z(s)), \quad s \in (0, S), \quad (1)$$

где  $g \in L_{p,\rho}(\Gamma)$  заданная функция. Под решением задачи (1) понимается пара функций из весовых классов Смирнова

$$(F^+(z); F^-(z)) \in E_{p,\rho}(D^+) \times_m E_{p,\rho}(D^-),$$

граничные значения  $F^\pm$  на  $\Gamma$  которых п.в. удовлетворяют соотношению (1).

**Теорема 1.** Пусть коэффициент  $G(z(s))$ ,  $0 \leq s \leq S$ , неоднородной задачи (1) удовлетворяет условиям

- (i)  $|G(\cdot)|^{\pm 1} \in L_\infty(\Gamma)$ ;
- (ii)  $\theta(\cdot)$  кусочно-непрерывные на  $\Gamma$ , и пусть  $\{\xi_k, k = \overline{1, r}\} \subset \Gamma$  точки разрывов функции  $\theta(\cdot)$ :

$\arg G(\cdot)$  является гельдеревым на  $\Gamma$ , а кривая  $\Gamma = z([0, S])$  удовлетворяют условиям

(iii)  $\Gamma$  либо кривая Ляпунова, либо Радона (т.е., является кривой с ограниченным выращением) без точек заострений.

Предположим, что весовая функция  $\nu(\cdot)$  определенная выражением

$$\nu(s) =: \sigma^p(s) \rho(z(s)), \quad s \in (0, S),$$

принадлежит классу Макенхоупта  $A_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < +\infty$ , и имеет место условие

$$\int_{\Gamma} \rho^{-\frac{q}{p}}(z(s)) |dz(s)| < +\infty.$$

Тогда относительно разрешимости задачи (1) в классах  $E_{p;\rho}(D^+) \times_m E_{p;\rho}(D^-)$  имеют место:

1. при  $m \geq -1$  задача (1) имеет общее решение вида

$$F(z) = Z_{\theta}(z) P_m(z) + F_1(z),$$

где  $Z_{\theta}(\cdot)$  каноническое решение соответствующей однородной задачи,  $P_m(z)$  произвольный полином степени  $k \leq m$  (при  $m = -1$  полагаем  $P_m(z) \equiv 0$ ),  $F_1(\cdot)$  частное решение неоднородной задачи (1) вида

$$F_1(z) \equiv \frac{Z_{\theta}(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\xi) d\xi}{Z_{\theta}^+(\xi)(\xi - z)}; \quad (2)$$

2. при  $m < -1$  неоднородная задача (1) разрешима только в случае, когда правая часть  $g(\cdot)$  удовлетворяет следующим условиям ортогональностей

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{Z_{\theta}^+(\xi)} \xi^{k-1} d\xi = 0, \quad k = \overline{1, -m-1},$$

при этом единственное решение  $F(z) = F_1(z)$  определяется выражением (2).

### Список литературы

1. Bilalov B. T. Basis properties of some exponential, sine and cosine systems. // Sibirski matem. Jurnal. 2004. T. 45 No 2. C. 264 – 273 (in Russian).
2. Bilalov B. T. On solution of the Kostyuchenko problem. // Siberian Mathematical Journal. 2012. V. 53, issue 3. P. 509 – 526.
3. Najafov T. I., Nasibova N. P. On the Noetheriness of the Riemann problem in a generalized weighted Hardy classes. // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. V. 5, issue 2. P. 109 – 139.
4. Bilalov B. T., Gasymov T. B., Guliyeva A. A. On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes. // Turk. J. of Math. 2016. V. 40, issue 50. P. 1085 – 1101.
5. Sadigova S. R., Guliyeva A. E. On the Solvability of Riemann–Hilbert Problem in the Weighted Smirnov Classes. // Analysis Mathematica. 2018. V. 44, issue 4. P. 587 – 603.

**О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА  
РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ**

**Бутузов Валентин Федорович, Недедов Николай Николаевич**

*д.ф. – м. н., профессора*

*E-mail: butuzov@phys.msu.ru, nefedov@phys.msu.ru*

*физический Факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

В докладе представлены результаты современных исследований сингулярно возмущенных задач реакция-диффузия-адвекция. Для некоторых классов таких задач доказаны теоремы существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарных решений с пограничными и внутренними переходными слоями. Такие задачи играют важную роль в математической физике при моделировании процессов переноса и горения, а также при моделировании нелинейных волн [1].

Наши методы исследования, развивающие результаты работы [2], будут продемонстрированы на примере частично-диссипативной системы

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = F(u, v, x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = f(u, v, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D := (0; 1) \times (0, T], \quad (2)$$

с граничными условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T]$$

и начальными условиями

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^o(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v^o(x), \quad x \in [0; 1],$$

где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр,  $F, f, u^o, v^o$  - достаточно гладкие функции. Системы вида (1), (2) называются *частично-диссипативными* системами реакция-диффузия, потому что диффузионный член содержится только в первом из этих уравнений. Такие системы используются для математического моделирования в химической кинетике, теоретической биологии и других прикладных науках.

Представленные в докладе результаты базируются на дальнейшем развитии как методов построения асимптотических приближений, так и методов их обоснования. В частности, обсуждается общая схема асимптотического метода дифференциальных неравенств (см., например, [3 - 4] и ссылки в этих работах) и применяется к ряду новых задач.

В качестве иллюстрации полученных результатов для движущихся внутренних слоев рассмотрено уравнение типа Бюргерса, которое описывает квадратично нелинейные волны в среде без дисперсии с кубично нелинейным усилением (см. [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00424).

### **Список литературы**

1. Нефедов Н. Н., Руденко О. В. О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении. // ДАН. 2018. Т. 478, № 3. С. 274 – 279.
2. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 8. С. 73–100.
3. Nefedov N. Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers. // Lecture Notes in Computer Science. 2013. V. 8236. P. 62–72.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2010. Т. 268. С. 268–283.

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ  
ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

**Власов Виктор Валентинович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: vikmont@yandex.ru*

*Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия*

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho \ddot{u}(x, t) - Lu(x, t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t K_i(t-s) L_i u(x, s) ds = f(x, t),$$

где  $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$  вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды,  $t > 0$ , среда заполняет ограниченную область  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $u$  удовлетворяет условиям Дирихле в области  $\Omega$  с гладкой границей,  $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \operatorname{grad} \operatorname{div} u)$ ,  $L_2 = \lambda \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} u$ ,  $Lu = (L_1 + L_2)u$  - оператор Ламе теории упругости,  $K_1$ ,  $K_2$  функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

**Список литературы**

1. Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.
2. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами // Доклады РАН. 2018. Т. 482(6). С. 635 – 638.

## ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Денисов Александр Михайлович*

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: den@cmc.msu.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Рассматриваются две обратные коэффициентные задачи для гиперболических уравнений. Доказываются локальные теоремы существования их решения. Доказательства основаны на редукции обратных задач к нелинейным операторным уравнениям и обосновании сходимости метода последовательных приближений, что позволяет использовать предложенные методы для численного решения обратных задач.

### **Первая обратная задача.**

Требуется определить функции  $b(s)$ ,  $u(x, t)$  такие, что

$$u_{xt} + au_t + b(u)u_x = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T],$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u(l, t) = g(t) \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

где  $a$  - известная постоянная, а  $f(t)$ ,  $g(t)$  - заданные функции.

### **Вторая обратная задача.**

Требуется определить функции  $q(x)$ ,  $u(x, t)$  такие, что

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad (x, t) \in \Delta_T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in S_T,$$

$$u_t(x, 0) = \varphi''(x) - q(x)\varphi(x), \quad x \in S_T,$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u_x(0, t) = h(t), \quad t \in [0, T],$$

где  $\varepsilon$  - известный малый параметр,

$$\Delta_T = \{(x, t) : 0 \leq t \leq T, \quad -(T-t)\varepsilon^{-1} \leq x \leq (T-t)\varepsilon^{-1}\}, \quad S_T = [-T\varepsilon^{-1}, T\varepsilon^{-1}],$$

$\varphi(x)$ ,  $p(t)$ ,  $h(t)$  - заданные функции.

**О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С  
РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Денисов Василий Николаевич*

*д.ф.-м.н., профессор*

*E-mail: vdenisov2008@yandex.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Изучаются достаточные условия на рост старших коэффициентов параболического уравнения второго порядка, которые гарантируют стабилизацию к нулю решения задачи Коши в классе экспоненциально растущих начальных функций, равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $R^N$ .

В полупространстве  $\overline{E} = R^N \times [0, \infty)$  рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv L_1 u + c(x)u - u_t = 0, \text{ в } E(1), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \quad (2)$$

где

$$L_1 u = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x)u''_{x_i x_k}. \quad (3)$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) коэффициенты в (1) действительны и непрерывны в  $R^N$ , и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти  $D$  в  $R^N$ ,  $a_{ik} = a_{ki}$ , ( $i, k = 1, \dots, N$ ), существуют положительные постоянные  $\lambda_0, \lambda_1$ , такие, что

$$\lambda_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leq \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \leq \lambda_1^2 b(|x|)|\xi|^2, \quad (4)$$

для  $\forall x, \xi \in R^N$ ,

$$b(|x|) = (1 + |x|^2)^k, \quad (5)$$

где

$$0 < k < 1, |x| = x_1^2 + \dots + x_N^2. \quad (6)$$

2) коэффициенты  $C(x)$  удовлетворяет условию (C): существует постоянная  $\beta > 0$  такая, что

$$C(x) \leq -\beta^2, \forall x \in R^N. \quad (7)$$

3)  $u_0(x)$  непрерывна в  $R^N$  и выполнены условия роста

$$|u_0(x)| \leq M \exp(a|x|^{1-k}). \quad (8)$$

где  $0 < a, 0 < k < 1$ .

**Теорема 1.** Если начальная функция (1) непрерывна в  $R^N$  и удовлетворяет условию роста (8) при некоторых  $a > 0$ ,  $0 < k < 1$ , то при выполнении условия (C) для

$$\beta > a\lambda_1(1 - k), \quad (9)$$

решение задачи Коши (1), (2) стабилизируется к нулю, т.е. существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad (10)$$

равномерно по  $x$  на любом компакте  $K$  в  $R^N$ .

**Замечание.** Теорема является точной, в том смысле, что нельзя в равенстве (10) заменить компакт  $K$  на все пространство  $R^N$ .

Обзору работ по стабилизации решений параболических уравнений посвящена работа [1]. Асимптотика решений параболических уравнений с растущими коэффициентами посвящена работа [2]. Асимптотика решений нелинейных параболических уравнений изучалась, например, в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00223).

### Список литературы

1. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН. 2005. Т. 60, вып.4. С. 145 – 212.
2. Денисов В. Н. Об асимптотике при большом времени решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами // Докл. РАН. 2017. Т. 475, № 1. С. 10 – 13.
3. Kon'kov A. A. On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh, 2006. V. 136. P. 365 – 384.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА**

**Зарубин Александр Николаевич**

*д.ф.-м.н., профессор*

*E-mail: aleks\_zarubin@mail.ru*

*Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орел,  
Россия*

Для смешанно-составного интегро-функционально-дифференциального уравнения с функциональным запаздыванием и опережением некарлемановского типа

$$\sum_{k=0}^2 a_k(x) \Phi(\alpha_1^k(x), LU) + \sum_{k=1}^2 b_k(x) \Phi(\alpha_2^k(x), LU) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(\alpha_j^k(x), LU) = \int_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x)} \frac{LU(t,y)}{(\alpha_j^k(x)-t)^q} dt$ ,

а  $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (sgny) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лаврентьева-Бицадзе;

$0 < q < 1$ ;  $a_k(x), b_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) - непрерывные достаточно гладкие функции;  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  - сохраняющие ориентацию взаимно-

обратные  $\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x$  ( $j = 1, 2$ ) диффеоморфизмы класса  $C^2$ ,

удовлетворяющие условиям:  $\alpha_1(x) < x, \alpha'_1(x) > 1 (\alpha'_1(x) < 1)$

и  $\alpha_2(x) > x, \alpha'_2(x) < 1 (\alpha'_2(x) > 1)$ ;  $x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n)$ ;

$\alpha_2(x_0) > 0; \alpha_j^l(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\dots(\alpha_j(x))))}_{l \text{ раз}},$  если  $l > 0$ ;

$\alpha_j^l(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\dots(\alpha_{3-j}(x))))}_{-l \text{ раз}},$  если  $l < 0$ ;

$\alpha_j^0(x) = x$  ( $j = 1, 2$ ); в смешанной области  $D = D^+ \cup D^- \cup I$  с линией изменения типа  $I = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}$ ;

$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J$  и  $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$  - соответственно эллиптическая и гиперболическая части области  $D$ , где

$D_k^+ = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < \sigma_k(x)\}$  ( $k = -\overline{2, 4}$ );

$D_k^- = \{(x, y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -\frac{x_1}{2} < y < 0\}$  ( $k = -\overline{2, 4}$ );

$\sigma_k(x) = h + \sqrt{\alpha_1^k(x)(x_1 - \alpha_1^k(x))}, x_k \leq x \leq x_{k+1}$  ( $k = -\overline{2, 4}$ );

причём  $\sigma_0(\alpha_1^k(x)) = \sigma_k(x)$  ( $k = -\overline{2, 4}$ );  $J = J_1 \cup J_2$ ,

где  $J_k = \{(x, y) : x = x_k, 0 < y < h\}$  ( $0 < h \equiv const$ ) ( $k = 1, 2$ );

$I = \bigcup_{k=0}^2 I_k, I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$  ( $k = -\overline{2, 4}$ )

рассматривается

Задача Т. Найти в области  $D$  решение

$U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (J \cup I))$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$U(x, \sigma_k(x)) = \varphi_k(x), x_k \leq x \leq x_{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2$ );

$U(x_0, y) = U(x_3, y), 0 \leq y \leq h,$

$U(x, y) = r(x, y), (x, y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}};$

$$U(x, y) = \rho(x, y), (x, y) \in \overline{D_3 \cup D_4},$$

$$U(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), x_k \leq x \leq \alpha_2^k(\frac{x_1}{2}) (k = 0, 1, 2);$$

условием сопряжения

$$U(x, 0-) = U(x, 0+) = \omega(x), x_0 \leq x \leq x_3;$$

$$U_y(x, 0-) = U_y(x, 0+) = \nu(x), x_0 < x < x_3, x \neq x_1, x_2,$$

условием согласования

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_1) &= \varphi_1(x_1); \varphi_1(x_2) = \varphi_2(x_3); \psi_0(x_0) = \varphi_0(x_0) = \varphi_2(x_3) = \\ &= r(x_0, y) = \rho(x_3, y) = 0, \end{aligned}$$

где  $a_k(x), b_k(x), \varphi_k(x), \psi_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$  - заданные непрерывные достаточно гладкие функции, а  $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$  ( $k = -2, 4$ ).

Вопрос существования решения задачи Т сводится к однозначной разрешимости системы

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 a_k(x) \Phi(\alpha_1^k(x), V) + \sum_{k=1}^2 b_k(x) \Phi(\alpha_2^k(x), V) = 0, (x, y) \in D; \quad (2) \right.$$

$$\left. LU(x, y) = V(x, y), (x, y) \in D, \quad (3) \right.$$

причём для определения  $V(x, y)$  получено интегральное уравнение Абеля первого рода

$$\int_{x_k}^x \frac{V(t, y)}{(x-t)^q} dt = M_k(\alpha_1^k(x)), (x, y) \in D_k (k = 0, 1, 2);$$

а для нахождения функции  $U(x, y)$  решена задача Т для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе (3).

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ**

**Камынин Виталий Леонидович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: v1kamynin2008@yandex.ru*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва,  
Россия*

В докладе рассматриваются две обратные задачи одновременного определения коэффициентов перед  $u$  и  $u_x$  в параболическом уравнении с двумя независимыми переменными.

**Обратная задача 1.**

Определить тройку функций  $\{u(t, x), b(x), c(x)\}$ , удовлетворяющих в  $Q \equiv [0, T] \times [-l, l]$  уравнению

$$\rho u_t - u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \quad (1)$$

краевым условиям

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-l, l]; \quad u(t, -l) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T]; \quad (2)$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t, x)\omega(t) dt = \varphi(x), \quad \int_0^T u(t, x)\chi(t) dt = \psi(t), \quad x \in [-l, l]. \quad (3)$$

**Обратная задача 2.**

Определить тройку функций  $\{u(t, x), b(t), c(t)\}$ , удовлетворяющих в  $Q$  уравнению

$$u_t - a(t, x)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + d(t, x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \quad (4)$$

краевым условиям

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-l, l]; \quad u(t, -l) = u(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5)$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_{-l}^l u(t, x)\omega(x) dx = \varphi(t), \quad \int_{-l}^l u_x(t, x)\omega(x) dx = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Доказаны теоремы существования и единственности решения данных обратных задач.

Для каждой из рассматриваемых обратных задач мы также получаем оценки максимумов модулей неизвестных коэффициентов уравнения с константами, явно выписанными через входные данные обратных задач.

Кроме того приводятся нетривиальные примеры обратных задач, к которым применимы доказанные теоремы существования и единственности.

Работа является продолжением исследований автора [1, 2], где были получены теоремы об однозначной разрешимости обратных задач одновременного определения правой части и одного из младших коэффициентов в параболическом уравнении.

### Список литературы

1. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 795 – 806.
2. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 3. С. 368 – 381.

## О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Капустин Николай Юрьевич**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: kapustin@bk.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Рассматривается параболо-гиперболическое уравнение

$$\begin{aligned} (-y)^m u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + a(x, y)u_x(x, y) &= f(x, y), \quad y < 0, \\ u_x(x, y) - u_{yy}(x, y) &= f(x, y), \quad y > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в двух случаях:

- 1)  $m = 2$ ,  $a(x, y)$ ,  $a_x(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $a(x, y) \geq \mu > 0$ ;
- 2)  $m = 0$ ,  $a(x, y) = 0$ .

Область определения  $D$  является объединением характеристического треугольника  $D^-$  уравнения (1) с вершинами в точках  $A(0, 0)$ ,  $C(1/2, -1/2 - m/4)$ ,  $B(1, 0)$ , квадрата  $D^+$  с вершинами в точках  $A$ ,  $M(0, 1)$ ,  $N(1, 1)$ ,  $B$  и интервала  $AB$ .

Классическим решением задачи Трикоми для уравнения (1) будем называть функцию  $u(x, y)$  из класса  $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup MN) \cap C^{1,2}(D^+) \cap C^2(D^-)$ , являющуюся решением уравнения (1) в областях  $D^+$ ,  $D^-$  и удовлетворяющую граничным условиям

$$u(x, y)|_{CA} = \psi(y), \quad u(x, y)|_{AM} = \varphi_1(y), \quad u(x, y)|_{MN} = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где  $f(x, y) \in C(D^+ \cup D^-)$ ,  $\psi(y) \in C[-1, 0]$ ,  $\varphi_1(y) \in C[0, 1]$ ,  $\varphi_2(x) \in C[0, 1]$ ,  $\psi(0) = \varphi_1(0)$ ,  $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$ .

В первом случае, т.е. при вырождении гиперболической части на линии изменения типа устанавливается утверждение

**Теорема 1.** *Пусть  $f(x, y) \in L_2(D)$  и существует классическое решение задачи Трикоми. Тогда для этого решения справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2(D)} + \|u(x, 0)\|_{L_2(0,1)} &\leq C_1 \left( \|f(x, y)\|_{L_2(D)} + \|y\psi(y)\|_{L_2(-1,0)} + \right. \\ &\quad \left. + \|(a(y^2/2, y) - 1)\psi(y)\|_{L_1(-1,0)} + \|\varphi_1(y)\|_{L_1(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)} \right), \end{aligned} \tag{3}$$

в которой положительная постоянная  $C_1$  не зависит от функции  $u(x, y)$ .

Класс граничных функций на характеристике  $AC$  при переходе к изучению обобщенной  $L_2$ -разрешимости зависит от коэффициента  $a(x, y)$ . Свойства такого пространства могут быть изучены по методам работы [1].

Во втором случае, т.е. при волновом операторе в гиперболической части справедлив аналогичный результат, но вместо двух норм для функции  $\psi(y)$  в оценке (3) будет обычная  $L_2$ -норма. Используя спектральный метод в частном случае для волнового оператора априорную оценку можно уточнить

**Теорема 1.** *Пусть  $\varphi_1(y) \in C^\alpha[0, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$ ,  $f(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in D^+ \cup D^-$ ,  $\psi(y) = 0$ ,  $y \in [-1/2, 0]$ ,  $\varphi_2(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $p > 1$ ,  $\varepsilon$  – любое число из полуинтервала  $(0, 3p - 1]$ . Тогда существует классическое решение задачи Трикоми (1)-(2) и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u(x, y)\|_{L_{3p-\varepsilon}(D^+)} + \|u(x, y)\|_{C(\overline{D^-})} \leq C_2 \|\varphi_1(y)\|_{L_p(0,1)}, \quad (4)$$

где постоянная  $C_2$  не зависит от функции  $u(x, y)$ .

Установлено, что оценка (4) при  $\varepsilon = 0$ , вообще говоря, неверна.

При спектральном подходе возникает задача со спектральным параметром в граничном условии, которую рассматривал академик А.А. Самарский в работе [2].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00847 а, № 17-51-18042 Болг а).

### Список литературы

1. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I. // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 2 – 78.
2. Самарский А. А. Об одной задаче распространения тепла. // Вестник МГУ. 1947. № 3. С. 85 – 102.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ В УРАВНЕНИЯХ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Коэнанов Александр Иванович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: kozhanov@math.nsc.ru*

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия*

В обратных задачах для дифференциальных уравнений в частных производных зачастую предполагается, что неизвестные коэффициенты являются функциями либо пространственных переменных, либо временной переменной. Сравнительно малоизученными представляются обратные задачи, в которых неизвестные коэффициенты есть величины постоянные (т.е. скаляры). Именно о таких задачах и будет идти речь в докладе.

В частности, в докладе будут представлены результаты о разрешимости — обратных задач определения вместе с решением  $u(x, t)$  также параметра  $a$  в телеграфном уравнении

$$u_{tt} - \Delta u + au = f(x, t);$$

— обратных задач определения вместе с решением  $u(x, t)$  также параметра  $a$ , определяющего коэффициент поглощения в уравнении

$$u_t - \Delta u + [c(x, t) + aq_0(x, t)]u = f(x, t);$$

— обратных задач определения параметра  $a$  в уравнениях соболевского типа

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}(u - \Delta u) + Bu + au = f(x, t)$$

( $p \geq 1$  — целое,  $B$  — эллиптический оператор, действующий по пространственным переменным)

и ряд других результатов о разрешимости обратных задач нахождения вместе с решением дифференциальных уравнений также неизвестных параметров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00620.

**АСИМПТОТИКА ПРОИЗВОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ  
РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ  
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**Конёнков Андрей Николаевич**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru*

*Рязанский государственный университет, Рязань, Россия*

Рассматривается параболическое уравнение

$$p(x)\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (1)$$

где измеримая функция  $p$  удовлетворяет условию

$$0 < \mu \leq p(x) \leq \mu^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

и существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(x) dx = a_1^2, \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 p(x) dx = a_2^2, \quad a_1, a_2 > 0. \quad (3)$$

В работе [1] доказано существование и единственность слабого фундаментального решения  $\Gamma(x, \xi, t, \tau) = \Gamma(x, \xi, t - \tau)$  уравнения (1).

**Теорема.** *Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда для всех  $x, \xi \in \mathbb{R}$  и  $n \geq 0$*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n \Gamma(x, \xi, t) / p(\xi) = \frac{1}{(a_1 + a_2) \Gamma(\frac{1}{2} - n)},$$

*причем для каждого  $n$  сходимость равномерная на компактах.*

Также мы рассматриваем вопрос об асимптотической близости функций  $t^{n+1/2} \partial_t^n \Gamma(x, \xi, t) / p(\xi)$  для двух уравнений.

**Список литературы**

1. Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д. Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // УМН. 1984. Т. 39. № 3(237). С. 107–156.

**КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В  
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ**

*Корзюк Виктор Иванович<sup>1</sup>*

*Козловская Инесса Станиславовна<sup>2</sup>*

*Наумовец Светлана Николаевна<sup>3</sup>*

1: д.ф. – м. н., академик НАН Беларуси, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

2: канд. ф. – м. н., доцент, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

3: Брестский государственный технологический университет, Брест, Беларусь

E-mail: korzyuk@bsu.by, kozlovskaia@bsu.by, e-cveta@tut.by

В приложениях возникают многие задачи для нестационарных уравнений с меняющимися относительно временной переменной границами изучаемого объекта. В результате математическую модель получаем в виде смешанных задач в нецилиндрических областях.

Из литературы можно указать работу [1], где по видимому, впервые в криволинейной полуполосе рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения. Здесь с помощью соответствующей замены независимых переменных боковые части границы выпрямляются, что приводит к изменению основного уравнения не в лучшую сторону. Далее применен метод Галеркина.

Метод характеристик позволяет успешно строить в аналитическом виде классические решения для многих задач и в случае криволинейных областей на плоскости для гиперболических уравнений с некоторыми только техническими усложнениями по сравнению с аналогичными задачами в случае полуполос с прямолинейными боковыми частями границ заданных областей [2 – 6]. Таким задачам и посвящен данный доклад.

**Список литературы**

1. Драгиева Н. А. Применение метода Галеркина к решению волнового уравнения в области с подвижными границами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 4. С. 946 – 956.
2. Корзюк В. И., Столлярчук И. И. Первая смешанная задача в криволинейной полуполосе уравнения Клейна – Гордона – Фокса // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 77 – 88.
3. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Вести НАН Беларуси. Серия физ. – мат. н. 2015. № 1. С. 7 – 20.

4. Корзюк В. И. Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Доклады НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 3. С. 7 – 13.
5. Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Севастюк В. А. О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 35 – 42.
6. Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Сериков В. П. Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 43 – 53.

**ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ  
ОДНОРОДНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И  
ДОКРИТИЧЕСКИХ ВРЕМЕНАХ**

**Моисеев Евгений Иванович, Фролов Артем Алексеевич**

*д.ф. – м. н., профессор; аспирант ВМК*

*E-mail: смс@cs.msu.su, a.a.froloff@mail.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Изучена задача управления колебаниями струны, описываемыми одномерным волновым уравнением, при докритических временах, то есть численно меньше двух ее длин. Управление производится смещением на левом конце,  $u(0, t) = \mu(t)$ , при этом на правом имеется однородное граничное условие наклонной производной,  $u_x(l, t) + C * u_t(l, t) = 0$ . Константа  $C$  может быть, в том числе, равна  $+1$  или  $-1$ , этот случай приводит к неединственности решений задачи управления и рассматривается отдельно. Задача рассматривалась в смысле функций классической гладкости.

Задача управления при подобном граничном условии, но больших финальных временах рассматривалась в работах [1], [2], была показана неединственность управлений, найдено оптимальное в смысле минимизации интеграла определенной функции от управления. В изученной задаче в случае их неоднозначности управлений используются два подхода к выбору. Из-за малости финальных времен управления существуют не при всех наборах начальных и финальных функций, поэтому был исследован вопрос условий управляемости.

В изученной задаче использовался метод разбиения рассматриваемой области процесса на фазовой плоскости  $Oxt$  на подобласти и последовательного построения однозначного решения в них смешанных задач с прямым и обратным ходом времени. Найдены в явной аналитической форме как условия управляемости, так и сами управлении (когда они существуют). Два качественно разных случая - когда финальное время  $T$  больше длины струны  $l$  и когда меньше. Во втором случае управления, которое могло бы повлиять на правый край фазовой области, по сути, не существует.

**Список литературы**

1. Моисеев Е. И., Холомеева А. А. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием – Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 10. – С. 1412-1417.
2. Моисеев Е. И., Холомеева А. А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при наличии сопротивления среды на другом конце – Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. – С. 1350-1355.

**СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ Коши ДЛЯ УРАВНЕНИЙ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЗИРОВАННОГО ТИПА**

**Моисеев Тихон Евгеньевич**

*д. ф. – м. н., член-корр. РАН*

*E-mail: tsmoiseev@mail.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

В работе рассматривается вопрос о близости решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности и его гиперболизированной версии, когда перед второй производной по времени стоит малый параметр стремящийся к нулю, имеющий сингулярный характер. Впервые проблема близости решений сингулярно возмущенных и невозмущенных уравнений была исследована в работах А.Н.Тихонова и его учеников [1]. В работах [2,3,4] исследовался вопрос о величине погрешности при замене линейного параболического уравнения на гиперболическое с гладкими согласованными начальными и граничными условиями, также показано, что в случае наличия разрывов эта величина может оказаться неограниченной. В данном сообщении эта задача рассматривается для негладких контуров и разрывных начальных данных [5]. Результаты (точнее условия), полученные для гладких контуров [2], неприменимы для доказательства сходимости решения нашей задачи.

Для непрерывной функции эта задача была изучена в работе [3]. Близкие результаты получены в статье [4]. В настоящей работе [5] показано, что за исключением начальных моментов времени, погрешность гиперболизации стремится к нулю, как корень квадратный от величины добавки. Актуальность этого направления обусловлена тем, что эти результаты позволяют строить явные схемы с условиями устойчивости, характерными для уравнений гиперболического типа. Схемы такого типа особенно эффективны при использовании современных вычислительных систем с массовым параллелизмом

Автор выражает признательность академику Б.Н. Четверушкину, член-корр. В.Ф.Тишкину и Е.Е. Мышецкой за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-71-30014

**Список литературы**

1. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. Сборник. Нов. сер. 1950. Т. 27, № 1. С. 47 – 156.
2. Репин С. И., Четверушкин Б. Н. Оценка разности приближенных решений задачи Коши для параболического диффузационного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады Академии наук. 2013. Т. 451, № 3. С. 255 – 258.
3. Мышецкая Е. Е., Тишкин В. Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1299 – 1304.

4. Ильин А. А., Рыков Ю. Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470, № 4. С. 380 – 383.
5. Моисеев Т. Е., Мышецкая Е. Е. Тишкин В. Ф. О близости решений невозмущенных и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481, № 6. С. 605 – 609.

## ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

*Обросова Наталия Кирилловна, к.ф. – м. н., доцент,*

*Шананин Александр Алексеевич, д.ф. – м. н., чл.корр. РАН*

*МФТИ г. Долгопрудный, Россия, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия*

*E-mail: nobrosova@ya.ru, alexshan@ya.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Современная российская экономика после 2008г. находится в состоянии стагнации, которое характеризуется отсутствием существенного экономического роста в условиях сокращения объема “трудоемких” отраслей при росте “капиталоемкого” сектора. Это состояние подтверждается невысокой эффективностью государственных инвестиций (национальных проектов) при недостаточном для экономического роста объеме рыночных инвестиций, снижением интенсивности процесса импортозамещения производственных факторов, высокими транзакционными издержками вследствие неразвитости инфраструктуры, отсутствием «длинных денег» в российской экономике и проблемой аккумулированиябережений населения. Попытки выхода из аналогичного состояния стагнации в позднем советском периоде (политика «Ускорения» 1986 г., “Перестройки” и “Шоковой терапии”) привели к финансовой разбалансированности экономики и гиперинфляции. Такие негативные результаты говорят о необходимости учитывать косвенные последствия экономических стратегий. Адекватным инструментом анализа последствий крупных социально-экономических решений являются вычислимые математические модели. В [1] представлены методы и результаты анализа на языке математических моделей эволюции советских, а затем российских экономических структур во второй четверти XXв. с учетом особенностей фактически складывавшихся экономических отношений и институтов. Модели позволяли давать системно согласованные качественные и количественные оценки состояния экономики, в том числе тех показателей, которые не наблюдаются экономической статистикой. Результаты исследования моделей составили "летопись" экономической истории нашей страны в последние два десятилетия XX века. Принципы построения вычислимых экономико-математических моделей основаны на системном подходе к описанию экономических явлений, суть которого заключается в выделении важных для целей исследования экономических агентов составлении для этих агентов полной системы материальных и финансовых балансов; построении моделей поведения агентов; замыкании системы уравнений модели с помощью описания взаимодействия агентов на выделенных в модели рынках.

Математические модели, пригодные для анализа стратегий выхода современной российской экономики из стагнации, должны учитывать специфику сложившихся экономических решений. Для этого необходимо модифицировать традиционные подходы, решив несколько ключевых проблем. В докла-

де рассматриваются подходы, основанные на методах построения вычислимых экономико-математических моделей, к решению ряда ключевых проблем современной российской экономики. 1. Применение модификаций модели Кантора-Липмана для оценки доходности пула инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала. 2. Разработка инструментов для оценки стоимости предприятий в обрабатывающем секторе на основе показателей их деятельности в условиях сложившейся экономической конъюнктуры [2]. Актуальность обоснована потребностью восстановления и роста в обрабатывающем секторе экономики, функционирующем в условиях дефицита оборотных средств, задержек в реализации продукции, а также низкой доступности кредитных ресурсов в условиях занижения залоговой стоимости предприятий и высоких процентных ставок. 3. Проблема модификации общепринятых моделей производства и методов обработки статистической информации с учетом взаимозаменяемости производственных факторов. Новые методы предлагается развивать на основе обобщенной модели Хаутеккера-Йохансена с учетом замещения производственных факторов на микроуровне. 4. Высокие транзакционные издержки, включая коррупцию, являются причиной, снижающей инвестиционную активность. Авторами проанализировано влияние неразвитой инфраструктуры на транзакционные издержки на примере железнодорожных перевозок [3]. 5. Проблема развития моделей сберегательного поведения и потребительского кредита рамсеевского типа с целью анализа стратегий аккумулирования сбережений населения для финансирования инвестиций в реальном секторе экономики. 6. Проблема разработки панели экономических показателей в условиях структурных изменений в экономике в последние десятилетия приводит к необходимости учитывать взаимозаменяемость товаров в рамках непараметрических методов построения экономических индексов. Непараметрический метод анализа потребительского спроса позволяет, на основе проверки условий рационализируемости торговой статистики, изучать стратификацию общества. Работа выполнена при поддержке РФФИ 17-07-00507.

### **Список литературы**

1. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. The Edwin Mellen Press, UK, 1999.
2. Обросова Н. К., Шананин А. А. Модель производства в условиях нестабильного спроса с учетом влияния торговой инфраструктуры. Эргодичность и ее приложения // ЖВМ и МФ, 2015.
3. Ващенко М. П., Пронин Я. Б., Шананин А. А. Математическая модель экономики железнодорожных грузоперевозок // Труды института математики и механики УрО РАН, 2014, т.20, №4.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С  
ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО**

**Орловский Дмитрий Германович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: odg@bk.ru*

*национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва,  
Россия*

Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  задан самосопряженный оператор  $A$  с областью определения  $D(A)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $u_0 \in H$ . Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D^\alpha$  – дробная производная Капuto:

$$(D^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds,$$

( $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера).

Применяя операторное исчисление самосопряженных операторов нетрудно доказать, что формулу для решения прямой задачи (1) можно записать в следующем виде

$$u(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)f(s)ds. \quad (2)$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

двуухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим задачу определения функции  $u(t)$  со значениями в  $H$  и элемента  $p \in H$  из системы уравнений

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = Au(t) + \varphi(t)p, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1. \end{cases} \quad (3)$$

Введем понятие характеристической функции обратной задачи (3). Подней мы будем понимать следующую функцию

$$F(z) = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(z(T-s)^\alpha) \varphi(s) ds. \quad (4)$$

**Теорема 1.** Пусть пространство  $H$  гильбертово, оператор  $A$  самосопряжен и неположителен,  $0 < \alpha < 1$ , функция  $\varphi(t) \in C^1(0; T]$  и она не тождественно равна нулю на  $[0; T]$ , элементы  $u_0, u_1 \in H$ . Решение задачи (3) единствено тогда и только тогда, когда точечный спектр оператора  $A$  не содержит нулей характеристической функции (4). Решение задачи (3) существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^0 |F(\lambda)|^{-2} d(E_\lambda h, h) < \infty,$$

где  $E_\lambda$  – спектральное разложение единицы оператора  $A$ , а элемент

$$h = u_1 - E_{\alpha,1}(T^\alpha A)u_0.$$

**Теорема 2.** Пусть пространство  $H$  гильбертово, оператор  $A$  самосопряжен и неположителен,  $0 < \alpha < 1$ , функция  $\varphi(t) \in C^1[0; T]$  причем либо всюду  $\varphi(t) \geq 0$ , либо всюду  $\varphi(t) \leq 0$  и  $\varphi(T) \neq 0$ , а элементы  $u_0, u_1 \in D(A)$ . Тогда решение задачи (3) существует и единствено.

**Теорема 3.** Пусть пространство  $H$  гильбертово, оператор  $A$  самосопряжен и неположителен,  $0 < \alpha < 1$ , элементы  $u_0, u_1 \in D(A)$ . Тогда решение задачи

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= Au(t) + p, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \\ u(T) &= u_1. \end{aligned}$$

существует, единствено и дается формулами

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{T^\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{-1}(T^\alpha A) (u_1 - E_{\alpha,1}(T^\alpha A)u_0), \\ u(t) &= E_{\alpha,1}(t^\alpha A)u_0 + t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(t^\alpha A)p. \end{aligned}$$

**О ЗАДАЧЕ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

**Полосин Алексей Андреевич**

*д. ф.-м. н., доцент*

*E-mail: alexei-polosin@mail.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Для двумерного уравнения смешанного типа со спектральным параметром рассмотрена краевая задача с наклонной производной на полуокружности и условием Дирихле на отрезках характеристик. Задача сведена к интегро-дифференциальному уравнению относительно граничного значения сопряженной функции на полуокружности. Показано, что это уравнение однозначно разрешимо, при этом главная часть обратного оператора может быть найдена в явном виде.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 17-01-00847а и 17-51-18042 Болг\_а.

**Список литературы**

1. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 128 – 143.
2. Полосин А. А. О смешанной задаче с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 10. С. 1399 – 1410.
3. Kapustin N., Moiseev E., Polosin A., Popivanov N. Problem with oblique derivative and mixed boundary conditions on the diameter for the Helmholtz equation in a semidisk // AIP Conference Proceedings. 2048, 040021 (2018).

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Прилепко Алексей Иванович<sup>1</sup>*

*Костин Андрей Борисович<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф. – м. н., доцент, НИЯУ МИФИ, Москва, Россия

*E-mail:* prilepko.ai@yandex.ru, abkostin@yandex.ru

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^2$ . Рассматривается обратная задача нахождения пары функций  $\{u(x, t); f(x)\}$  из условий:

$$\rho(x) u_t - \Delta u - c(x) u = h(x, t) f(x) + g(t, x), \quad (x, t) \in Q := \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = \Psi(x, t), \quad (x, t) \in S := \partial\Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$\mathbf{l}(u) := u(x, T) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Все остальные функции, входящие в (1)–(3), считаются заданными и достаточно гладкими, а  $\Delta$  – это оператор Лапласа. Решение ищется в классе  $u \in W_2^{2,1}(Q)$ ,  $f \in L_2(\Omega)$ . В классах Гёльдера задача исследовалась в работах [1–3]. Обобщённым решениям в классах С. Л. Соболева посвящены работы [4–7], где установлено, что при выполнении неравенств

$$c(x) \leq 0, \quad |\mathbf{l}(h)(x)| \geq \delta > 0 \quad x \in \Omega; \quad \frac{h(x, t)}{\mathbf{l}(h)(x)} \geq 0, \quad \frac{h_t(x, t)}{\mathbf{l}(h)(x)} \geq 0, \quad (x, t) \in Q \quad (4)$$

обобщённое решение обратной задачи существует и единствено. Известно, что задача (1)–(3) эквивалентна операторному уравнению второго рода с вполне непрерывным в  $L_2(\Omega)$  оператором  $\mathcal{B}$ . В работах [5, 7] установлено, что при выполнении условий (4) спектральный радиус оператора  $\mathcal{B}$  меньше единицы. Это даёт возможность обосновать сходимость метода итераций построения решения обратной задачи. Обозначим  $u^0(x, t)$  решение прямой задачи (1)–(2) с  $f = 0$ . Пара  $\{u; f\}$  является решением (1)–(3) только тогда, когда пара  $\{u - u^0; f\}$  есть решение задачи вида (1)–(3), в которой  $g = u_0 = \Psi = 0$ , а вместо функции  $\chi(x)$  в условии (3) стоит функция  $\chi(x) - u^0(x, T)$ . Это позволяет свести исследование обратной задачи (1)–(3) к случаю  $g = u_0 = \Psi = 0$  с функцией  $\chi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Кроме того, при условии  $|\mathbf{l}(h)(x)| \geq \delta > 0$  в  $\Omega$ , без ограничения общности можем считать, что  $\mathbf{l}(h)(x) \equiv 1$  в  $\Omega$ . Введём обозначение  $u(x, t; f)$  для решения прямой задачи (1)–(2), в которой  $g = u_0 = \Psi = 0$ , а функция  $f \in L_2(\Omega)$  известна.

Пусть выполнены условия (4), а функция  $\chi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  произвольна. Последовательность  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ , построенная по правилу

$$f_0 = 0, \quad f_{k+1} = -\Delta \chi(x) - c(x) \chi(x) + \rho(x) u_t(x, T; f_k)$$

сходится в  $L_2(\Omega)$  к функции  $f(x)$ . При этом пара  $\{u(x, t; f); f(x)\}$  является решением обратной задачи (1)–(3), в которой  $g = u_0 = \Psi = 0$ . Аналогичные результаты о сходимости метода итераций имеют место для нелинейных обратных задач восстановления коэффициентов  $c(x)$  и  $\rho(x)$  по условию финального наблюдения, а также для задач с условием наблюдения общего вида

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega,$$

где функция  $\mu \in BV([0, T])$  (см. [7–9]).

Работа второго автора частично поддержана программой повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

### Список литературы

1. Исаков В. М. Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Доклады АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1296 – 1299.
2. Прилепко А. И., Соловьев В. В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 1971 – 1980.
3. Isakov V. M. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Comm. on Pure and Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 185 – 209.
4. Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 4. С. 49 – 68.
5. Прилепко А. И., Костин А. Б. Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений // Математические заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 89 – 94.
6. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I, II // Сибирский матем. журнал. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155; 1993. Т. 34, № 5. С. 147 – 162.
7. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 10. С. 3 – 46.
8. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. С. 167 – 188.
9. Костин А. Б. Обратная задача с нелокальным наблюдением о нахождении коэффициента при  $u_t$  в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 220 – 238.

**ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНОГО  
ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ  
ОБЛАСТЯХ**

*Псху Арсен Владимирович*

*д.ф. – м. н., доцент*

*E-mail: pskhu@list.ru*

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,  
Нальчик, Россия*

В докладе обсуждаются вопросы построения функций Грина краевых задач для уравнения

$$\left( \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x \right) u(x, y) = f(x, y) \quad (0 < \sigma < 2), \quad (1)$$

где  $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$  — дробная производная порядка  $\sigma$  [1];  $\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  — оператор Лапласа по переменной  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

В терминах специальной функции Райта [2] построены функции Грина первой, второй и смешанных краевых задач для уравнения (1) в цилиндрической области, в основании которой ограниченная или неограниченная (по пространственным переменным) прямоугольная область.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-51-45005.

**Список литературы**

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. 8, № 29. P. 71 – 79.

## НЕЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

*Пулькина Людмила Степановна*

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: louise@samdiff.ru*

*Математический факультет института ИМЭ Самарского университета, Самара, Россия*

Теоретические исследования продольных колебаний относительно толстого и короткого стержня базируются на математической модели, содержащей уравнение четвертого порядка с доминирующей смешанной производной. Этот факт был отмечен еще Рэлеем. Использование этой модели позволяет проводить более точный анализ процесса, так как присутствие в уравнении смешанной производной четвертого порядка отражает эффекты деформации стержня в поперечном направлении. В случае колебаний тонкого длинного стержня условия, заданные в точках границы области, в которой ищется решение, достаточны для адекватного описания процесса колебаний. Однако, если речь идет о колебаниях толстого короткого стержня, то следует предположить, что краевые условия, заданные на разных участках границы, могут оказаться связанными между собой некоторым соотношением. В таком случае говорят, что условия нелокальны. К настоящему времени разработаны некоторые методы доказательства разрешимости нелокальных задач [1]. В то же время гипотеза о разумности нелокального подхода к математическому моделированию многих явлений современного естествознания, в том числе колебаний твердых тел, выдвинута и со стороны инженеров [2].

В докладе рассматривается задача с нелокальными условиями для уравнения четвертого порядка.

Обозначим  $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ .

Рассмотрим уравнение

$$\sigma(x)u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{tx})_x = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу:

найти в цилиндре  $Q_T$  решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и нелокальным условиям

$$\begin{aligned} & a(0)u_x(0, t) + b(0)u_{xt}(0, t) = \\ & \alpha_{11}u(0, t) + \alpha_{12}u(l, t) + \beta_{11}u_t(0, t) + \beta_{12}u_t(l, t) + M_1u_{tt}(0, t), \\ & a(l)u_x(l, t) + b(l)u_{xt}(l, t) = \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \beta_{21}u_t(0,t) + \beta_{22}u_t(l,t) - M_2u_{tt}(l,t). \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения имеют вполне определенный физический смысл, в силу которого  $\sigma(x)$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$  положительны для всех значений аргумента.

Удалось найти условия на входные данные, обеспечивающие существование единственного обобщенного решения поставленной задачи, которое определено следующим образом:

назовем функцию  $u(x, t)$  обобщенным решением поставленной задачи, если она удовлетворяет условию  $u(x, 0) = 0$  и для любой  $v \in W_2^1(Q_T)$ ,  $v(x, T) = 0$  - тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-\sigma(x)u_tv_t + a(x)u_xv_x - b(x)u_{xt}v_{xt}) dx dt \\ & + \int_0^T v(0, t)[\alpha_{11}u(0, t) + \alpha_{12}u(l, t) + \beta_{11}u_t(0, t) + \beta_{12}u_t(l, t)] dt \\ & - \int_0^T v(l, t)[\alpha_{21}u(0, t) + \alpha_{22}u(l, t) + \beta_{21}u_t(0, t) + \beta_{22}u_t(l, t)] dt \\ & + M_1 \int_0^T u_t(0, t)v_t(0, t) dt - M_2 \int_0^T u_t(l, t)v_t(l, t) dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt. \end{aligned}$$

### Список литературы

1. Pulkina L. S., Beylin A. B., Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar// EJDE, Vol. 2019 (2019), No. 29, pp. 1-9.
2. Bažant Z., Jirásek M., Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics, 2002, pp. 1119-1149.

**ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
АРГУМЕНТОВ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

**Разгулин Александр Витальевич, Романенко Татьяна Евгеньевна,  
Будзинский Станислав Сергеевич**

*д.ф.-м.н., профессор; к.ф.-м.н., ассистент; математик 2 категории*

*E-mail: razgulin@cs.msu.ru, romanenko@cs.msu.ru, budzon@yandex.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Параболические функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) с преобразованием пространственных аргументов и запаздыванием по времени возникают при моделировании нелинейных оптических систем с обратной связью. Характер пространственно-временной динамики таких ФДУ во многом определяется механизмом обратной связи, осуществляющей взаимодействие как локальных (диффузия, дифракция, интерференция, нелинейность), так и нелокальных эффектов (запаздывание по времени и преобразование пространственных аргументов). В случае круговой симметрии ФДУ типичными решениями являются вращающиеся и стоячие волны, наблюдавшиеся в физическом эксперименте и при численном моделировании.

В докладе обсуждается разрабатываемый авторами ([1]-[6]) численно-аналитический подход к предсказанию, описанию и исследованию устойчивости таких волн. Он основан на редукции задачи к не содержащему переменную времени ФДУ, применении теории бифуркации Андронова-Хопфа для построения решения в виде степенного ряда по малому параметру, исследовании устойчивости и особенностей взаимодействия волн на основе построения нормальной формы Фариа. Эффективность этого подхода зависит от выбора пространственной области, где ставится задача. Наиболее законченный результат получен в случае окружности, моделирующей бесконечно тонкое кольцо, когда условия возбуждения волн, их форму, направление вращения и устойчивость удается выразить через коэффициенты ФДУ и параметры нелокальных пространственно-временных преобразований без использования численных аппроксимаций.

В случае кольца и круга построение нормальной формы связано с решением ряда краевых задач с зависящими от радиальной переменной коэффициентами и осуществляется с привлечением численных аппроксимаций. В этой связи особый интерес представляет случай тонкого кольца, когда на основе теории Хейла-Ругель и специального исследования спектральных асимптотик оператора Лапласа проводится построение так называемого предельного (при стремлении толщины кольца к нулю) ФДУ на окружности. К полученному предельному ФДУ затем применяется указанный выше метод, описывающий в аналитической форме условия возбуждения и специфику взаимодействия одномерных волн. Сравнение результатов прямого численного решения ФДУ

в тонком кольце с аналитическими предсказаниями на основе предельного ФДУ показали их хорошее качественное и количественное соответствие для задач моделирования пространственной-временной динамики нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью.

Романенко Т. Е. и Будзинский С. С. выполнили данную работу при поддержке РФФИ, проект №18-31-00236 мол\_а.

### Список литературы

1. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 11. С. 42–60.
2. Романенко Т. Е. Двумерные врачающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 260–263.
3. Budzinskiy S. S., Razgulin A. V. Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O(2) Hopf bifurcation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 49. P. 17–29.
4. Budzinskiy S., Razgulin A. Normal form of O(2) Hopf bifurcation in a model of a nonlinear optical system with diffraction and delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2017. № 50. P. 1–12.
5. Budzinskiy S., Romanenko T. Rotating waves in a spatially nonlocal delayed feedback optical system with diffraction // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1141. P. 012106.
6. Budzinskiy S. S., Larichev A. V., Razgulin A. V. Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2018. Vol. 44. P. 559–572.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ**

**Раутян Надежда Александровна**

*к. ф. – м. н., доцент*

*E-mail: nrautian@mail.ru*

*Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия*

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где  $A$  – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ , имеющий компактный обратный. Скалярная функция  $K(t)$  допускает представление

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau),$$

где  $d\mu$  – положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения  $\mu$ . Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1], [2]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегро-дифференциальных уравнений.

**Список литературы**

1. Rautian N. A., Vlasov V. V. Well-posedness and spectral analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels // Doklady Mathematics. 2018. V. 98, № 2. C. 502 – 505.
2. Rautian N. A., Vlasov V. V. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc.. 2014. V. 75, P. 185 – 204.

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

*Сабитов Камиль Басирович*

*д.ф. – м. н., профессор*

*E-mail: sabitov\_fmf@mail.ru*

*Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ,  
Стерлитамак, Россия*

Рассмотрим волновое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) + bu = 0 \quad (1)$$

в прямоугольном параллелепипеде

$$Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, 0 < t < T\},$$

здесь

$$D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

$a, p, q$  и  $T$  – заданные положительные действительные числа, и  $b$  – любое заданное действительное число, и поставим первую граничную задачу.

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $u(x, y, t)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y, t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \quad (2)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv 0, \quad (x, y, t) \in Q; \quad (3)$$

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=p} = u(x, y, t)|_{y=0} = u(x, y, t)|_{y=q} = 0; \quad (4)$$

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \tau(x, y), \quad u(x, y, t)|_{t=T} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (5)$$

где  $\tau(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничными условиями (4).

Как известно задача Дирихле для уравнений гиперболического типа поставлена некорректно. К этому вопросу посвящено множество работ (см. [1] и приведенную там библиографию). Соболев С.Л. [2] показал, что исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. В более популярной форме эта связь показана в работе Арнольда В.И. [3, с. 132]. Если задача Дирихле для одномерного волнового уравнения в прямоугольной области изучена достаточно полно [1], [4, с. 112–118], то эта задача для многомерного волнового уравнения практически не исследована. Только работы Денчева Р. [5, 6] посвящены задаче Дирихле для уравнения (1) при  $b = 0$ ,  $a = 1$  с ненулевой правой частью и однородными граничными условиями в области  $\Omega$ , когда  $\Omega$

– эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси  $t$ , и параллелепипед, где установлены критерий единственности и существование решения задачи в пространстве Соболева  $W_2^1(\Omega)$  при определенных условиях на правую часть, связанных сходимостью числовых рядов. При этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В данной работе в классе регулярных решений уравнения (1), т.е. удовлетворяющих условиям (2) и (3), установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5) и само решение построено в явном виде как сумма ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от двух переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах [1, 7, 8]. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе функций  $C^2(\overline{Q})$  при некоторых условиях относительно функций  $\tau(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , а также получены оценки об устойчивости решения по отношению к граничным условиям.

### Список литературы

1. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 262 – 276.
2. Соболев С. Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // ДАН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 707 – 709.
3. Арнольд В. И. Математическое понимание природы. М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
4. Сабитов К. Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013.
5. Денчев Р. О спектре одного оператора // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 2. С. 259 – 262.
6. Денчев Р. О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 3. С. 501 – 504.
7. Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для телеграфного уравнения в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2017. № 12. С. 46 – 56.
8. Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 228 – 237.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ,  
ПОРОЖДЕННОЙ ОДНОМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА**

*Савчук Артем Маркович<sup>1</sup>  
Садовничая Инна Викторовна<sup>2</sup>*

1: к.ф. – м. н., доцент, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф. – м. н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: artem\_savchuk@mail.ru, ivsad@yandex.ru

На отрезке  $[0, \pi]$  рассмотрим дифференциальное выражение

$$\ell(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Функции  $p_j(\cdot)$  предполагаются комплекснозначными и суммируемыми. Добавим к этому выражению краевые условия вида

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

При этом предполагается, что определитель  $J_{14}$ , составленный из первого и четвертого столбца матрицы  $U$ , и определитель  $J_{23}$ , составленный из второго и третьего столбцов, отличны от нуля. Дифференциальное выражение (1) вместе с краевыми условиями (2) порождают в пространстве  $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$  оператор  $L$  с областью определения

$$\mathcal{D}(L) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] \mid U(\mathbf{y}) = 0, \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\}$$

— регулярный одномерный оператор Дирака. Этот оператор имеет непустое резольвентное множество, компактную резольвенту и дискретный спектр, расположенный в некоторой горизонтальной полосе  $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha$ .

**Теорема 1.** Система собственных и присоединенных функций оператора  $L$  образует базис Рисса (со скобками, если  $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} = 0$ ) в пространстве  $\mathbb{H}$ .

**Теорема 2.** Любой регулярный оператор  $L$  порождает в пространстве  $\mathbb{H}$  сильно непрерывную группу  $V(t) = \exp(itL)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Операторное семейство  $V(t)$  допускает оценку  $\|V(t)\|_{\mathbb{H}} \leq Ce^{\alpha|t|}$ . Операторы  $V(t)$  являются ограниченными в любом соболевском пространстве  $\mathbb{H}_\theta = (W_2^\theta)^2$  при  $\theta \in [0, 1/2)$  с той же оценкой на норму. Пусть потенциал  $P(x) \in L_p$  для некоторого  $p > 1$ , а функции  $p_1$  и  $p_4$  равны нулю. Тогда группы  $V_1$  и  $V_2$ , построенные по любым двум таким операторам с одинаковыми краевыми условиями, близки в том смысле, что разность  $V_2(t) - V_1(t)$  есть ограниченный оператор из  $(L_1[0, \pi])^2$  в  $(C[0, \pi])^2$ .

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕГУЛЯРНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА В  
ЦИЛИНДРЕ

*Скубачевский Александр Леонидович<sup>1</sup>*  
*Лицко Виктория Владимировна<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, Математический институт РУДН, Москва, Россия

2: аспирант, Математический институт РУДН, Москва, Россия

E-mail: skub@lector.ru, vikalijko@gmail.com

В работах [1, 2] было доказано, что регулярный разностный оператор с постоянными коэффициентами непрерывно и взаимно однозначно отображает замыкание множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в пространстве Соболева на подпространство функций с нелокальными краевыми условиями.

Этот результат позволил применить результаты о разрешимости краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений к исследованию разрешимости эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями [1].

Рассмотрим разностный оператор  $R : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ , определяемый формулой

$$(Ru)(x) = \sum_{i=-k}^k a_i(x)u(x_1 + i, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где  $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  - комплекснозначные функции.

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  - ограниченная область с границей  $\partial Q \in C^\infty$  или  $Q = (0, d) \times G$ , где  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$  - ограниченная область с границей  $\partial G \in C^\infty$ , если  $n \geq 3$ , и  $G = (a, b)$ , если  $n = 2$ .

Введем оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q, \quad (2)$$

где  $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$  – оператор продолжения функций из  $L_2(Q)$  нулем в  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ ,  $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$  – оператор сужения функций из  $L_2(\mathbb{R}^n)$  на  $Q$ .

При любом  $\theta \leq 1$  введем матрицы  $R_1(x)$  ( $x \in \mathbb{R} \times \overline{G}$ ) порядка  $(k+1) \times (k+1)$  с элементами

$$r_{ij}^1(x) = a_{j-i}(x_1 + i - 1, x') \quad (i, j = 1, \dots, k+1) \quad (3)$$

и  $R_2(x)$  ( $x \in \mathbb{R} \times \overline{G}$ ) порядка  $k \times k$  с элементами

$$r_{ij}^2(x) = a_{j-i}(x_1 + i - 1, x') \quad (i, j = 1, \dots, k), \quad (4)$$

где  $x = (x_1, x')$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x' \in G$ .

**Определение 1.** Разностный оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  называется регулярным, если  $\det R_s(x) \neq 0$  ( $x \in \overline{Q_{s1}}$ ;  $s = 1, 2$ ) в случае  $0 < \theta < 1$ , и если  $\det R_1(x) \neq 0$  ( $x \in \overline{Q_{11}}$ ),  $\det R_2(1, x') \neq 0$  и  $\det R_2(\theta, x') \neq 0$  ( $x' \in \overline{G}$ ) в случае  $\theta = 1$ .

**Замечание 1.** Если  $0 < \theta < 1$ , то оператор  $R_Q$  является регулярным тогда и только тогда, когда он невырожден. Если  $\theta = 1$ , то невырожденный оператор  $R_Q$  в том и только том случае является регулярным, когда к тому же  $\det R_2(1, x') \neq 0$  ( $x' \in G$ ).

Обозначим через  $W_{2,\gamma}^1(Q)$  подпространство функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{aligned} w(x)|_{x_1=0} &= \sum_{i=1}^k \gamma_i^1(x') w(x_1 + i, x')|_{x_1=0}, \\ w(x)|_{x_1=d} &= \sum_{i=1}^k \gamma_i^2(x') w(x_1 - i, x')|_{x_1=d}, \\ w|_{[0,d] \times \partial G} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\gamma_i^r = \gamma_i^r(x') \in C^\infty(\overline{G})$  - комплекснозначные функции,  $\gamma = \{\gamma_i^r\}$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $R_Q$ , заданный формулами (1) и (2) регулярный. Тогда существует множество комплекснозначных функций  $\gamma = \{\gamma_i^r\}$ ,  $\gamma_i^r \in C^\infty(\overline{G})$ , такое, что оператор  $R_Q$  отображает  $\mathring{W}_2^1(Q)$  на  $W_{2,\gamma}^1(Q)$  непрерывно и взаимно однозначно.

Теорема 1 позволяет доказать фредгольмову разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в цилиндре с условиями Дирихле на границе путем сведения указанных задач к эллиптическим дифференциальным уравнениям с нелокальными условиями вида (5) на границе.

Кроме того, было показано, что прообраз подпространства функций в  $W_2^2(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (5) для нормальных производных, принадлежит пространству  $\mathring{W}_2^1(Q)$ .

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100" и гранта РФФИ № 17-01-00401.

### Список литературы

1. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // УМН; 71:5(431), 2016. С. 3 – 112.
2. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Birkhauser, Basel – Boston – Berlin, 1996.

**РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ В КЛАССАХ ХАРДИ**

**Солдатов Александр Павлович**

*д.ф. – м. н.*

*E-mail: soldatov48@gmail.com*

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Для системы Ламе плоской анизотропной теории упругости введены обобщенные потенциалы двойного слоя, связанные с теоретико - функциональным подходом. Эти потенциалы построены как для вектора смещений - решения системы Ламе, так и для сопряженных вектор - функций, описывающих тензор напряжений. Получены новые интегральные представления этих решений через указанные потенциалы. Как следствие первая и вторая краевые задачи в классе Харди  $H^p$ ,  $1 < p < \infty$ , редуцированы к эквивалентным системам граничных уравнений Фредгольма в пространстве  $L^p$  на границе области.

**РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**Соловьев Вячеслав Викторович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com*

*НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия*

Пусть  $T > 0, l > 0, 0 < a < b < l, 0 < \alpha < 1$ - фиксированные числа,  $\Omega_T = (0, l) \times (0, T]$ - прямоугольник на плоскости переменных  $(x, t)$ . В прямоугольнике  $\bar{\Omega}_T = [0, l] \times [0, T]$  рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f)$  из условий:

$$u_t - u_{xx} = f(x)h(x, t) + g(x, t), (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in [0, l], u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, T) = \chi(x), x \in [a, b]. \quad (3)$$

Будем предполагать, что входящая в уравнение (1) функция  $f(x)$  может быть отличной от нуля только на отрезке  $[a, b]$ , то есть носитель этой функции принадлежит этому отрезку. Определим прямоугольники  $P_T = [a, b] \times (0, T], Q_T = [0, a] \times (0, T] \cup [b, l] \times (0, T]$ . Определим пространство функций:

$$U(\Omega_T) = \{u \in C(\bar{\Omega}_T) : u \in C_{x,t}^{1,0}(\Omega_T) \cap C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(P_T) \cap C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)\}.$$

Так как данное пространство функций не является общепринятым при изучении задач (1)-(2) то, сформулируем сначала, теорему существования и единственности решения прямой задачи (1)-(2) в этом классе функций.

**Теорема 1.** Пусть справедливы условия  $h, h_t \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T), f \in C^\alpha[a, b]$ . Тогда прямая задача (1)-(2) имеет единственное решение для любых функций  $\mu_1, \mu_2 \in C[0, T], \varphi \in C[0, l]$  удовлетворяющих условиям согласования  $\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)$  в классе функций  $U(\Omega_T)$ .

Решением обратной задачи (1)-(3) будем называть пару функций  $(u, f) \in U(\Omega_T) \times C^\alpha[0, T]$  удовлетворяющую условиям (1)-(3).

**Теорема 2.** Пусть справедливы условия  $h, h_t \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T), |h(x, T)| \geq h_0 > 0$ . Тогда существует такое число  $\nu_0 > 0$ , что для любых отрезков  $[a, b] \subset (0, l)$  таких, что  $b - a < \nu_0$  обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение для любых функций  $\mu_1, \mu_2 \in C[0, T], \varphi \in C[0, l]$  удовлетворяющих условиям согласования  $\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)$ , и для любых функций  $\chi \in C^{2,\alpha}[a, b]$  также удовлетворяющим некоторым условиям согласования.

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ФИНАЛЬНЫМ  
УСЛОВИЕМ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО  
ПОРЯДКА**

**Тихонов Иван Владимирович<sup>1</sup>**

**Алмохамед Муатаз<sup>2</sup>**

1: д.ф.-м.н., профессор, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: Аспирант, МПГУ, Москва и университет Алеппо, Сирия

E-mail: [ivtikh@mail.ru](mailto:ivtikh@mail.ru), [mssrmtz@gmail.com](mailto:mssrmtz@gmail.com)

В банаховом пространстве  $E$  возьмем линейный замкнутый оператор  $A$  с областью определения  $D(A) \subset E$  (не обязательно плотной в  $E$ ). Поставим обратную задачу об одновременном нахождении функции  $u: [0, T] \rightarrow E$  и элемента  $g \in E$  из соотношений

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = A u(t) + g, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \\ u^{(q)}(1) = u_n. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $n, q$  — фиксированные числа (параметры задачи). Рассматриваем общий случай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \{0, \dots, n-1\}$ . Элементы  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$  считаем заданными в  $E$ . В исследовании задачи (1) используем специальное семейство целых функций

$$Y_{n,k}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(mn+k)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где  $n$  такое же, как в (1), а  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы обратная задача (1) с параметрами  $n, q$  при любом выборе элементов  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \in E$  имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции  $Y_{n,n-q}(z)$  из семейства (2) не являлся собственным значением оператора  $A$ .

Теорема 1 обобщает прежние результаты из работ [1], [2].

### Список литературы

1. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132 – 1133.
2. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637 – 644.

**О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА**

**Фурсиков Андрей Владимирович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: fursikov@gmail.com*

*Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия*

Рассматривается трехмерная система Гельмгольца, описывающая эволюцию вихря скорости вязкой несжимаемой жидкости, с периодическими краевыми условиями по пространственным переменным (т.е. заданную на трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$ ) и произвольным гладким начальным условием. Требуется найти импульсное управление с носителем в заданной подобласти  $\omega \subset \mathbb{T}^3$ , которое обеспечивает стремление к нулю с ростом времени  $L_2(\mathbb{T}^3)$ -нормы решения. Эта задача содержательна, так как не решена проблема миллениума, т.е. не доказано существование в целом гладкого решения трехмерной системы Гельмгольца (или, что эквивалентно, системы Навье-Стокса).

Квадратичный оператор, входящий в систему Гельмгольца, состоит из суммы нормального оператора  $\Phi(y)y$  чей образ коллинеарен аргументу  $y$ , и тангенциального оператора  $B_\tau(y)$ , чей образ ортогонален  $y$  в  $L_2(\mathbb{T}^3)$ . На первом этапе мы решаем задачу, опустив у системы Гельмгольца оператор  $B_\tau(y)$ . Как известно, (см.[1]) у решения полученной задачи имеется явная формула, что позволяет решить задачу стабилизации (см.[2]). На втором этапе, после возвращения оператора  $B_\tau(y)$  сделаны лишь первые шаги, точнее, получено некоторое решение задачи стабилизации, но не для системы Гельмгольца, а в случае модельной задачи для продифференцированного уравнения Бюргерса (см.[3]). Основное содержание доклада связано с изложением результатов второго этапа.

**Список литературы**

1. Fursikov A. V., On the normal type parabolic system corresponding to 3D Helmholtz system// Advances in Mathematical Analysis of PDEs. 2014. V. 232, Providence: Amer Math Soc, P. 99-118.
2. Fursikov A. V., Shatina L. S., Nonlocal stabilization of the normal equation connected with Helmholtz system by starting control// Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018. V. 38, P. 1187-1242.
3. Фурсиков А. В., Осипова Л. С., Об одном методе нелокальной стабилизации уравнения типа Бюргерса посредством импульсного управления// Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, С. 1-14. (в печати)

**ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО СИНГУЛЯРНОГО  
ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

**Чаплыгина Елена Викторовна**

к.ф.-м.н., доцент

E-mail: lena260581@yandex.ru

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орел,  
Россия

В смешанной области  $D = D^+ \cup D^- \cup I$  с линией изменения типа  $I = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}$ ;  $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J$  и  $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$  - эллиптическая и гиперболическая части области  $D$ , причём

$$D_k^+ = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\} (k = -\overline{1, 4});$$

$$D_k^- = \{(x, y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -\frac{x_1}{2} < y < 0\} (k = -\overline{1, 4}); J = J_1 \cup J_2, \text{ где } J_k = \{(x, y) : x = x_k, 0 < y < h\} (k = 1, 2);$$

$$I = \bigcup_{k=0}^2 I_k, I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\} (k = -\overline{1, 4})$$

рассматривается интегро-функциональное уравнение смешанно-составного типа

$$\sum_{k=0}^1 a_k(x) S(\alpha_1^k(x), LU) + \sum_{k=1}^2 b_k(x) S(\alpha_2^k(x), LU) = 0, \quad (1)$$

где  $S(\alpha_j^k(x), LU) = \int_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x_1)} \frac{LU(t, y) dt}{\alpha_j^k(x) - t}$ ,

а  $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (sqny) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лаврентьева-Бицадзе,

$a_k(x), b_k(x) (k = 0, 1, 2)$  - непрерывные достаточно гладкие функции;  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  - сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы класса  $C^2$ , удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x (j = 1, 2); \alpha_1(x) < x, \alpha'_1(x) > 1 (\alpha'_1(x) < 1) \text{ и}$$

$$\alpha_2(x) > x, \alpha'_2(x) < 1 (\alpha'_2(x) > 1); x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n);$$

$$\alpha_2(x_0) > 0; \alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\dots(\alpha_j(x))\dots))}_{m \text{ раз}} \text{ если } m > 0;$$

$$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\dots(\alpha_{3-j}(x))\dots))}_{-m \text{ раз}}, \text{ если } m < 0, \alpha_j^0(x) \equiv x (j = 1, 2).$$

Пусть  $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k (k = -\overline{1, 4})$

Задача Т. Найти в области  $D$  решение

$U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (J \cup I))$  уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x, h) = \varphi(x), x_0 \leq x \leq x_3,$$

$$U(x_0, y) = U(x_3, y) = 0, 0 \leq y \leq h,$$

$$U(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), x_k \leq x \leq \alpha_2^k(\frac{x_1}{2}) (k = 0, 1, 2);$$

$$U(x, y) = r(x, y), (x, y) \in \overline{D_{-1}},$$

$U(x, y) = q(x, y), (x, y) \in \overline{D_3 \cup D_4},$   
условием сопряжения

$$U(x, 0-) = U(x, 0+) = \omega(x), x_0 \leq x \leq x_3;$$

$$U_y(x, 0-) = U_y(x, 0+) = \nu(x), x_0 < x < x_3, x \neq x_1, x_2,$$

условием согласования

$$\psi_0(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi(x_3) = r(x_0, y) = q(x_3, y) = 0,$$

где  $a_k(x), b_k(x), \varphi(x), \psi_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$  - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Вопрос существования решения задачи Т сводится к однозначной разрешимости системы

$$\begin{cases} LU(x, y) = V(x, y), (x, y) \in D, \\ \sum_{k=0}^1 a_k(x) S(\alpha_1^k(x), V) + \sum_{k=1}^2 b_k(x) S(\alpha_2^k(x), V) = 0, (x, y) \in D, \end{cases}$$

причём для определения  $V(x, y)$  получено сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{V(t, y)}{x-t} dt = N_k(x, y), (x, y) \in D_k (k = 0, 1, 2).$$

**О МОДЕЛИРОВАНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
УПРУГО-ПОЛЗУЧЕЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ**

*Шамаев Алексей Станиславович<sup>1</sup>*

*Бобылева Татьяна Николаевна<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., главный научный сотрудник ИПМ имени А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

2: к.ф.-м.н., доцент, НИУ МГСУ, Москва, Россия

E-mail: sham@rambler.ru, tatyana2211@outlook.com

Математическое моделирование механических процессов в неоднородных средах связано с теорией асимптотического усреднения [1]. Представляет интерес моделирование упруго-ползучих сред на длительных интервалах времени [2, 3]. В настоящей работе рассматривается задача упруго-ползучести, которая описывается системой интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными членами типа свертки. Использование в качестве ядер ползучести и релаксации экспоненциальных ядер дает возможность в явном виде построить усредненную систему и корректор, исследовать свойства усредненных ядер. Можно, в частности, дать качественную картину распределения показателей экспонент усредненного ядра и показателей, входящих в формулы для корректора.

Применяя технику преобразования Лапласа и теорию усреднения, получим гомогенизированную модель. Она описывается в целом 29 константами и содержит шесть показателей экспонент, включая два исходных [4, 5]. В результате краевая задача может быть решена с использованием больших конечных элементов, превосходящих в несколько раз толщину слоев.

Техника, с помощью которой были получены эффективные характеристики упруго ползучих сред, может быть с успехом применена для динамических задач вязко-упругости. Так в работе [6] исследуется точность метода усреднения для определения собственных значений слоистой вязко-упругой среды. Исходная задача и задача, полученная в результате процедуры усреднения – несамосопряженные задачи, и их спектр представляет собой множество комплексных чисел. Наблюдается быстрая сходимость последовательности допредельных задач к изолированным точкам комплексного спектра усредненной задачи. Интересным явлением, которое имеет место только для несамосопряженных задач, является наличие, так называемой, "спектральной пыли". "Спектральная пыль" это множество предельных точек элементов спектра допредельных краевых задач, которые не являются точками спектра предельной (усредненной задачи). Наличие "спектральной пыли" говорит о том, что предел по Хаусдорфу спектра допредельных задач может не совпадать со спектром предельной задачи. При этом во всех исследованных нами конкретных задачах спектр предельной задачи содержался в пределе по Хаусдорфу спектров допредельных задач. При этом в некоторых случаях имело

место совпадение, а в некоторых находились отдельные точки, не принадлежащие спектру усредненной задачи, которые и называют иногда упомянутой выше "спектральной пылью". Например, в случае слоистой среды, состоящей из упругого материала и материала Кельвина-Фойхта множество, называемое "спектральной пылью" непусто [7], а в случае слоистой среды, составленной из слоев вязкой несжимаемой жидкости и упругого материала, предел по Хаусдорфу спектров исходных задач в точности совпадает со спектром усредненной задачи. Данное утверждение предполагается опубликовать в Трудах XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в августе 2019 года в г. Уфе. Интересное и важное явление отсутствия сходимости по Хаусдорфу спектров исходных задач к спектру усредненной задачи не изучено в полной мере. Очевидно, что оно связано с несамосопряженностью рассматриваемых задач, но какое именно свойство дает возможность утверждать, что это несовпадение или совпадение имеет место, пока не установлено.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект N 16 -11 -10343).

### Список литературы

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
4. Bobyleva T. N., Shamaev A. S. An efficient algorithm for calculating rheological parameters of layered soil media composed from elastic-creeping materials // Soil Mechanics and Foundation Engineering 2018. Т. 54, N 4. P. 224 – 230.
5. Bobyleva T. N., Shamaev A. S. Method of approximate calculation of the stress tensor in layered elastic-creeping environments // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2018. Т. 51, N 2. P. 138 – 143.
6. Shamaev A. S., Shumilova V. V. Calculation of natural frequencies and damping coefficients of a multi-layered composite using homogenization theory. // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2018. Т. 51, N 2. P. 126 – 131.
7. Шамаев А. С., Шумилова В. В. Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта. // Тр. МИАН. 2016. Т. 295, С. 218 – 228.

# СЕКЦИЯ

## Численные методы

### COMPUTATIONAL IDENTIFICATION OF ADSORPTION AND DESORPTION PARAMETERS FOR PORE SCALE TRANSPORT IN POROUS MEDIA

*Grigoriev Vasiliy Vasilievich<sup>1</sup>  
Iliev Oleg Petkov<sup>2</sup>*

*1: Student, NEFU, Yakutsk, Russia*

*2: PhD, Professor, Fraunhofer, ITWM, Kaiserslautern, Germany*

*E-mail: dalighieri@yandex.ru, iliev@itwm.fraunhofer.de*

Computational identification of unknown adsorption and desorption rates is discussed in conjunction with reactive flow considered at pore scale. Measured concentration of the specie at the outlet of the domain has to be provided to carry out the identification procedure. The reactive transport is governed by incompressible Navier-Stokes equations, coupled with convection-diffusion equation for species transport. The surface reactions, namely adsorption and desorption, are accounted via Robin boundary conditions. Henry and Langmuir isotherms are considered. The computational modeling is performed for a 2D periodic and random porous media. Finite element approximation in space and implicit time discretization are exploited. Deterministic and stojaistic parameter identification approaches are considered. The influence of the noise in the measurements on the accuracy of the identified parameters is discussed. Multistage identification procedure is suggested for the considered class of problems. Computational results demonstrating the potential of the considered parameter identification approaches are presented.

## NUMERICAL METHODS FOR SPECTRAL FRACTIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

**Lazarov Raytcho Dimitrov**

*DrMS, professor*

*E-mail:* [lazarov@math.tamu.edu](mailto:lazarov@math.tamu.edu)

*Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX, USA*

We shall study theoretically and compare experimentally an efficient method for solving the system of algebraic equations  $\mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , where  $\mathbb{A}$  is a symmetric and positive definite  $N \times N$  matrix. We focus on matrices obtained from the finite difference or finite element approximations of second order elliptic problems in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ . The proposed methods are based on the best uniform rational approximation  $r_{\alpha,k}(t)$  of  $t^\alpha$  on  $[0, 1]$  with  $k$  integer.

The exact solution  $\mathbf{u} = \mathbb{A}^{-\alpha} \mathbf{f}$  is then approximated by  $\mathbf{w} = \lambda_1^{-\alpha} r_{\alpha,k}(\lambda_1 \mathbb{A}^{-1}) \mathbf{f}$ , where  $\lambda_1 > 0$  is the lowest eigenvalue of  $\mathbb{A}$ . We show that the proposed method is exponentially convergent with respect to  $k$  and have some attractive properties. First, it reduces the solution of the system to solution of  $k$  systems with SPD matrices of the type  $(\mathbb{A} + c\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{f}$ . As a consequence, the method will have optimal computational complexity if a fast solver for such systems is available. Second, we introduced lumped mass inner product in the finite element space that leads to a lumped mass scheme. For this scheme we prove (under some mild condition) that the solution preserves the non-negativity of the data. Finally, we present comprehensive numerical experiments on a number of model problems with various  $\alpha$  in one and two spatial dimensions. They illustrate the properties of the method and compare its efficiency and accuracy with other methods developed by Bonito and Pasciak in [1], Harizanov et al in [2], and Vabishchevich in [3].

This work is a result of collaboration with S. Harizanov, S. Margenov, P. Marinov (Bulgarian Acad. of Sciences) and J. Pasciak (Texas A&M University).

### Список литературы

1. Bonito A., Pasciak J. A fractional Laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2017. V. 55, No 2. P. 472–495
2. Harizanov S., Lazarov R., Margenov S., Marinov P., Vutov Y.: Optimal solvers for linear systems with fractional powers of sparse SPD matrices // Numerical Linear Algebra with Applications. 2018. V. 25, No 4. P. 115–128
3. Vabishchevich P. Numerically solving an equation for fractional powers of elliptic operators // J. Computational Physics. 2015. V. 282, P. 289–302

**HIGH-ORDER ADAPTIVE TIME STEPPING FOR THE INCOMPRESSIBLE  
NAVIER-STOKES EQUATIONS**

*Peter Minev*

*Professor*

*E-mail: minev@ualberta.ca*

*Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Alberta,  
Canada*

In this talk we will present a high-order time stepping technique for the incompressible Navier-Stokes equations. The method is based on an artificial compressibility perturbation made high-order by using a Taylor-series technique. The method is suitable for time step control. It is unconditionally stable in the case of the unsteady Stokes equations and conditionally stable for the full Navier-Stokes equations. The numerical results presented in the paper suggest that the stability condition in the second case is of CFL type i.e. the time step should be of the order of the ratio of the meshsize and the magnitude of the velocity. In principle, the technique can be developed to any order in time. We illustrate the idea by giving the third-order version of the methodology. We numerically illustrate the third-order convergence rate of the method on a manufactured solution. The scheme converges with time steps randomly chosen at each time level as the size of the average time step decreases. We also demonstrate the efficiency of a simple time step control on a realistic incompressible flow in 2D.

**МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ АНОМАЛЬНОГО ТРАНСПОРТА**

**Абрашина-Жадаева Наталья Григорьевна,**

**Тимошенко Игорь Андреевич**

*д.ф. – м. н., доцент*

*E-mail: zhadaeva@bsu.by, timoshchenkoia@bsu.by*

*Физический факультет Белорусского государственного университета,*

*Минск, Беларусь*

Данный обзор является обобщением результатов работ авторов [1-4], где предложены и исследованы численные методы для решения задач транспорта в многомерных областях с уравнениями в частных производных дробного порядка как по временной переменной, так и пространственным, в случаях с односторонней и с двусторонней дробной диффузией, и приведены теоремы с указанием закономерностей поведения приближенного решения. В сообщении обсуждаются два разработанных подхода. Первый из них основан на методе расщепления основного оператора задачи и построении различных модификаций конечно-разностных схем с учетом дискретного представления производных дробного порядка. Второй - на методе декомпозиции подобластей на основе разностных схем [1-4], следяя [5]. В работе обсуждаются результаты компьютерных экспериментов и дается сравнительный анализ этих подходов.

**Список литературы**

1. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. Конечно-разностные схемы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 1 – 7.
2. Тимошенко И.А. Численный метод решения уравнения двухсторонней аномальной диффузии в многомерной области // Вестник БГУ, Серия 1. 2014. № 1. С. 96 – 100.
3. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. Некоторые методы решения краевых задач математической физики, содержащих производные дробных порядков // Материалы международной конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения”, Казань, РФ, 2016, С. 8-13.
4. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимошенко И. А. Дробно-дифференциальная модель описания электродиффузационного процесса и разностные методы ее реализации // Материалы международной конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения”, Казань, РФ, 2014, С. 29-35.
5. Жадаева Н. Г., Самарская Е. А. Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 2. С. 225 – 231.

**НОВАЯ МЕТОДИКА ФОРМУЛИРОВКИ АЛГОРИТМОВ РАЗДЕЛЕНИЯ  
ОБЛАСТИ**

**Агошков Валерий Иванович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: agoshkov@m.inm.ras.ru*

*ИВМ РАН, Москва, Россия*

*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

В настоящей работе предлагается методология построения алгоритмов разделения области, которая базируется на теории оптимального управления, результатах теории обратных и некорректных задач, применении сопряженных уравнений и современных итерационных процессах. Идея этой методологии состоит в следующем. После введения внутренней границы, разделяющей исходную область, на ней записываются условия шивки для решений подзадач в подобластях. Затем некоторые из условий шивки записываются через граничные функции, которые объявляются «управлениями» и подлежат отысканию вместе с решениями в подобластях. В качестве уравнений замыкания принимается вторая часть условий шивки, которые записываются на внутренней границе «в смысле наименьших квадратов» (возможно, с введением различного рода регуляризаций). Таким образом, получается задача оптимального управления, которая решается уже известными итерационными методами. В определенном смысле такой подход к построению методов разделения области можно трактовать как применение «метода квазирешений В.К. Иванова» с введением регуляризации по А.Н. Тихонову для отыскания граничных функций, задаваемых на внутренней границе разделения областей. Стоит отметить, что в данной методологии построения алгоритмов разделения области допустимо рассмотрение широкого класса задач математической физики (в т.ч. с несимметричными операторами, с преобладающими конвективными частями операторов и др.).

В силу сделанных выше предположений, рассматриваемая задача сводится к минимизации выпуклого квадратичного функционала, и при решении этой экстремальной задачи сопряженные операторы и задачи возникают естественным образом. Данная методология применима к задачам с операторами различных типов, порядков и с различным числом независимых переменных. Работа основывается на монографии [1], в которой данная методология описана в применении к задачам гидротермодинамики океанов и морей, а также обсуждаются пути развития рассматриваемых подходов и методов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00595).

**Список литературы**

1. Агошков В. И. Методы разделения области в задачах гидротермодинамики океанов и морей. Избранные труды, Т. VI. М.: ИВМ РАН, 2017.

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**Алиханов Анатолий Алиевич**

*к. ф.-м. н.*

*E-mail: alikhanov-tom@yandex.ru*

*Институт прикладной математики и автоматизации  
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия*

Уравнение диффузии дробного по времени порядка представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение. Его решение не всегда можно найти аналитически, поэтому необходимо использовать численные методы. Однако, в отличие от классического случая, при численном решении дифференциальных уравнений дробного по времени порядка на каком-либо временном слое нам необходима вся информация со всех предыдущих слоев. Поэтому алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка являются ресурсоемкими даже в одномерном случае. А при переходе к двумерным или, тем более, трехмерным задачам расчетное время значительно увеличивается. Поэтому построение устойчивых разностных схем повышенного порядка аппроксимации является очень важной задачей.

В работе [1] был построен разностный аналог ( $L_2 - 1_\sigma$  формула) дробной производной Капуто в специальных точках  $t = t_{j+\sigma}$ , где  $\sigma = 1 - \alpha/2$ . Если аппроксимировать производную Капуто в этих точках, то удается получить разностный аналог повышенного порядка аппроксимации  $O(\tau^{3-\alpha})$ . В работе [1] были построены разностные схемы второго порядка аппроксимации по  $h$  и  $\tau$ , а также доказана их устойчивость и сходимость. В работе [2] построена  $L_2 - 1_\sigma$  формула для случая производных дискретно и непрерывно распределенного порядков. Рассмотрены разностные схемы для уравнения диффузии распределенного порядка, доказана их устойчивость и сходимость.

В данной работе построен разностный аналог повышенного порядка аппроксимации ( $L_2$  формула) для дробной производной Капуто порядка  $\alpha \in (0, 1)$ . На базе  $L_2$  формулы построены разностные схемы для начально-краевых задач уравнения диффузии дробного по времени порядка, а также доказана их устойчивость и сходимость. Полученные результаты будут полезны при решении дифференциальных уравнений дробного порядка.

**Список литературы**

1. A. A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 280, pp. 424-438 (2015).
2. G. H. Gao, A. A. Alikhanov, Z. Z. Sun, The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for Solving the Time Multi-term and Distributed-Order Fractional Sub-diffusion Equations, J. Sci. Comput. 73(1) pp. 93-121 (2017).

**ДЕКОМПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНО  
ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С  
ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КВАДРАТЕ; ОЦЕНКИ В  
ГЁЛЬДЕРОВЫХ НОРМАХ**

**Андреев Владимир Борисович, Белухина Инна Гавриловна**

*д. ф. – м. н., профессор; к. ф. – м. н., вед. матем.*

*E-mail: andreev@cmc.msu.su, belukh@cmc.msu.su*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

При анализе численных методов решения дифференциальных уравнений обычно необходима информация о величинах производных приближаемого решения. В сингулярно возмущенном случае максимумы модулей производных порядка  $k$  оценивается величиной  $O(\varepsilon^{-\sigma k})$ , где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Несмотря на то, что эта оценка, как правило, является точной, она мало эффективна. Связано это с тем, что указанные значения производные принимают только в малой части области, называемой пограничным слоем. Вне же пограничного слоя производные решения, как правило, ограничены (до порядка, определяемого гладкостью входных данных). Поэтому до проведения оценок решение полезно представить в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих. Такое представление называют *декомпозицией решения*. Разумеется, декомпозиция не определяется однозначно, и тот или иной выбор декомпозиции связан со способом ее дальнейшего анализа и, в первую очередь, со способом анализа ее регулярной составляющей. Известные декомпозиции [1] (см. также литературу, цитированную в [2]), обладая большей общностью и широтой охвата, имеют существенный недостаток — они предъявляют довольно жесткие требования к гладкости исследуемого решения, которые далеко не всегда могут быть удовлетворены. В [3] построена декомпозиция при существенно ослабленных предположениях о гладкости решения для двумерного уравнения с постоянными коэффициентами. Неулучшаемые оценки для уравнения с постоянными коэффициентами получены в [2, 4].

В данной работе рассматривается следующая задача: в области  $\Omega := (0, 1)^2$  с границей  $\partial\Omega$  ищется решение задачи

$$\begin{aligned} Lu := -\varepsilon \Delta u + r(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y)u &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\varepsilon \in (0, 1]$  — малый параметр, а  $r(x, y)$ ,  $q(x, y)$  — положительные коэффициенты.

Эта задача имеет три пограничных слоя: регулярный слой в окрестности правой стороны квадрата и два характеристических слоя в окрестностях верхней и нижней сторон.

Основной результат работы содержит

**Теорема.** Пусть  $r(x, y)$ ,  $q(x, y)$  и  $f(x, y) \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ ,  $g(y) \in C^{k+2,\lambda}([0, 1])$ . Тогда существует такая функция  $U$ , удовлетворяющая условиям

$$LU = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad U(0, y) = g(y) \equiv g(0, y),$$

и для которой справедливы оценки

$$\varepsilon |U|_{C^{k+2,\lambda}} + \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{C^{k,\lambda}} + \sqrt{\varepsilon} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{C^{k,\lambda}} + \|U\|_{C^{k,\lambda}} \leq c (\|f\|_{C^{k,\lambda}} + \varepsilon |g|_{C^{k+2,\lambda}} + \|g\|_{C^{k+1,\lambda}}).$$

Здесь  $|\cdot|$  и  $\|\cdot\|$  — полунонорма и норма в пространстве Гёльдера.

Для решения задачи (1) справедливо представление

$$u(x, y) = U(x, y) + V(x, y),$$

и  $U(x, y)$  — регулярная составляющая решения задачи (1).

### Список литературы

1. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН – 1992.
2. Андреев В. Б. Оценки в классах Гёльдера регулярной составляющей решения сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 12. С. 1983 – 2020.
3. Kellogg R. B., Stynes M. Corner singularities and boundary layers in a simple convection-diffusion problem // J. Differ. Equat. 2005. V 213. P. 81–120.
4. Андреев В. Б., Белухина И. Г. Оценки в классах Гёльдера решения неоднородной задачи Дирихле для сингулярно возмущенного однородного уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 264 – 276.
5. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1971.

**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС В  
ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ**

*Ахромеева Татьяна Сергеевна, Малинецкий Георгий Геннадьевич*

*E-mail: maglichek@gmail.com, gmalin@keldysh.ru*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,  
Россия*

Рассмотрены методы численного анализа уравнений в частных производных, в которых основной интерес представляют установившиеся хаотические режимы (странные аттракторы в бесконечномерных системах). Для класса задач с быстро убывающим спектром линейного оператора предложен модифицированный метод Галеркина, позволяющий учесть влияние высших гармоник и более точно аппроксимировать инерциальную форму.

В настоящее время и в фундаментальных, и в прикладных исследованиях большое место занимает изучение процессов самоорганизации. Одним из типов самоорганизации является хаотические, турбулентные режимы, и, в частности, диффузионный хаос в системах реакция-диффузия [1]. Краевые задачи для таких систем некорректны по Адамару. Их решения обладают неустойчивостью по начальным данным, а, напротив, чувствительностью к таковым. За время, называемое горизонтом прогноза, возмущенное решение уже не дает информации об исходном. Естественно, такими же свойствами обладают и моделируемые физические процессы, и численные решения соответствующих краевых задач. Тем не менее, основной интерес здесь представляют установившиеся режимы, которые естественно рассматривать как аттракторы динамических систем в гильбертовом пространстве.

В этой связи возникают две основные проблемы. Первая – сравнение решений исходной задачи и её различных аппроксимаций, используемых при численном моделировании, так как из-за чувствительности к начальным данным бессмысленно сравнивать решения на одни и те же моменты времени. Вторая – общая для вычислительной математики проблема сопоставления (бесконечномерным) уравнениям в частных производных (конечномерных) динамических систем, которые будут исследоваться в ходе вычислительного эксперимента. Изучение подобных задач для широкого класса систем реакция-диффузия было начато в 1990-х годах по инициативе А.А. Самарского. Основная идея здесь связана с переносом в эту область методов и численных алгоритмов, созданных для использования странных аттракторов динамических систем небольшой размерности. В частности, представляется разумным сопоставить не сами решения, а функционалы на траектории динамических систем (которые, к тому же, имеют ясный физический смысл). К ним можно отнести инвариантные меры (точнее, их проекции на конечномерные про-

странства), ляпуновские показатели построенных численных решений, фрактальные размерности [2].

Вторая проблема может решаться на основе представления теории самоорганизации – представления о параметрах порядка. Таковыми, как было доказано, являются амплитуды первых Фурье-гармоник разложения решения по соответствующей системе, если аттрактор исходной задачи является конечномерным. Более того, оказалось, что существует конечномерная динамическая система, определяющая изменения параметров порядка (инерциальная форма), которая определяет динамику соответствующих Фурье-гармоник исходного уравнения в частных производных. При этом остальные гармоники в принципе могут быть найдены из системы алгебраических уравнений, в которую параметры порядка входят в качестве параметров [2]. Трудность состоит в том, что мы имеем дело с теоремой существования и не можем предъявить инерциальную форму в явном виде, и вынуждены иметь дело с её аппроксимациями. Очевидный подход, который Г. Хакен назвал адиабатическим исключением переменных, состоит в том, чтобы построить галеркинское приближение для первых гармоник (их должно быть не меньше, чем размерность инерциальной формы), отбросив все остальные. Однако можно предложить более точный и корректный подход, рассматривая для некого набора высших гармоник линеаризованную систему и учитывая её решение как поправку к соответствующей галёркинской системе. Эффективность предложенного подхода может быть проиллюстрирована на примере краевой задачи, имеющей принципиальное значение для систем реакция-диффузия

$$\begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)W|W|^2 \\ W_x(0, t) &= W_x(1, t) = 0, W(x, 0) = W_0(x), \\ 0 \leq t < \infty, 0 < x &\leq \infty \end{aligned}$$

Для этого уравнения доказана конечномерность аттрактора, получена зависимость размерности от параметров задачи ( $c_1$ ,  $c_2$  и  $l$ ) и имеется детальная информация о поведении соответствующих решений в небольших пространственных областях. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-01-00601 и 18-01-00619).

### Список литературы

1. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 488 с.
2. Малинецкий Г. Г., Потапов А. В., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. – М.: КомКнига, 2006. 280с. – (Синергетика: от прошлого к будущему).

## СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ Коши

*Белов Александр Александрович<sup>1</sup>  
Калиткин Николай Николаевич<sup>2</sup>*

1: к. ф. – м. н., физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: член-корреспондент РАН, профессор, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша  
РАН, Москва, Россия

*E-mail: aa.belov@physics.msu.ru, kalitkin@imamod.ru*

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{u}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u^0,$$

где  $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in R^M$ . Задачу называют жесткой, если компоненты вектора  $\mathbf{f}$  на много порядков различаются между собой или резко меняются в зависимости от  $t$ . Такие задачи исследуются с 1952 года, и для них создан ряд неплохих численных методов. Однако до сих пор остается немало ситуаций, в которых эти методы фактически отказывают: результаты внешне правдоподобны, но тщательное исследование выявляет их ошибочность. В данной работе даются рекомендации по поводу известных методов и предлагаются новые методы, которые в значительной степени позволяют преодолеть указанные трудности.

1<sup>0</sup>. Для жестких задач рекомендуется перейти к новому аргументу: вместо  $t$  взять длину дуги  $l$  интегральной кривой в пространстве  $R^{M+1} dl^2 = dt^2 + d\mathbf{u}^2$ . Для нежестких систем этот прием также облегчает численный расчет. Этот прием известен давно, но, к сожалению, пока мало распространен.

2<sup>0</sup>. Жесткие системы практически невозможно рассчитывать с постоянным шагом. Надо сильно сгущать шаг в моменты резкого изменения решения. Обычно используют автоматический выбор шага либо по вложенной схеме, либо по локальному сгущению шага. Мы предложили более перспективный метод – выбор шага  $h = \Delta l$  по кривизне  $\kappa$  интегральной кривой в пространстве  $R^{M+1}$   $h \sim \kappa^{-0.4}$ . Такой шаг оптимально обеспечивает среднеквадратичную близость интегральных кривых в метрике Хаусдорфа.

Были построены два вида формул для вычисления кривизны. Первый способ использует значение матрицы Якоби правых частей. Его порядок точности равен порядку точности используемой схемы. Этот способ ориентирован на использование неявных схем. Второй способ ориентирован на явные схемы Рунге-Кутты и выражает значение кривизны через значения правых частей на промежуточных стадиях. Его трудоемкость ничтожна, однако могут возникнуть проблемы с порядком точности.

3<sup>0</sup>. Указанный выбор шага обеспечивает хорошую надежность расчетов даже при использовании явных схем невысоких порядков точности  $p \leq 4$

(например, явных схем Рунге-Кутты). Это подтверждено расчетами ряда модельных и прикладных задач, являющихся достаточно трудными (например, задач реальной химической кинетики). Использование явных схем кардинально уменьшает трудоемкость расчетов.

Если жесткость задачи очень высока, то надежность явных схем может оказаться недостаточной. В этом случае рекомендуется использовать одностадийную явно-неявную схему Розенброка с комплексными коэффициентами. Она имеет точность  $O(h^2)$  и обладают  $L_2$ -устойчивостью, что делает ее уникальной. Однако эта схема требует вычисления матрицы Якоби, поэтому трудоемкость расчетов возрастает.

Иногда встречаются сверхжесткие задачи, для которых схема Розенброка недостаточно надежна. Тогда следует применить обратную схему Эйлера точности  $O(h)$ . Расчет одного шага при этом включает итерационный процесс. Каждая итерация такого процесса по трудоемкости эквивалентна схеме Розенброка.

4<sup>0</sup>. Большинство современных пакетов прикладных программ ограничивается однократным расчетом на той сетке, которую выбрал автомат шага. Реально полученная при этом точность может быть как больше, так и меньше запрошенной пользователем. Для нежестких систем эти пакеты дают вполне удовлетворительные результаты. Однако для систем высокой жесткости нередко фактическая точность может быть на несколько порядков хуже запросов пользователя.

Единственный способ получения гарантированной оценки точности – это проведение расчета на последовательности сгущающихся сеток с оценкой погрешности по методу Ричардсона. Для нежестких систем такой подход легко реализуется. Однако для жестких систем реализовать его непросто. Нам удалось разработать такую процедуру построения последовательности сеток, которая даже в случае достаточно жестких задач позволяет применить метод Ричардсона и дать асимптотически точную оценку погрешности численного решения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00175.

### Список литературы

1. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Экономичные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем ОДУ // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 7. В печати.
2. Жолковский Е. К., Белов А. А., Калиткин Н. Н. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 227.
3. Булатов П. Е., Белов А. А., Калиткин Н. Н. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 173.

**ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ  
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

**Бештоков Мурат Хамидбиеевич**

к. ф. – м. н., доцент

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

*Институт прикладной математики и автоматизации*

*Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия*

В цилиндре  $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$ , основанием которого является  $p$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_k \leq l_k, k = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ ,  $\overline{G} = G + \Gamma$ , рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \alpha \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (1.3)$$

где  $Lu = \sum_{k=1}^p L_k u$ ,  $L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} - q_k(x, t)u$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $0 < c_0 \leq \Theta_k(x, t) \leq c_1$ ,  $|r_k| \leq c_2$ ,  $q_k > 0$ ,  $c_0, c_1, c_2$  – положительные постоянные.

Преобразуем уравнение (1.1), тогда умножая обе части (1.1) на  $\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}t}$  и интегрируя полученное выражение по  $\tau$  от 0 до  $t$ , получим

$$\mathcal{B}_{0t}^\alpha u = Lu + \tilde{f}(x, t), \quad \alpha > 0,$$

$$\text{где } \mathcal{B}_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)} u_\xi d\xi, \quad \tilde{f}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)} f(x, \xi) d\xi - e^{-\frac{1}{\alpha}} Lu_0(x).$$

Вместо (1.1) будем рассматривать следующее уравнение с малым параметром

$$\varepsilon u_t + \mathcal{B}_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{k=1}^p L_k, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$ .

На каждом полуинтервале  $\Delta_k = \left( t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}} \right]$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$  будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (1.5)$$

$$\vartheta_{(k)} = \mu(x, t) \text{ при } x \in \Gamma_k,$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad (1.6)$$

$$\vartheta_{(k)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}) = \vartheta_{(k-1)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}), \quad k = 2, 3, \dots, p; \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1,$$

где  $\Gamma_k$  – множество граничных точек по направлению  $x_k$ . Рассмотрим уравнение (1.5) при фиксированном  $k$  с возмущенным оператором  $\tilde{L}_k$ :

$$\frac{\varepsilon}{p} \vartheta_t + \frac{1}{p} \mathcal{B}_{0t}^\alpha \vartheta_{(k)} - \tilde{L}_k \vartheta_{(k)} + f_{(k)} \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (1.7)$$

где  $\tilde{L}_k \vartheta_{(k)} = \chi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k(x, t) \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} \right) + r_k(x, t) \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} - q_k(x, t) \vartheta_{(k)}$ ,  $\chi_k = \frac{1}{1 + R_k}$ ,  $R_k = 0.5 h_k \frac{|r_k|}{\Theta_k}$  – разностное число Рейнольдса.

Каждое из уравнений (1.7) заменим разностной схемой

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{p} y_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) y_t^{\frac{s}{p}} = \\ & = \tilde{\Lambda}_k \left( \sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1 - \sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}} \right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (1.8) \\ & y^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ & y(x, 0) = u_0(x), \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

$\sigma_k$  – произвольные параметры,  $\gamma_{h,k}$  – множество граничных по направлению  $x_k$  узлов,  $\tilde{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} = \chi_k \left( a_k y_x^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} + b_k^+ a_k^{(+1)} y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}} + b_k^- a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}$ ,  $r_k^+ = 0.5(r_k + |r_k|) \geq 0$ ,  $r_k^- = 0.5(r_k - |r_k|) \leq 0$ ,  $b_k^+ = \frac{r_k^+}{\Theta_k}$ ,  $b_k^- = \frac{r_k^-}{\Theta_k}$ ,  $r_k = r_k^+ + r_k^-$ .

**Теорема.** Пусть задача (1.2) - (1.4) имеет единственное непрерывное решение  $u(x, t)$  в  $\bar{Q}_T$  при всех значениях  $\varepsilon$  и существуют непрерывные в  $\bar{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ ,  $1 \leq k$ ,  $\nu \leq p$ ,  $k \neq \nu$ ,  $0 < \alpha < 1$ , тогда решение разностной задачи (1.8) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)- (1.3) со скоростью  $O \left( \frac{h^2}{\varepsilon} + \frac{\tau}{\varepsilon^2} + \varepsilon \right)$ ,  $h^2 = o(\varepsilon)$ ,  $\tau = o(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если выбрать  $\varepsilon = \tau^{\frac{1}{3}}$  при любых  $\alpha > 0$ .

### Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

**РЕДУКЦИЯ РАЗМЕРНОСТИ В ЗАДАЧАХ РАВНОМЕРНОЙ  
РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

**Богатырев Андрей Борисович**

*д.ф. – м. н., профессор РАН*

*E-mail: ab.bogatyrev@gmail.com*

*ИВМ РАН, Москва, Россия*

Задачи равномерной (чебышевской) рациональной аппроксимации возникают в самых разных областях знаний и имеют как академический интерес, так и технологические применения. Их численное решение известно своей трудностью из-за неустойчивости, внутренне присущей этим задачам. Эти трудности можно преодолеть, если использовать для решения подстановки специального вида, возникающие из свойства альтернансы, характеризующего решения таких задач.

**Список литературы**

1. Богатырев А.Б., Экстремальные многочлены и римановы поверхности – МЦНМО, 2005, Springer 2012
2. Bogatyrev, A. Effective computation of optimal stability polynomials //Calcolo 41 (2004), no. 4, 247–256
3. Andrei Bogatyr?v, Recent Progress in Optimization of Multiband Electrical Filters (Chapter in book) Approximation and Optimization, Springer Optimization and Its Applications, 145, eds. I.C.Demetriou, P.M.Pardalos, Springer, 2019, 135-150

**РАБОТЫ А.А. САМАРСКОГО ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

*Вабищевич Петр Николаевич*

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: vabishchevich@gmail.com*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,  
Москва, Россия*

Становление вычислительной математики в Советском Союзе произошло на основе решения наиболее сложных и исключительно важных для страны научно-технических проблем создания атомного оружия и средств его доставки. В этих работах принял самое активное участие А.А. Самарский. При решении прикладных оборонных задач отработаны основные вычислительные технологии, сложилась современная концепция проведения научных исследований на основе математического моделирования и вычислительного эксперимента.

В докладе выделены основные научные результаты Александра Андреевича Самарского по вычислительной математике. Они намного опередили время и являются в настоящее время теоретической основой современных вычислительных технологий. Затрагиваемые проблемы вычислительной математики многократно обсуждались с Александром Андреевичем. Наиболее интенсивными дискуссиями были в конце 90-х годов прошлого столетия при подготовке материалов для представления на Государственную премию России, которую А.А. Самарский получил в 1999 году за цикл работ по теории разностных схем.

**УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ В  
ОБЛАСТЯХ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ**

**Васильевский Юрий Викторович**

чл.-кор. РАН, профессор

E-mail: [yuri.vassilevski@gmail.com](mailto:yuri.vassilevski@gmail.com)

ИВМ РАН, МФТИ, МГУ, Москва, Россия

В докладе представлен устойчивый метод конечно-элементного расчета несжимаемых течений в областях с изменяющейся границей. Шаг по времени не зависит от размера сеточных элементов, причем на каждом временном шаге нужно решать только одну систему линейных уравнений. Рассматриваются случай взаимодействия течения и упругих стенок (FSI) и случай уравнений Навье-Стокса в области с заданной кинематикой границы. Свойства схемы проиллюстрированы на примере нескольких тестовых задач и гемодинамических приложений.

В частности, рассматриваются двумерные и трехмерные течения в трубках со стенками, заданными нелинейными гиперэластичными моделями, взаимодействия между вязкой несжимаемой жидкостью и нелинейно упругими лепестками в трехмерной постановке, для которой известны экспериментальные данные, полученные с помощью МРТ. Также будет продемонстрирован расчет течения в левом желудочке сердца человека, движение стенки которого восстановлено из последовательности КТ изображений.

Эта работа выполнена совместно с М.А.Ольшанским (Университет Хьюстона), А.А.Даниловым (ИВМ РАН), А.В.Лозовским (ИВМ РАН) и В.Ю.Саламатовой (Сеченовский университет).

**Список литературы**

1. Lozovskiy A. V., Olshanskii M. A., Salamatova V. Y., Vassilevski Y. V. An unconditionally stable semi-implicit FSI finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2015. V. 297, P. 437–454.
2. Danilov A. A., Lozovskiy A. V., Olshanskii M. A., Vassilevski Y. V. A finite element method for the Navier-Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2017. V. 32, P. 225–236.
3. Lozovskiy A. V., Olshanskii M. A., Vassilevski Y. V. A quasi-Lagrangian finite element method for the Navier-Stokes equations in a time-dependent domain // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2018. V. 333, P. 55–73.
4. Lozovskiy A. V., Olshanskii M. A., Vassilevski Y. V. Analysis and assessment of a monolithic FSI finite element method // Comp.&Fluids. 2019. V. 179, P. 277–288.

## МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УСКОРЕНИЯ ПРОВОДЯЩИХ МАКРОТЕЛ

*Галанин Михаил Павлович<sup>1</sup>*

*Сорокин Дмитрий Леонидович<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, гл. н. с. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

2: м. н. с. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: galan@keldysh.ru, sorokin.dmitr@yandex.ru

Перспективными ускорителями макротел являются электродинамические ускорители рельсового типа. Такие устройства позволяют разгонять тела большой массы до скоростей, превышающих скорости вылета из обычных пороховых ускорителей.

Характерное время протекания электродинамических процессов в проводящих частях ускорителей много больше времени прохождения светом характерного пространственного масштаба. Также особенностью постановки является то, что главный интерес представляют процессы, протекающие именно в проводящих частях устройства, поэтому для описания электромагнитного поля целесообразно использовать уравнения Максвелла в магнитогидродинамическом (в данном случае — квазистационарном) приближении [1].

При построении разностной схемы использован метод конечных разностей, причём разностные аналоги основных операторов векторного анализа ( $\text{rot}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ ) построены с помощью метода опорных операторов (на основе инвариантных определений, не зависящих от выбора системы координат) [1].

Одним из способов управления магнитным полем в канале ускорителя является использование системы подмагничивания, представляющей собой совокупность проводников (рельсов подмагничивания), по которым протекает электрический ток [2]. В [1] проведено исследование системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении при различных способах задания граничных условий и показано, что несвязность проводящей подобласти может привести к неединственности решения задачи, т. е. ядро оператора задачи будет непустым. Для получения единственного решения системы с вырожденной матрицей можно, например, искать нормальное решение [1], т. е. решение, обладающее минимальной нормой.

Альтернативным способом решения задачи является введение дополнительных элементов («фиктивных якорей»), позволяющих выделить единственное решение, но слабо влияющих на электромагнитное поле в исследуемой области [2, 3]. С помощью метода введения «фиктивного якоря» удалось провести моделирование процесса разгона тел в ускорителях сложной конфигурации. В частности, в [4] представлены результаты моделирования электромагнитного поля в ускорителе MASEL, проведено сравнение результатов вычислительного и натурного экспериментов; исследован вопрос зависимости электромагнитного поля от конфигурации витков подмагничивания.

При исследовании физических явлений часто возникает необходимость проводить моделирование в неограниченной области. В случае, когда явление можно описать с помощью простейших линейных эллиптических операторов, проблема решена и описана, например, в [5, 6]. При моделировании электромагнитного поля в рельсotronах возникает проблема решения задачи в неограниченной области с оператором смешанного типа: процесс протекания тока в проводниках может быть описан параболическим уравнением, а электромагнитное поле в диэлектрике — эллиптическим [1 – 3].

Для решения задачи с оператором смешанного типа предложены три метода: метод расширения области, метод задания интегральных граничных условий, трёхэтапный метод [7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 18-01-00252 и № 18-31-20020.

### Список литературы

1. Галанин М. П., Попов Ю. П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
2. Галанин М. П., Сорокин Д. Л. Расчёт квазистационарных электромагнитных полей в областях, содержащих несвязные проводящие подобласти // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 19. 24 с.
3. Galanin M. P., Sorokin D. L. Simulation of Quasistationary Electromagnetic Fields in Regions Containing Disconnected Conducting Subregions // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2019. № 1. с. 4 – 15.
4. Галанин М. П., Кондратенко А. К., Лукин В. В., Родин А. С., Сорокин Д. Л. Методы численного моделирования рельсотрона с витками подмагничивания // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 3. [в печати]
5. Tsyrkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Math. 1998. V. 27. P. 465 – 532.
6. Галанин М.П., Низкая Т.В. Разработка и применение численного метода решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. № 2, 29 с.
7. Галанин М. П., Сорокин Д. Л. Разработка и применение численных методов решения задач с оператором смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. 2019. [в печати]

**ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНАХ**

*Даутов Рафаил Замилович<sup>1</sup>*

*Лапин Александр Васильевич<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, Институт ВМИИТ, КФУ, Казань, Россия

2: д.ф. – м. н., профессор, Институт ВМИИТ, КФУ, Казань, Россия, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin, P.R. China

E-mail: rafail.dautov@gmail.com, avlapine@mail.ru

Пусть  $u = u(x, t)$  обозначает значение американского опциона с ценой исполнения  $K$  и датой истечения срока действия  $T$ ,  $x$  – цену базового актива опциона,  $t$  – время до истечения срока действия, а  $\psi(x) = (x - K)^+$  – функцию выигрыша, соответствующую колл-опциону. Пусть далее

$$Au = -\frac{\sigma^2(x, t)x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (d(t) - r(t)) x \frac{\partial u}{\partial x} + r(t) u \quad (6)$$

– оператор Блэка-Шоулза с коэффициентами, которые имеют следующий смысл:  $\sigma$  – локальная волатильность,  $d$  – дивидендная доходность, а  $r$  – процентная ставка. Исходной математической моделью для задачи определения цен американских опционов является задача дополнительности ([1], р. 118):

$$\begin{aligned} u' + Au &\geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad (u' + Au)(u - \psi) = 0 \text{ при } (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ u(x, 0) &= \psi(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^+ \quad (u' = \frac{\partial u}{\partial t}). \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим следующие особенности задачи, которые затрудняют ее исследование и решение: оператор (1) имеет коэффициент, вырождающийся при  $x = 0$ , задача (2) поставлена на полуоси  $\mathbb{R}^+$ .

Прежде всего, мы определяем постоянную  $L$  такую, что исходная задача (2) заменяется эквивалентной задачей в ограниченной области  $Q = I \times (0, T]$ ,  $I = (0, L)$ , с точным граничным условием Дирихле  $u(L, t) = \psi(L)$ . Этот результат получен на основе сравнения решения задачи (2) с известным решением стационарной задачи со свободной границей ([3]).

Затем задача дополнительности (2) формулируется в виде вариационного неравенства ([2], р. 186). Именно, вводя обозначения для пространства  $V = \{v \in L^2(I) : x \frac{dv}{dx} \in L^2(I)\}$ , выпуклого множества  $K_\psi = \{v \in V : v(L) = \psi(L), v(x) \geq \psi(x) \forall x \in I\}$  и отношения двойственности между  $V^*$  и  $V$   $(., .)$ , мы ищем функцию  $u$ :

$$u \in L^2(0, T; K_\psi) : u' \in L^2(0, T; V^*), \quad u(0) = \psi \text{ и}$$

$$(u'(t) + A(t)u(t), v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K_\psi \text{ п.в.с. в } (0, T). \quad (8)$$

В предположении, что  $\sigma' \in L_\infty(Q_T)$ ,  $r' \in L_\infty(I)$ , при п.вс.  $x, t$  выполнены условия

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma(x, t) \leq \bar{\sigma}, \quad 0 < \underline{r} \leq r(t) \leq \bar{r}, \quad \left| x \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right| \leq C_\sigma,$$

мы устанавливаем существование точного решения  $u$  и вариационного неравенства (3) и его гладкость:

$$u \in L^2(0, T; H^2(I)), \quad u/x^k \in H^1(0, T; L^2(I)) \cap C([0, T]; H^1(I)), \quad k = 0, 1. \quad (9)$$

Для аппроксимации вариационного неравенства (3) мы используем кусочно-линейные конечные элементы по пространственной переменной и неявную схему по времени. Основным результатом работы является оценка:

$$\|u - u_{h\tau}\|_E = O(h + \tau^{3/4}),$$

где  $\tau$  и  $h$  – максимальные шаги сеток по времени и пространству и  $\|\cdot\|_E$  – норма в  $E = L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T, V)$ . Доказательство оценки основано на представлении схемы как результата последовательного применения метода Галеркина (аппроксимация по пространственной переменной) и метода Роте (аппроксимация по времени). При выводе оценок используется техника, развитая в работах [4, 5]. Полученная оценка является неулучшаемой, поскольку подобная оценка оптимальна для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и начальным условием  $u(x, 0) = \psi(x)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00431.

### Список литературы

1. Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford, 1993.
2. Achdou Y., Pironneau O. Computational methods for option pricing, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 2005.
3. Kwok Y. K. Mathematical models of financial derivatives. Springer Finance, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 1998.
4. Savaré G. Weak solutions and maximal regularity for abstract evolution inequalities // Adv. Math. Sci. Appl. 1996. V. 6, P. 377 – 418.
5. Dautov R. Z., Mikheeva A. I. Accuracy of Discrete Schemes for a Class of Abstract Evolution Inequalities // Differential Equations. 2013. V. 7, P. 824 – 834.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДВУХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ**

**Димова Стефка Николаева**

*д. ф.-м. н., профессор*

*E-mail: dimova@fmi.uni-sofia.bg*

*Факультет Математики и Информатики СУ "Св. Кл. Охридски София,  
Болгария*

Задача численного конструирования различных структур и волн, которые могут возникать и самоподдерживаться в нелинейной открытой среде, накладывает специфические требования на технологию вычислительного эксперимента [1].

Во первых, надо найти хорошие приближения к возможным различным структурам, соответствующих одним и тем же параметрам нелинейной среды. В случае существования инвариантных (автомодельных) решений математических моделей, роль таких приближений играют решения соответствующих автомодельных задач. Как правило, это нелинейные эллиптические задачи с неединственными решениями. Нахождение этих решений накладывает жесткие требования к численным методам - к их устойчивости, сходимости и точности.

Исследование эволюцию во времени найденных решений стационарных задач требует применения подходящих численных методов с переменным шагом по времени на адаптивных по пространству сетках.

В докладе будет представлен накопленный опыт автора и его коллег [2] при решении нелинейных эллиптических и параболических задач, связанных с нахождением и исследованием структур и волн в нелинейной теплопроводной среде, описываемой математической моделью [3]

$$u_t = \sum_{i=1}^N (k_i(u) u_{x_i})_{x_i} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Основные пункты при решении нелинейных эллиптических задач: линеаризация уравнения относительно пространственно однородных решений [4]; нахождение линеаризованных приближений и их использование в качестве начальных данных для Непрерывного аналога метода Ньютона [5] решения нелинейных задач; применение Метода конечных элементов на каждом шаге итерационного процесса; решение систем дискретных уравнений большого порядка с несимметричными матрицами; в  $N$ -мерном радиально симметричном случае применение несимметричного метода Галеркина для сингулярных в центре симметрии задач [6].

Основные пункты при решении нелинейных параболических задач: Метод конечных элементов [7] с использованием трансформации Кирхгофа; аппроксимация нелинейных коэффициентов по базису конечноэлементного пространства; динамические адаптивные сетки, согласованные с автомодельным

законом; концентрация матрицы массы [7] и решение системы ОДУ большого порядка явным методом Рунге-Кутта второго порядка точности с расширенной областью устойчивости и контролем точности [8].

### Список литературы

1. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. // Вестник АН СССР. 1979. № 5. С. 38–49.
2. Dimova S. N., Dimova M. G., Vasileva D. P. Structures and Waves in a Nonlinear Heat-Conducting Medium // In Special volume of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms and their Applications" Springer, 2013. С. 157–184.
3. Самарский А. А., Галактионов В. А. Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
4. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. С. 380 – 390.
5. Жанлав Т., Пузынин И. В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. // ЖВМ и МФ. 1992. Т. 32, № 6. С. 846 – 856.
6. Eriksson K., Thomee V. Galerkin methods for singular boundary value problems in one space dimension. // Math. Comp. 1984. V. 42, № 166. С. 345 – 367.
7. Thomee V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer, 1997.
8. Новиков В. А., Новиков Е. А. Контроль устойчивости явных одношаговых методов интегрирования ОДУ. // ДАН СССР. 1984. Т. 272, № 5. С. 1058 – 1062.

**ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА АРНОЛЬДИ ДЛЯ  
ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ  
ФУНКЦИЙ С ПАРАМЕТРОМ**

*Друскин Владимир Львович<sup>1</sup>*

*Заславский Михаил Юрьевич<sup>2</sup>*

*Книжнерман Леонид Аронович<sup>3</sup>*

1: к. ф.-м. н., Worcester Polytechnic Institute, Worcester, U.S.A.

2: к. ф.-м. н., Schlumberger-Doll Research, Boston, U.S.A.

3: д. ф.-м. н., АО “Центральная геофизическая экспедиция” (холдинг “Росгеология”)

*E-mail:* vdruskin@wpi.edu, mzaslavsky@slb.com, mmd@cge.ru

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — симметричная матрица,  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ . Мы применяем рациональный метод Арнольди [4] к вычислению векторов  $f(A; p)\varphi$ , где функция  $f(z; p)$  определена на  $A$  и  $p$  — параметр, пробегающий интервал значений. Именно, реализуется аппроксимация Галёркина на подходящем рациональном подпространстве Крылова

$$\text{span}\{(A + s_1 I)^{-1}\varphi, \dots, (A + s_m I)^{-1}\varphi\}, \quad m \geq 1. \quad (1)$$

Подчеркнём, что сдвиги  $s_j$  не зависят от значения параметра  $p$ , так что одно подпространство должно годиться для всех допустимых значений  $p$ .

В этом подходе нужно оптимально выбрать допустимые сдвиги  $s_j$  и тем самым добиться наилучшей скорости сходимости при  $m \rightarrow +\infty$ . Для нескольких популярных семейств функций  $f$  эта задача решается средствами теории плоского потенциала в терминах эллиптических функций, возникающих при рассмотрении ёмкостей и равновесных пар мер подходящих плоских конденсаторов. Конденсаторы и формулы для сдвигов сильно зависят от  $f$ .

Рассматриваются зависящие от  $m$  (конечные) и не зависящие от  $m$  (бесконечные) последовательности сдвигов  $s_j$ . За счёт некоторого ухудшения скорости сходимости возможен циклический выбор  $s_j$  (кратные полюсы).

В геофизических электроразведочных частотной и эволюционной задачах параметры  $p = \omega$  и  $p = t$  имеют смысл соответственно частоты и времени, функция  $f$  в (1) приобретает вид  $f(z, \omega) = (z + i\omega)^{-1}$  или  $f(z, \omega) = \exp(-tz)$ , так что требуется вычислить векторы

$$(A + i\omega I)^{-1}\varphi, \quad 0 < \omega_{\min} \leq |\omega| \leq \omega_{\max}, \quad A \geq 0, \quad (2)$$

или векторы

$$\exp(-tA)\varphi, \quad t \geq 0, \quad 0 < \lambda_{\min}I \leq A \leq \lambda_{\max}I. \quad (3)$$

Как видно, нужно получить решение частотной или временной электроразведочной задачи для целого интервала частот или моментов времени. При

этом матрица  $A$  получается в результате исключения из параболической системы уравнений Максвелла электрической или магнитной напряжённости и дискретизации получившегося пространственного оператора.

Задачи (2) и (3) и численные примеры из геофизики рассмотрены соответственно в статьях [3] и [2]. Статья [1] использует близкую технику и посвящена решению уравнения Ляпунова, что тесно связано с задачей (3).

Результаты численных экспериментов подтверждают оптимальность найденных наборов сдвигов и справедливость оценок погрешности.

### Список литературы

1. Druskin V., Knizhnerman L. and Simoncini V. Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation // SIAM J. Numer. Anal. 2011. V. 49, № 5. P. 1875–1898.
2. Druskin V., Knizhnerman L., Zaslavsky M. Solution of large scale evolutionary problems using rational Krylov subspaces with optimized shifts // SIAM J. Sci. Comp. 2009. V. 31, № 5. P. 3760–3780.
3. Knizhnerman L., Druskin V., Zaslavsky M. On optimal convergence rate of the Rational Krylov Subspace Reduction for electromagnetic problems in unbounded domains // SIAM J. Numer. Anal. 2009. V. 47, № 2. P. 953–971.
4. Ruhe A. The rational Krylov algorithm for nonsymmetric eigenvalue problems. III: Complex shifts for real matrices // BIT. 1994. V. 34. P. 165–176.

**Вычислительные методы решения задачи Коши для  
гамильтоновых систем**

**Еленин Георгий Георгиевич<sup>1</sup>**

**Еленина Татьяна Георгиевна<sup>2</sup>**

1: д.ф. – м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: к.ф. – м.н., младший научный сотрудник, Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия

E-mail: elenin2@rambler.ru, t.ylenina@gmail.com

Точное решение задачи Коши для гамильтоновых систем уравнений имеет ряд свойств с глубоким геометрическим и физическим содержанием. К ним относятся симплектичность отображения начального состояния в текущее состояние (теорема А. Пуанкаре), сохранение фазового объема и стандартных интегралов движения (полного количества движения, полного момента количества движения, полной энергии), а также выполнение дополнительных законов сохранения, вызванных возможной симметрией потенциальной энергии.

Широко распространенные численные методы решения задачи Коши для систем о.д.у. искажают эти свойства, что проявляется наиболее ярко на значительных интервалах времени. Существует проблема создания численных методов, сохраняющих все перечисленные выше свойства точного решения [1]. Указанной проблеме вычислительной математики уделяется значительное внимание в течение последних трех десятилетий. Тем не менее к настоящему времени не созданы такие численные методы.

Доклад содержит краткий обзор существующих численных методов решения задачи, а также результаты исследования некоторых новых численных методов. Приводятся примеры семейств новых адаптивных симплектических консервативных численных методов решения задачи Кеплера и задачи расцентрации на силовом центре, сохраняющих все перечисленные выше свойства точного решения [2]. Демонстрируются результаты анализа их точности [3].

**Список литературы**

1. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. Springer, Berlin, 2006.
2. Еленин Г. Г., Еленина Т. Г. Адаптивные симплектические консервативные численные методы решения задачи Кеплера // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 7. С. 950 – 961.
3. Еленин Г. Г., Еленина Т. Г. Тестовые испытания адаптивных симплектических консервативных численных методов решения задачи Кеплера // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 6, С. 895 – 912.

**О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ НАЛИЧИИ  
СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

**Задворнов Олег Анатольевич, Трифонова Галина Олеговна**

*д.ф.-м. н., профессор, ассистент*

*E-mail: olzad@mail.ru*

*Институт ВМиИТ К(П)ФУ, Казань, Россия*

Рассмотрена краевая задача на ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  для нелинейного уравнения с первыми краевыми условиями

$$\operatorname{div} \left( \frac{g(x, |\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|} \nabla w(x) \right) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(x - x_k), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $q_k$  – интенсивность сосредоточенной в точке  $x_k$  нагрузки ( $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\delta(\cdot)$  – функция Дирака), неотрицательная функция  $g(x, \lambda)$  при почти всех  $x \in \Omega$  сильно монотонна по  $\lambda$  и имеет линейный рост на бесконечности: существуют положительные постоянные  $\lambda_0, m_0, C_0$ , с которыми выполнено неравенство  $|g(x, \lambda) - m_0| \leq C_0, \forall \lambda \geq \lambda_0, \forall x \in \Omega$ .

В настоящей работе исследован итерационный метод решения задачи (1)-(2) (существование и единственность обобщенного решения задачи установлены в [1], свойства гладкости решения рассмотрены в [2], [3]). При соответствующем выборе начального приближения доказана сходимость итерационной последовательности к решению задачи в соболевском пространстве функций, интегрируемых вместе со своими обобщенными производными в квадрате. Заметим, что само обобщенное решение задачи (1)-(2) указанному пространству не принадлежит.

**Список литературы**

1. Задворнов О. А. Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 1. С. 155 – 163.
2. Задворнов О. А., Задворнова Г. О. О свойствах гладкости решения нелинейной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, № 1. С. 162 – 166.
3. Задворнов О. А., Задворнова Г. О. О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 7. С. 984 – 988.

**УСЛОВИЯ  $L^2$ -ДИССИПАТИВНОСТИ ЯВНЫХ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ  
КГД-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ 1D УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

**Злотник Александр Анатольевич,  
Ломоносов Тимофей Александрович**

*д. ф.-м. н., профессор; аспирант 3 г. о.*

*E-mail: azlotnik@hse.ru, tlomonosov@hse.ru*

*департамент математики ФЭН НИУ ВШЭ, Москва, Россия*

Квазигазодинамическая (КГД) система уравнений представляет собой кинетически регуляризованную систему уравнений газовой динамики. С ней связан класс явных двухслойных по времени и симметричных по пространству разностных схем, уже более 30 лет применяемых для численного решения самых разнообразных задач [1,2]. КГД система является параболической по Петровскому. Но вопросы теории КГД-разностных схем, включая строгий анализ условий их устойчивости, разработаны слабо.

В настоящей работе изучаются условия  $L^2$ -диссипативности 1D разностных схем указанного типа, линеаризованных на постоянном решении. Выводятся новые расширенные достаточные условия и — впервые — необходимые условия. Они имеют форму условий на число Куранта, определяющего шаг по времени, и дают существенную для практики информацию. При фоновой скорости  $u_* = 0$  достаточные и необходимые условия различаются между собой не более чем в 2 раза. Случай любой  $u_*$  изучен впервые. Для него условия даны в зависимости от числа Маха  $M$  и показано, как можно обеспечить их равномерность по  $M \geq 0$ . Полученные условия базируются на новых критериях диссипативности абстрактных разностных схем с регуляризацией, доказанных спектральным методом [3]. Подробно результаты даны в [4,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00262.

**Список литературы**

1. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
4. Злотник А. А., Ломоносов Т. А. Об условиях  $L^2$ -диссипативности линеаризованных явных КГД-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики // Докл. АН. 2018. Т. 482. №4. С. 375–380.
5. Злотник А. А., Ломоносов Т. А. Условия  $L^2$ -диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. №3. С. 128–140.

**ВКЛАД А.А. САМАРСКОГО В РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ**

**Ильинский Анатолий Серафимович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: celd@cs.msu.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Теория возбуждения и рассеяния электромагнитных волн в волноводах сверхвысоких частот интенсивно развивается, начиная с конца тридцатых годов двадцатого века. Стимулом к развитию теории волноводов явилось появление новых мощных генераторов СВЧ сантиметрового диапазона магнитного типа. Высокие уровни генерируемой мощности открывали возможности создания радиолокаторов СВЧ диапазона, отличающихся высокой разрешающей способностью и большой точностью. Освоение радиотехники в сантиметровом диапазоне длин волн стало насущной задачей для советской радиолокации в первые послевоенные годы.

Первые результаты по теории возбуждения радиоволноводов были представлены Г.В. Кисунько [1]. Эти работы вызвали широкий резонанс в научной среде и привлекли внимание многих ученых к решению задач волноводной электродинамики. Основной проблемой теории волноводов была формулировка математической задачи возбуждения волновода, как краевой задачи для системы уравнений Максвелла в неограниченной области, которой являлся волновод. В работах А.А. Самарского и А.Н. Тихонова [2-4] были построены системы решений уравнений Максвелла в неограниченных волноводах, которые получили название нормальных волн. Были установлены теоремы о разложимости электромагнитного поля в волноводе по системе нормальных волн, построены в явном виде компоненты тензора Грина для волноводной области, удовлетворяющие принципу излучения, который был сформулирован как условие отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Цикл работ А.А. Самарского и А.Н. Тихонова по теории возбуждения волноводов положил начало новому направлению в математической физике: рассмотрению задач в неограниченных областях пространства и формирование условий излучения для таких областей.

В настоящем докладе дается обзор результатов дальнейшего развития направления, связанного с обоснованием разложимости по нормальным волнам в волноводах, содержащих диэлектрические направляющие структуры. В таких волноводах также существуют решения уравнений Максвелла, имеющие характер распространяющихся волн. Полнота и базисность таких нормальных волн определяется как собственные значения операторного пучка несамоспряженных линейных операторов, порожденных уравнениями Максвелла и граничными условиями [5], [6]. Таким структурам присущи различные качественные особенности поведения нормальных волн, таких как аномальная

дисперсия, образование встречных потоков мощности в пределах поперечного сечения, существование точек жордановой кратности волновых чисел нормальных волн.

Решение задач о нормальных волнах позволило рассмотреть математическую задачу возбуждения нерегулярных волноводов и построить вычислительные алгоритмы расчета СВЧ-устройств.

В докладе рассмотрен приближенный метод решения задач в нерегулярном волноводе, основанный на применении нормальных волн [7].

Задача возбуждения волноводных систем заданными токами не является самосогласованной. Решение задачи реального возбуждения требует решения задачи об излучении вибратора в волноводном тракте, согласованного с волноводной линией. Еще в 1949 году самосогласованную задачу возбуждения волновода тонким вибраторным излучателем решили А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. Строгое решение о связи волноводов через отверстия методом интегральных уравнений рассмотрено в работе [8].

### Список литературы

1. Кисунько Г. В. К теории возбуждения радиоволноводов // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51, № 3. С. 348 – 351.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О возбуждении радиоволноводов // ч. I: Ж.Т.Ф. 1946. Т. 16(11). С. 1284, ч. II: Ж.Т.Ф. 1947. Т. 17(12). С. 1431, ч. III: Ж.Т.Ф. 1948. Т. 18(3). С. 487.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Ж.Т.Ф. 1948. Т. 18, № 7. С. 959 – 963.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения // ЖЭТФ. 1948. Т. 18, № 2. С. 243 – 248.
5. Ильинский А. С. Обоснование метода расчета собственных волн микрополосковой линии передачи // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1868 – 1874.
6. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Математическое моделирование процесса распространения электромагнитных колебаний в щелевых линиях передачи // Ж.В.М. и М.Ф. 1987. Т. 27, № 2. С. 252 – 261.
7. Ильинский А. С., Свешников А. Г. Метод исследования нерегулярных волноводов // Ж.В.М. и М.Ф. 1968. Т. 8, № 2. С. 363 – 373.
8. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

**МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**Кабанихин Сергей Игоревич, Шишлигин Максим Александрович**

*д.ф. – м. н., член-корреспондент РАН, профессор*

*E-mail: kabanikhin@sscc.ru, maxim.shishlenin@sscc.ru*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики*

*СО РАН, Новосибирск, Россия*

В докладе представлены новые результаты по определению и уточнению математических моделей, возникающих в физике, геофизике, экономике, биологии и медицине. Математическая модель включает в себя систему уравнений, граничные условия и, в случае эволюционного процесса, начальные данные. Некоторые из этих данных могут быть недоступными для измерений (коэффициенты уравнений, начальное состояние, условия на границе, и даже граница области). В этом случае возникает обратная задача, в которой необходимо определить неизвестные параметры модели по некоторой дополнительной информации о самом процессе, то есть, о решении прямой задачи. Дополнительной информацией о решении прямой задачи могут быть измерения на границе области, измерения во внутренних точках исследуемой области, а также спектральные данные или данные рассеяния. Приведен обзор численных методов решения обратных задач, включая методы Ньютона-Канторовича, Гельфанд-Левитана-крайна и методы оптимального управления. Рассматриваются проблемы применения генетических алгоритмов, нейронных сетей и методов машинного обучения, возникающие при решении многопараметрических обратных задач геофизики, томографии, акустики и электродинамики.

**Список литературы**

1. Кабанихин С. И. Обратные задачи. Издательство СО РАН, Новосибирск, 2018.
2. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems, VSP, Utrecht, Boston, 2004.
3. Kabanikhin S. I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. Vol. 16. No 4. P. 317–357.

**СМЕШАННЫЕ МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТОНКИХ НЕПОЛОГИХ  
ОБОЛОЧЕК**

**Карчевский Михаил Миронович**

д. ф. – м. н., профессор

E-mail: mkarchev44@yandex.ru

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*

Рассматривается вариационная постановка задачи о равновесии тонкой упругой оболочки в рамках геометрически нелинейной теории Будянского – Сандерса (см. [1], с. 551) в общих криволинейных координатах, связанных со срединной поверхностью оболочки. На основе теоремы Канторовича о неявной функции получены достаточные условия на внешнюю нагрузку, обеспечивающие существование и единственность решения обобщенного решения исходной задачи. Исследована сходимость итерационного метода Ньютона – Канторовича для построения приближенного решения. Существенную роль в этих исследованиях играет известное неравенство коэрцитивности для оператора системы уравнений линейной теории непологих оболочек в рамках модели Койтера (см. по этому поводу [1]).

Для дискретизации задачи предлагается смешанная схема метода конечных элементов, аналогичная схеме из [2] и основанная на использовании в качестве вспомогательных переменных вторых производных нормального смещения (прогиба) оболочки. Предполагается использование лагранжевых, вообще говоря, криволинейных элементов любого наперед заданного порядка.

Получены достаточные условия существования и единственности решения дискретной задачи. Указаны оценки точности в случае, когда срединная поверхность оболочки и компоненты векторного поля смещений обладают достаточной гладкостью (в смысле принадлежности соответствующему пространству Соболева).

Сконструированы и исследованы на сходимость итерационный метод Ньютона – Канторовича и метод простой итерации с предобуславливателем седлового типа для нелинейной системы уравнений относительно вектора узловых параметров решения смешанной схемы конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160014, 19-08-01184)

**Список литературы**

1. Ciarlet P. G. Mathematical Elasticity, V. III: Theory of Shells, Elsevier, 2000.
2. Астраханцев Г. П. О смешанном методе конечных элементов в задачах теории оболочек // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29, № 10. С. 1492 – 1504.

**О ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА В ОБЛАСТЯХ  
ГЛАДКОСТИ РАССЧИТЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ**

*Ковыркина Ольяна Александровна<sup>1</sup>  
Остапенко Владимир Викторович<sup>2</sup>*

1: к.ф.-м.н., Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
2: д.ф.-м.н., профессор, Новосибирский государственный университет,

*Институт гидродинамики им. М. А Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*E-mail: olyana@ngs.ru, ostapenko\_vv@ngs.ru*

Рассматриваются явные двухслойные по времени разностные схемы, предназначенные для сквозного расчета разрывных решений квазилинейных гиперболических систем законов сохранения. Изучается точность, с которой эти схемы сходятся к точному решению в некоторой области его гладкости  $G$ . Показано, что такая точность в фиксированной точке  $(x, t) \in G$  определяется порядком аппроксимации  $k$  схемы на гладких решениях и порядком точности  $\alpha$ , с которым схема приближает внутренние граничные условия на линии  $L(x, t) = S(x, t) \cap \partial G$ , где  $S(x, t)$  — область зависимости гиперболической системы в точке  $(x, t)$  и  $\partial G$  — граница области  $G$ . При условии  $\alpha \geq k$  локальная точность схемы в точке  $(x, t)$  задается порядком  $k$  ее классической аппроксимации, а при  $\alpha < k$  эта точность определяется порядком  $\alpha$  аппроксимации внутренних граничных условий на линии  $L(x, t)$ .

Если линия  $L(x, t)$  целиком примыкает к границе расчетной области, то тогда необходимого повышения на ней значения  $\alpha$  можно добиться за счет повышения точности аппроксимации начальных и граничных условий, а также за счет повышения порядка аппроксимации системы в смежных с границей ячейках разностной сетки, в которых нельзя применять основную схему. Если же линия  $L(x, t)$  какой-либо своей частью примыкает к фронту ударной волны, то тогда значения  $\alpha$  будет определяться точностью, с которой схема приближает условия Гюгонио. Именно этим объясняется снижение порядка сходимости в области влияния ударной волны при расчетах по NFC (Nonlinear Flux Correction) схемам формально повышенной точности.

В качестве конкретных примеров приведены результаты расчетов ударных волн по схеме Русанова, TVD-, MUSCL- и WENO-схемам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-11-10033).

**ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ДЛЯ РАСЧЕТА ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ  
ЛАЗЕРНОМ СПЕКАНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКОВ**

*Колдоба Александр Васильевич<sup>1</sup>*

*Повещенко Юрий Андреевич<sup>2</sup>*

1: д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Московский физико-технический институт, Москва, Россия

2: д.ф.-м.н., в.н.с., Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: koldoba@rambler.ru, hecon@mail.ru*

Одной из ключевых проблем материаловедения, возникающей при использовании технологии лазерной наплавки порошков, является предсказание остаточных напряжений в изделии, которые формируются в результате локального плавления материала и его последующей релаксацией к исходной температуре, сопровождающейся неоднородным затвердеванием [1-3]. В настоящей работе предложена методика для моделирования напряженно-деформационного состояния подложки и "валика наплавленного на нее в процессе лазерного спекания металлического порошка, вследствие их локального нагрева (выше температуры плавления) и последующего затвердевания [3]. Модель включает в себя двумерные стационарные уравнения термоупругости, описывающие напряженно-деформированное состояние неоднородно нагретого изделия, и определяющие соотношения, аппроксимирующие теплофизические и упругие свойства используемых материалов в широком диапазоне температур вплоть до температуры плавления. Разработанный для численного интегрирования уравнений термоупругости вычислительный алгоритм основан на методе опорных операторов [4-6], одним из основателей которого был А.А.Самарский. Полученное в результате численного моделирования пространственное распределение остаточных термоупругих напряжений в подложке и наплавленном слое позволяет прогнозировать появление дефектов, возникающих в изделии при лазерной наплавке порошков, в зависимости от режима лазерной обработки и теплофизических свойств применяемых материалов.

**Список литературы**

1. Мирзаде Ф. Х., Низьев В. Г., Панченко В. Я. Численное моделирование лазерного спекания металлических порошков. Современные лазерно-информационные технологии. М.: Интерконтакт Наука, 2015. С. 297 – 324.
2. Низьев В. Г., Мирзаде Ф. Х., Панченко В. Я., Чечеткин В. М., Устюгова Г. В. Тепло-массоперенос при лазерном плавлении порошковой смеси // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 8. С. 75 – 89.
3. Gusalov A. V., Malakhova-Ziablova I. S., Pavlov M. D. Thermoelastic

residual stresses and deformations at laser treatment // Physics Procedia. 2013. Vol. 41. P. 896 – 903.

4. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 7. С. 1317 – 1327.
5. Самарский А. А., Колдoba А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
6. Колдoba А. В., Повещенко Ю. А., Гасилова И. В., Дорофеева Е. Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое моделирование. Т. 24, № 12. С. 86 – 96.

**ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЯВНО РАЗРЕШИМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ ДИСБАЛАНСОМ  
«ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ»**

**Коновалов Анатолий Николаевич**

*д. ф.-м. н., академик РАН*

*E-mail: kan@sscc.ru*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, Новосибирск, Россия*

Построены и обоснованы экономичные явно-разрешимые математические модели для линейных параболических задач. Рассмотрена начально-краевая параболическая задача, с которой, например, связан реальный физический процесс распространения тепла в ограниченном фазовом объеме. Заданными параметрами изучаемого физического процесса являются скалярные функции: плотность, теплоемкость, теплопроводность и удельная плотность внутренних источников (стоков) тепла. Искомые параметры – скалярная функция температуры, вектор потока, а также вектор плотности потока. Связь между искомыми параметрами изучаемого процесса задается законом сохранения количества тепла, уравнением состояния и определяющим соотношением. Предложен подход для моделирования конкретного материала, который имеет различные агрегатные состояния. Предложен подход к построению согласованной с границей равномерной пространственной сетки. Обосновано выполнение условия сопряжено-согласованной аппроксимации.

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СЕТОЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ  
ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С  
ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ**

*Лапин Александр Васильевич<sup>1</sup>*

*Романенко Артур Данилевич<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, Институт ВМИИТ, КФУ, Казань, Россия, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin, P.R. China

2: к.ф. – м. н., Институт ВМИИТ, КФУ, Казань, Россия

E-mail: avlapine@mail.ru, romart92@mail.ru

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\text{meas } \Gamma_D > 0$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, T]$  и  $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, T]$ . Мы рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_t^\alpha y - \Delta y = u \text{ в } Q_T, \\ & y = 0 \text{ на } \Sigma_D, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = q \text{ на } \Sigma_N, \quad y = 0 \text{ при } t = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\mathcal{D}_t^\alpha y(t)$  – производная дробного порядка в определении Капуто (см. [1]):

$$\mathcal{D}_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial y}{\partial s}(s) ds, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $\Delta$  – оператор Лапласа, функции  $u$  и  $q$  играют роль функций управления, а  $y$  – функция состояния. При  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $q \in L^2(\Sigma_N)$  задача (10) имеет единственное решение  $y \in W = \{y \in L^2(0, T; V) : \mathcal{D}_t^\alpha y(t) \in L^2(Q_T)\}$ ,  $V = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$  ([2]).

Зададим целевой функционал

$$J(y, u, q) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(x, t) - y_d(x, t))^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_N} q^2 d\Gamma dt, \tag{11}$$

$y_d(x, t) \in L_2(Q)$  и множества ограничений:

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{u : |u| \leq u_{\max} \text{ п.вс. в } Q_T\}, \quad Q_{ad} = \{q : |q| \leq \bar{q} \text{ п.вс. в } \Sigma_N\}, \\ Y_{ad} &= \{y \in W : y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \text{ п.вс. в } Q_T\}. \end{aligned}$$

Будем решать задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} & \min_{(y, u, q) \in K} J(y, u, q), \\ & K = \{(y, u, q) \in Y_{ad} \times U_{ad} \times Q_{ad} \text{ и удовлетворяют уравнению (10)}\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Задача (12) имеет единственное решение  $(y, u, q)$

Мы аппроксимируем дробную производную в точке  $t_k = k\tau$  равномерной по времени сетки, используя т.н.  $L1$ -аппроксимацию:

$$\mathcal{D}_t^\alpha y(t_k) \approx \partial_t^\alpha y(t_k) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^k \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - s)^{-\alpha} ds.$$

Аппроксимацию по пространственным переменным уравнения состояния (10) и задачи оптимального управления (12) строим, используя метод конечных элементов первого порядка и простейшие квадратуры.

Сеточные аналоги (10) и (12) имеют единственное решения. Кроме того, для решения сеточной аппроксимации задачи состояния справедлива оценка устойчивости

$$\frac{1}{\tau^\alpha} \|y_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|y_h^k\|_1^2 \leq C \sum_{k=1}^n (\|u_h^k\|_{-1}^2 + \|q_h^k\|_{0,\Gamma}^2) \quad \forall n, \quad (13)$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от параметров сетки, и сеточными аналогами норм  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $H^{-1}(\Omega)$  и  $L^2(\Gamma_N)$ .

Мы строим эффективно реализуемый предобусловленный итерационный метод Удзавы для дискретной задачи оптимального управления ([3]), обосновываем его сходимость. При обосновании сходимости и выборе итерационных параметров используется оценка устойчивости (13). В частном случае отсутствия ограничений на состояние  $y$  итерационный метод сходится с линейной скоростью, не зависящей от шагов сетки.

Приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00431.

### Список литературы

1. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science and Technology, 2006.
2. Wang J. G., Ran Y. H., Yuan Z. B. Uniqueness and numerical scheme for the Robin coefficient identification of the time-fractional diffusion equation // Computers and Mathematics with Applications. 2018. V. 75, №11, P. 4107 – 4114.
3. Lapin A. Uzawa-type iterative solution methods for constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, №5, P. 681 – 697.

**ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ  
ОБТЕКАНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

**Лукин Владимир Владимирович**

*к. ф. – м. н.*

*E-mail:* vvlukin@gmail.com

*ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

В работе представлены результаты исследования численной методики решения сопряженной задачи обтекания и теплопроводности для летательного аппарата, движущегося в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Необходимость решать задачу в связанной постановке продиктована влиянием на решение точности моделирования теплообмена на поверхности обтекаемого тела. В то же время эффективное решение уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности требует применения различных численных алгоритмов с различными параметрами расчета (в частности, с существенно различными шагами по времени) и различных расчетных модулей в составе единого программного комплекса [1].

Рассмотрена методика и описан программный комплекс, включающий в себя аэродинамический и тепловой решатели, а также систему взаимодействия указанных модулей в ходе итераций. Тепловой решатель реализует метод конечных элементов применительно к задаче теплопроводности внутри летательного аппарата. В качестве аэродинамического решателя использован конечнообъемный решатель rhoCentralFoam из программного комплекса OpenFOAM [2], направленный на численное решение системы уравнений динамики вязкого сжимаемого газа.

Исследованы варианты организации итерационного процесса, возникающего при попытке учесть условия идеального теплового контакта на поверхности обтекаемого тела. Показано, что два варианта организации итерационного процесса (рис. 1) — с передачей из газа температуры и из тела теплового потока и наоборот — являются дополнительными относительно друг друга, из них сходится только один. Какой именно вариант сходится в конкретной задаче, зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности материалов. Приведены результаты численного моделирования для одномерной и полной трехмерной постановок, подтверждающие сделанные на основе теоретического анализа возникающих разностных схем выводы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-20020).

## Иллюстрации

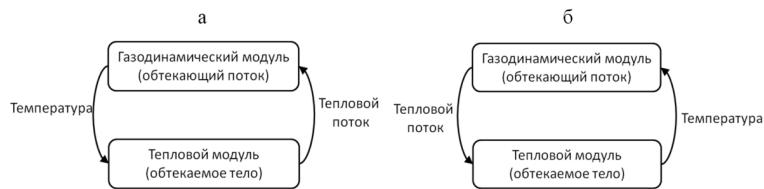


Рис. 1: Варианты обмена данными между аэродинамическим и тепловым модулями.

## Список литературы

1. Galanin M. P., Zhukov V. T., Klyushnev N. V., Kuzmina K. S., Lukin V. V., Marchevsky I. K., Rodin A. S. Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // Computers and Fluids. 2018. Vol. 172. Pp. 483 – 491.
2. Greenshields C. J., Weller H. G., Gasparini L., Reese J. M. Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2009. Vol. 63. Pp. 1 – 21.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОГРАММНОГО  
ОБЕСПЕЧЕНИЯ, УСТРОЕННОГО ПО ПРИНЦИПУ «ЧЁРНОГО ЯЩИКА»**

**Мартыненко Сергей Иванович**

*д. ф. – м. н., с. н. с.*

*E-mail: Martynenko@ciam.ru, Martynenko@icrp.ac.ru*

*ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова», Москва, Россия;*

*ИПХФ РАН, Черноголовка, Россия*

Согласно классическому определению А. А. Самарского, математическое моделирование какого-либо технического объекта или процесса условно представляют как совокупность трёх основных этапов: модель – алгоритм – программа [1]. Все проблемы, связанные с развитием современного программного обеспечения для математического моделирования физико-химических процессов, можно условно разделить на три группы: «физические», «математические» и «компьютерные». «Физические» проблемы связаны с трудностью математического описания сложных физико-химических процессов, «компьютерные» проблемы возникают из-за трудностей совместности разнообразных и быстро обновляемых программных и аппаратных средств, а «математические» проблемы связаны со сложностью формализации основных этапов вычислительного эксперимента: построения вычислительной сетки, аппроксимации основополагающих (не)линейных (интегро-)дифференциальных уравнений и эффективного решения систем нелинейных уравнений высокого порядка на последовательном или параллельном компьютере. И если сложность «физических» проблем обусловлена многообразием моделируемых процессов и глубиной их математического описания, то «математические» проблемы являются следствием недостаточной изученности основополагающих (не)линейных (интегро-)дифференциальных уравнений и недостаточным совершенством методов численного решения уравнений математической физики.

В докладе сформулированы основные требования к численным методам для программного обеспечения, устроенном по принципу «чёрного ящика»:

- универсальность (минимальное количество проблемно-зависимых компонентов);
- эффективность (трудоёмкость не более  $O(N \log N)$  арифметических операций в широком диапазоне изменения шагов сетки и параметров задачи, где есть  $N$  количество неизвестных);
- параллелизм (ускорение по сравнению с наилучшим последовательным алгоритмом);
- адаптивность (возможность гибкого изменения способа и порядка аппроксимации);
- минимальное использование ресурсов компьютера.

В докладе показано, что Универсальная Многосеточная Технология (УМТ) удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к вычислительным алгоритмам для перспективного программного обеспечения [2, 3]. Сильные (оптимальная трудоёмкость) и слабые (необходимость оптимизации и трудности распараллеливания многосеточных итераций) стороны классических многосеточных методов имеют одинаковую причину – вспомогательные СЛАУ меньшего размера, которые используют для отыскания поправки. Отличительной чертой УМТ является применение основного многосеточного принципа в односеточном алгоритме с целью минимизации количества проблемно-зависимых компонентов для последующего применения программном обеспечении, устроенном по принципу «чёрного ящика». Фактически, УМТ является односеточным методом Зейделя с блочным упорядочением неизвестных, трудоёмкость которого снижена до близкой к оптимальной без использования проблемно- зависимых компонентов.

В докладе рассмотрена конструкция УМТ и соответствие её сформулированным выше требованиям при решении (не)линейных краевых и начально-краевых задач на глобально структурированных, локально структурированных и неструктурных сетках в последовательном и параллельном исполнениях.

**Благодарности.** Исследовательские работы проводились при финансовой поддержке государства в лице РНФ по соглашению №15-11-30012 от 08.07.2015 по теме: «Суперкомпьютерное моделирование физико-химических процессов в высокоскоростном прямоточном воздушно-реактивном двигателе гиперзвукового летательного аппарата на твёрдых топливах».

### Список литературы

1. Мартыненко С. И. Многосеточная технология: теория и приложения / Под. ред. М.П. Галанина. М.: ФИЗМАЛИТ, 2015.
2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. М.: ФИЗМАЛИТ, 2002.
3. Martynenko S. I. Robust Multigrid Technique. For Black-Box Software. De Gruyter, Berlin, 2017.

**ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И  
ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Матус Пётр Павлович**

член-корреспондент НАН Беларуси

E-mail: piotr.p.matus@gmail.com

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск,  
Беларусь*

Двусторонние оценки разностных задач являются важными для задач с неограниченной нелинейностью, поскольку они необходимы для доказательства принадлежности решения окрестности точного решения. Для получения разностных аналогов дифференциальных оценок, мы используем принцип максимума для разностной схемы со знакопеременными входными данными [1].

Этот результат позволяет для линеаризованной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для многомерного квазилинейного параболического уравнения с неограниченной нелинейностью, построить двусторонние оценки решения, согласующиеся с соответствующими оценками для дифференциальной задачи [2].

В докладе приводятся результаты изучения сходимости разностных схем для начально-краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с обобщёнными решениями [4], построения монотонных численных методов для одномерной нелинейной модели Био [5], а также для слабосвязанных систем эллиптических и параболических уравнений [6].

**Список литературы**

1. Piotr Matus, Le Minh Hieu, Lubin G. Vulkov Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. –2017– Vol. 310. – P.186 –199.
2. П.П. Матус, Д.Б. Поляков О согласованных двусторонних оценках решений квазилинейных параболических уравнений и их аппроксимаций // Диффенц. уравнения. – 2017– Т. 53, № 7. – С. 991–1000.
3. Piotr Matus, Dmitriy Poliakov, Le Minh Hieu On the consistent two-side estimates for the solutions of quasilinear convection-diffusion equations and their approximations on non-uniform grids // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, Vol. 340, pp. 571-581.

4. Matus P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // Comp. Meth. Appl. Math. –2014. – Vol. 14. – No. 3. –P. 361 – 371.
5. F.J. Gaspar, F.J. Lisbona, P. Matus, V.T.K. Tuyen Numerical methods for a one-dimensional non-linear Biot's model // Journal of Computational and Applied Mathematics. –2016. – V. 293, February 2016, P. 62 –72.
6. P. Matus, F.J. Gaspar, L.M. Hieu, V.T.K. Tuyen Monotone difference schemes for weakly coupled elliptic and parabolic systems // Comp. Meth. Appl. Math. –2017. – Vol. 17. – No. 2. – P. 287 – 298.
7. П. П. Матус, Л. М. Хиену, Д. Пылак Монотонные разностные схемы второго порядка точности для квазилинейных параболических уравнений со смешанными производными// Дифференц. уравнения. – 2019– Т. 55, № 3. – С. 428–440.

<http://im.bas-net.by/~matus/>

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С  
ПЕРЕМЕННЫМИ КОЕФФИЦИЕНТАМИ**

*Меладзе Гамлет Варламович<sup>1</sup>  
Давиташвили Тинатин Давидовна<sup>2</sup>*

1: д.ф.-м.н., профессор, Институт вычислительной математики имени Н. И. Мусхелишвили  
Грузинского Технического Университета, Грузинский Университет им. Святого Андрея  
Первозванного, Тбилиси, Грузия

2: к.ф.-м.н., Тбилисский гос. Университет имени И. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия  
E-mail: h\_meladze@hotmail.com, tinatin.davitashvili@tsu.ge

В представленном докладе исследуются краевые и начально-краевые задачи с нелокальными контактными условиями для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с переменными коэффициентами.

Найти функции

$$u^-(x, t) \in C^{2,1}(-l < x < 0, 0 < t \leq T) \cap C^{1,0}(-l \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq T),$$

$$u^+(x, t) \in C^{2,1}(0 < x < l, 0 < t \leq T) \cap C^{1,0}(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T),$$

Которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k^-(x, t) \frac{\partial u^-}{\partial x} \right) - q^-(x, t) u^-(x, t) = f^-(x, t), \quad -l < x < 0, 0 < t \leq T,$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k^+(x, t) \frac{\partial u^+}{\partial x} \right) - q^+(x, t) u^+(x, t) = f^+(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T,$$

где  $k^-(x, t)$ ,  $k^+(x, t)$ ,  $q^-(x, t)$ ,  $q^+(x, t)$ ,  $f^-(x, t)$ ,  $f^+(x, t)$  - заданные достаточно гладкие действительные функции  $x, t$ ;

$$0 < \sigma_1^- \leq k^-(x, t) \leq \sigma_2^-, \quad -l \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq T,$$

$$0 < \sigma_1^+ \leq k^+(x, t) \leq \sigma_2^+, \quad 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T,$$

$$q^-(x, t) \geq 0, \quad q^+(x, t) \geq 0.$$

Функции  $u^-(x, t)$ ,  $u^+(x, t)$  удовлетворяют начальным условиям

$$u^-(x, 0) = u_0^-(x), \quad -l \leq x \leq 0,$$

$$u^+(x, 0) = u_0^+(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

и граничным условиям

$$u^-(-l, t) = \varphi^-(t), \quad u^+(l, t) = \varphi^+(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $u_0^-(x), u_0^+(x, t), \varphi^-(t), \varphi^+(t)$  - заданные действительные функции,  $\varphi^-(0) = u_0^-(l), \varphi^+(0) = u_0^+(l)$ .

Функции  $u^-(x, t), u^+(x, t)$  также удовлетворяют нелокальному контактному условию

$$u^-(0, t) = u^+(0, t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i^- u^-(\xi_i^-, t) + \sum_{j=1}^n \gamma_j^+ u^+(\xi_j^+, t) + \Phi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$\begin{aligned} -1 < \xi_m^- < \xi_{m-1}^- < \cdots < \xi_1^- < 0 < \xi_1^+ < \xi_2^+ < \cdots < \xi_n^+, \\ \gamma_i^- > 0, \quad \gamma_j^+ > 0, \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i^- + \sum_{j=1}^n \gamma_j^+ \leq 1, \end{aligned}$$

$\Phi_0(t)$  - заданная действительная функция.

Аналогично можно рассмотреть задачу с нелокальными контактными условиями для эллиптических уравнений.

Доказывается существование и единственность регулярных решений этих задач. Рассматривается итерационная процедура, при помощи которой решение исходной задачи сводится к решению последовательности классических задач Дирихле (для эллиптических уравнений) и Коши-Дирихле (для параболических уравнений). Приводятся результаты численных решений некоторых конкретных задач для эллиптических и параболических уравнений.

Во второй части доклада рассматривается применение метода разделения переменных (метода Фурье) для некоторых стационарных и нестационарных задач с нелокальными контактными условиями.

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ТТ-РАЗЛОЖЕНИЕМ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С  
ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Морозов Александр Юрьевич<sup>1</sup>*  
*Ревизников Дмитрий Леонидович<sup>1,2</sup>*

1: *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

2: *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН*

*E-mail: alex-icez@yandex.ru, reviznikov@inbox.ru*

При решении прикладных задач механики, химической кинетики, газовой динамики и других, при анализе динамических систем часто возникают ситуации, когда какие-либо параметры точно не известны, но есть информация о диапазонах, в которых находятся их значения. Для таких задач является важным получение интервальных оценок решений по известным интервальным значениям их параметров. Традиционно подобные задачи формулируются в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными начальными условиями или параметрами.

Зачастую сложность существующих методов является экспоненциальной относительно количества интервальных начальных условий или параметров, поэтому есть необходимость в эффективных способах уменьшения так называемого «проклятия размерности».

В работе рассматриваются вопросы ускорения алгоритма адаптивной интерполяции [1–3] с помощью применения ТТ-разложения [4]. Суть алгоритма заключается в построении динамической структурированной сетки на основе kd-дерева над множеством, образованным интервальными параметрами задачи. Каждая вершина дерева представляет собой регулярную интерполяционную сетку, соответствующую заданной степени интерполяционного многочлена. С каждым узлом сетки сопоставляется решение, найденное при параметрах, определяемых положением узла в пространстве. В процессе выполнения алгоритма на каждом шаге интегрирования исходной системы ОДУ строится кусочно-полиномиальная функция, которая интерполирует зависимость решения задачи от конкретных значений интервальных параметров.

В каждой вершине дерева хранится многомерный массив (тензор). Количество элементов в тензоре зависит от количества интервальных параметров как  $(p + 1)^d$ , где  $p$  — степень интерполяционного полинома по каждому измерению, а  $d$  — количество интервальных параметров задачи. Основная идея практического улучшения этой ситуации заключается в нахождении ТТ-разложения, которое можно построить с помощью алгоритма ТТ-cross, не вычисляя всех элементов тензора.

Важным свойством ТТ-разложения является то, что все арифметические (и не только) операции над тензорами можно выполнять в этом представлении. В процессе работы алгоритма над вершинами производятся следующие

операции: интерполяция по сетке и разбиение вершины на две. В первом случае для каждой точки, в которой необходимо рассчитать приближенное значение, строится тензор, состоящий из значений базисных полиномов Лагранжа, в ТТ-формате. Далее полученный тензор поэлементно умножается на тензор, хранящийся в вершине, и в конце вычисляется сумма всех элементов. Во втором случае при разбиении вершины требуется применить одномерную интерполяцию по конкретному измерению, чтобы построить недостающие значения в узлах новых вершин. Данное действие тоже может быть представлено в виде композиций нескольких операций, доступных в ТТ-формате.

С использованием модифицированного алгоритма адаптивной интерполяции выполнено моделирование движения тел под действием гравитационных сил в условиях неопределенности начальных скоростей тел, а также моделирование горения водородно-кислородной смеси при наличии неопределенностей в константах скоростей химических реакций. Вторая задача имеет большую практическую значимость, так как кинетические механизмы, полученные различными исследователями, могут существенно различаться и при этом содержать сотни реакций.

Зачастую зависимость решения от параметров может быть вырожденной (например, большая часть смешанных производных тождественно равна нулю), при этом хранение всего тензора в чистом виде является нецелесообразным и избыточным. Использование ТТ-разложения в алгоритме адаптивной интерполяции позволяет расширить область его применения на случай большого числа интервальных параметров.

### Список литературы

1. Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. Т. 54. № 7. 2018. С. 963–974.
2. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гидаспов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Математическое моделирование. Т. 30. № 12. 2018. С. 129–144.
3. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Modelling of dynamic systems with interval parameters on graphic processors // Программная инженерия. Т. 10. № 2. 2019. С. 69–76.
4. Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E. TT-cross algorithm for the approximation of multidimensional arrays // Linear Algebra Appl. V. 432, № 1. 2010. P. 70–88.

## АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ ПО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЙ

*Пискарев Сергей Игоревич*

*д.ф. – м. н.*

*E-mail: piskarev@gmail.com*

*НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Хорошо известно, что свойство максимальной регулярности играет ключевую роль в решении различных типов уравнений в частных производных с помощью функционально-аналитических методов [1]. В [1] указано, что в пространстве  $C_0^\gamma([0, T]; E)$  аналитичность  $C_0$ -полугруппы эквивалентна коэрцитивной разрешимости неоднородной задачи для уравнения первого порядка.

В то же время имеется большое количество работ, посвященных максимальной регулярности для дифференциальных уравнений второго порядка. В [2] была рассмотрена слабая коэрцитивность для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка в пространствах  $C^\gamma([0, T]; E)$ ,  $C([0, T]; E^\theta)$  и  $L^p([0, T]; E^\theta)$ , соответственно, где  $E^\theta$  - интерполяционное пространство.

В последнее время дробные дифференциальные задачи стали одной из актуальных тем исследований из-за их широкого применения в области физики, техники, биологии и т. д.

Мы исследуем коэрцитивность в пространстве  $C_0^\gamma([0, T]; E)$  для задачи Коши

$$\begin{cases} D^\beta u(s) = Au(s) + f(s), & 0 < s \leq T, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (1)$$

в абстрактном пространстве  $E$ , где оператор  $A$  является генератором аналитического разрешающего семейства, а  $D^\beta$  - дробная производная по Капуто с  $\beta \in (0, 1)$ . Затем мы приведем результаты дискретизации задачи (1) по пространству и времени.

### Список литературы

1. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Well-posedness of parabolic difference equations / Operator Theory, vol. 69, Springer Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 1994.
2. Ashyralyev A., Martinez M., Pastor J., Piskarev S. On well-posedness of abstract hyperbolic problems in function spaces // In Proceeding of the WSPC, 2009, P. 679–688.

# ДИСПЕРСИОННЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВЫСОКОТОЧНЫХ БИКОМПАКТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Рогов Борис Вадимович<sup>1</sup>*

*Брагин Михаил Дмитриевич<sup>2</sup>*

*Чикиткин Александр Викторович<sup>3</sup>*

1: д. ф.-м. н., ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

2: к. ф.-м. н., ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

3: к. ф.-м. н., МФТИ (ГУ), Долгопрудный, Россия

E-mail: [rogov.boris@gmail.com](mailto:rogov.boris@gmail.com), [michael@bragin.cc](mailto:michael@bragin.cc),  
[alexchikitkin@gmail.com](mailto:alexchikitkin@gmail.com)

Данное сообщение основано на результатах недавних работ [1–5], посвященных исследованию дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем для численного решения уравнений гиперболического типа.

Представлены результаты дисперсионного анализа полудискретных бикомпактных схем от четвертого до восьмого порядка пространственной аппроксимации. Для полудискретной двумерной бикомпактной схемы четвертого порядка приведены результаты исследования анизотропии численного решения уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y, t),$$

где  $c_x = c \cos \theta$ ,  $c_y = c \sin \theta$  — компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно,  $\theta$  — угол между направлением распространения и осью  $x$ . На рис. 1 в полярных координатах показана численная фазовая скорость  $c^*$  [5] как функция угла  $\theta$  для различных значений безразмерного волнового числа  $\varphi$ . На численных примерах продемонстрирована возможность бикомпактных схем адекватно моделировать распространение волн, в том числе с малыми длинами, на существенно неравномерной разностной сетке в течение длительного времени. Рассмотрены также свойства решений бикомпактных схем в задаче переноса ступенчатого начального профиля.

Представлены результаты Фурье-анализа полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа. Такой анализ проведен на примере модельного линейного уравнения переноса. Результаты Фурье-анализа представлены в виде графиков зависимости дисперсионных и диссипативных характеристик бикомпактных схем от безразмерного волнового числа и числа Куранта. Проведено сравнение дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем с аналогичными свойствами других широко используемых разностных схем для уравнений гиперболического типа. Показано, что бикомпактные схемы имеют одно из лучших спектральных разрешений среди сравниваемых разностных схем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857-а.

### Иллюстрации

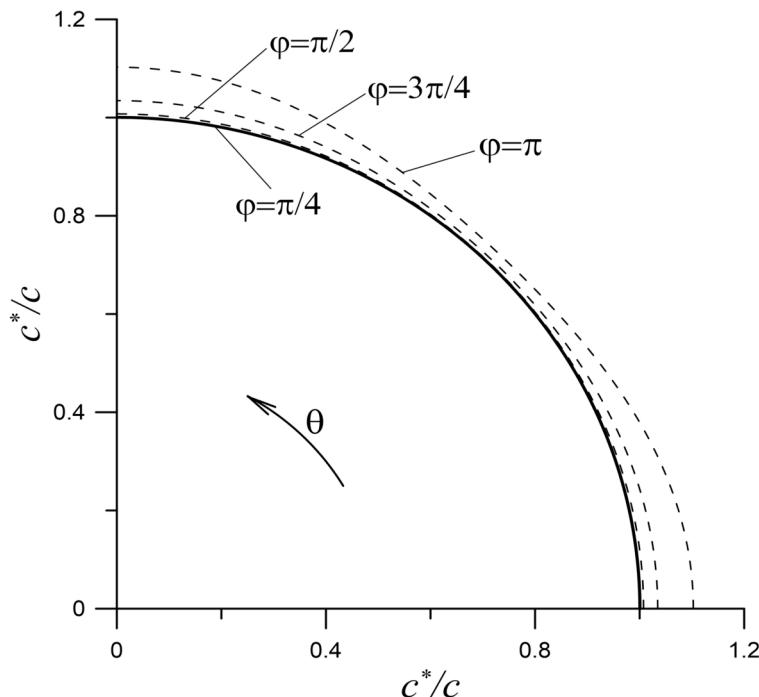


Рис. 2: Полярная диаграмма нормированной численной фазовой скорости  $c^*/c$

### Список литературы

1. Рогов Б. В., Брагин М. Д. О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. 2017. Т. 475, №2. С. 140–144.
2. Чикиткин А. В., Рогов Б. В. Бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2017. Т. 476, №4. С. 381–386.
3. Чикиткин А. В., Рогов Б. В. Оптимизированная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации с высоким спектральным разрешением для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2018. Т. 478, №6. С. 631–636.
4. Rogov B. V. Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomplete schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 139. P. 136–155.
5. Chikitkin A.V., Rogov B.V. Family of central bicomplete schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 142. P. 151–170.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В  
СЛУЧАЕ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

**Родин Александр Сергеевич, Аронов Павел Сергеевич,  
Соломенцева Полина Владимировна**

*к. ф. – м. н.*

*E-mail: rals@bk.ru*

*Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва,  
Россия*

Рассмотрена плоская стационарная задача контакта двух упругих тел. Математическая модель включает в себя стандартные уравнения равновесия, кинематические и силовые условия на заданных участках границы каждого тела. На поверхности контакта тел дополнительно должны быть выполнены условия сопряжения по перемещениям и напряжениям [1, 2]. При численном решении задачи для учета контактного взаимодействия чаще всего применяют метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа или их комбинации [1], но в качестве альтернативного варианта возможно использование метода декомпозиции области (МДО) [2], который позволяет решать итоговую систему линейных уравнений отдельно для каждого из рассматриваемых тел.

В работе для дискретизации уравнений равновесия применен метод конечных элементов с линейными и квадратичными базисными функциями, заданными на треугольной или четырехугольной сетке. Рассмотрены несколько вариантов МДО, которые отличаются друг от друга порядком постановки кинематических и силовых условий на контактной поверхности на различных итерациях [2]. В алгоритме Нейман-Дирихле на каждой итерации на контактной поверхности первого тела ставится силовое условие (Неймана), а после решения уравнений равновесия для первого тела полученные перемещения используются для постановки кинематического условия (Дирихле) на контактной поверхности второго тела. В алгоритме Дирихле-Дирихле на нечетных итерациях используются силовые условия, а на четных итерациях - кинематические. В алгоритме Нейман-Нейман, а также в алгоритме, предложенном Л.Б. Цвиком [3], на нечетных итерациях используются кинематические условия, а на четных - силовые.

Расчет новых приближений распределенных контактных сил и перемещений в узлах сетки на контактных поверхностях производится по формулам, в которые входит итерационный параметр [2, 4]. В зависимости от выбора значения данного параметра проводимый итерационный процесс может как сходиться, так и расходиться для всех рассмотренных вариантов МДО. В работе выполнено исследование сходимости итерационного процесса решения ряда тестовых задач с контактной поверхностью сложной формы. Рассмотрено влияние выбора условий на поверхности контакта (условия прилипания

или скольжения без трения), случаи использования согласованных и несогласованных сеток. Проведено сравнение результатов, полученных с применением различных вариантов МДО или различных вариантов метода множителей Лагранжа.

На рис. 1.а показан вид расчетной области в следующей тестовой задаче: нижняя поверхность нижнего тела закреплена по вертикали, боковые поверхности обоих тел закреплены по горизонтали, к верхней поверхности верхнего тела приложена гармоническая нагрузка, контактная поверхность имеет вид синусоиды. На рис. 1.б показан график распределения контактного давления вдоль контактной поверхности (по координате  $x$ ) для условия скольжения без трения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-01-00252 и № 18-31-20020.

### Иллюстрации

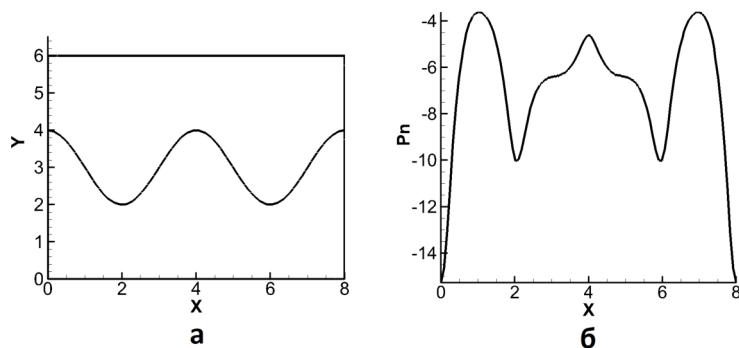


Рис. 3: а - вид расчетной области; б - график контактного давления.

### Список литературы

1. Wrigger P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006.
2. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods – Algorithms and theory. Berlin: Springer, 2005.
3. Цвик Л. Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13 – 18.
4. Родин А. С. Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 120. С. 3 – 28.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ  
*Свешников Алексей Георгиевич, Боголюбов Александр Николаевич,  
Могилевский Илья Ефимович*

*д. ф. – м. н., профессор, д. ф. – м. н., профессор, к. ф. – м. н. доцент*

*E-mail: bogan7@yandex.ru, mogilev@phys.msu.su*

*Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н. Тихонова и А.А. Самарского «О представлении поля в волноводе в виде суммы полей  $TE$  и  $TM$ » и «О возбуждении радиоволноводов», вышедшиими в «Журнале технической физики» [1,2].

Наряду с теорией регулярных волноводов, то есть однородных по длине прямолинейных волноводов постоянного сечения, в конце сороковых - начале пятидесятых годов появились работы по развитию методов расчета влияния различных плавных нерегулярностей в волноводе на распространяющуюся в нем основную волну моду. Одним из таких методов явился метод поперечных сечений предложенный в 1955 году в работе С.А. Щелкунова и П.Е. Краснушкина и развитый в работах Б.З. Каценеленбаума, А.Г. Свешникова, А.С. Ильинского, В.П. Моденова, А.А. Быкова, Б.Ф. Емелина и ряда других авторов.

Основной трудностью реализации метода поперечных сечений является необходимость на каждом шаге численно решать спектральную задачу, что сильно снижает его эффективность. Этот недостаток удалось преодолеть в начале 60-х годов в предложенном А.Г. Свешниковым неполном методе Галеркина (НМГ) [3].

В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым были предложены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями [4]. Разработанные методы позволяют рассматривать волноведущие системы со сложным неоднородным и анизотропным заполнением, в частности, биизотропным, гиromагнитным, киральным, фрактальным, а также волноводы на основе фотонных кристаллов.

В настоящее время при конструировании различных СВЧ-устройств все более широкое применение находят волноводы сложного сечения. Включение продольных металлических выступов в волновод позволило улучшить ряд его характеристик, в частности, существенно расширить полосу частот одномодового режима работы.

Известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности за-

полнения [5-7]. В частности, обобщенное решение может иметь сингулярности даже при гладкой правой части уравнений [6,7].

Одним из способов преодоления этих проблем, связанных с наличием сингулярности у электромагнитного поля в окрестности ребра, является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [5]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [7], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [6].

Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости [5], в окрестности ребра металло-диэлектрического клина в волноводе.

На основе полученного асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности ребра удается существенно увеличить скорость сходимости метода конечных элементов, вводя в пространство пробных функций сингулярные функции, имеющие особенность заданного вида и точно аппроксимирующие сингулярную часть решения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 19.01.00593.

### Список литературы

1. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы ТЕ и ТМ // Журнал технич. физики. 1948. Т.28, вып. 7. С. 959-970.
2. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О возбуждении радиоволноводов // Журнал технич. физики. 1947. Т.27, вып. 11, 12. С. 1283-1296; 1431-1440.
3. Свешников А. Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 2, с. 314-326.
4. Свешников А. Г. Принципы излучения. ДАН СССР, 1950. Т. 3, №5. С. 517-520.
5. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Свешников А. Г. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т.55. № 3. С.446.
6. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука — 1991.
7. Кондратьев В. А. // Труды Московского Математического Общества. Т.16. 1967. С.227.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ  
НОВЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ.**

**Тихонов Николай Андреевич**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: niktandr@yandex.ru*

*Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Математическое моделирование является эффективным методом теоретического исследования динамических процессов физической химии. При этом часто моделирование выступает не только для количественного описания явлений, механизм которых понятен, но как инструмент, позволяющий выявить физику новых эффектов. В представленном сообщении, в качестве примера, рассмотрены два таких случая.

Первый пример - явление изотермического пересыщения в пористой среде. Оно заключается в том, что внутри такой среды при ионном обмене образуется раствор концентрации более высокой, чем максимальная растворимость вещества в обычных условиях, и, тем не менее, не происходит выпадения осадка внутри сорбента. Это явление имеет общий характер. В течение последних десятилетий оно наблюдается и используется в технологических процессах. В то же время, оставался открытый вопрос, почему происходит стабилизация пересыщенного раствора.

В результате математического моделирования нам удалось понять и показать, что рассматриваемое явление можно объяснить не изменением термодинамических условий в порах, по сравнению с обычными условиями, а эффектом динамического равновесия между объединением частиц конденсированной фазы во внутренней части пор и их распадом вблизи поверхности зерен сорбента. Моделирование позволило провести количественную проверку предложенной гипотезы с использованием имеющихся опытных данных.

Другой пример - метод емкостной деионизации водных растворов – это перспективный и наиболее экономичный метод орошения воды, который заключается в прокачке водного раствора через электрохимическую ячейку между двумя пористыми электродами с высокоразвитой поверхностью. Наиболее эффективным является применение мелкопористых электродов. Но в этом случае имеются значительные трудности теоретического исследования и расчета процесса диффузии в тонких порах. Они связаны с влиянием сильно неоднородной, меняющейся на несколько порядков по ширине поры, концентрации ионов. После того, как эта трудность была нами преодолена, было установлено, что двойной электрический слой вблизи поверхности пор сорбента имеет существенно другую структуру, чем считалось ранее. Это вносит принципиальные корректировки в представления, о механизме протекании процесса внутри мелкопористых электродов.

**БЫСТРЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ МНОГОЧАСТИЧНОЙ АГРЕГАЦИИ**

*Тыртышников Евгений Евгеньевич<sup>1</sup>*

*Матвеев Сергей Александрович<sup>2</sup>*

*Смирнов Александр Павлович<sup>3</sup>*

*Сорокин Андрей Александрович<sup>4</sup>*

*Степонишин Даниил Александрович<sup>5</sup>*

1: *академик РАН, д.ф. – м. н., Институт Вычислительной Математики РАН им. Г.И. Марчука,*

*Москва, Россия*

2: *к. ф. – м. н., научный сотрудник, Сколковский Институт Науки и Технологий, Москва, Россия*

3: *к. ф. – м. н., доцент Факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

4: *к. ф. – м. н., старший научный сотрудник, ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

5: *младший научный сотрудник, Сколковский Институт Науки и Технологий, Москва, Россия*

*E-mail: eugene.tyrtysnikov@gmail.com, s.matveev@skoltech.ru,  
sap@cs.msu.ru, sorokin@ibrae.ac.ru, d.stefonishin@skoltech.ru*

Процессы агрегации и фрагментации широко представлены в природе и могут быть описаны при помощи кинетических уравнений. В классическом случае, уравнения агрегационной кинетики известны, как уравнения Смолуховского и позволяют рассматривать лишь системы с парными столкновениями частиц. В данной работе мы рассматриваем кинетические уравнения многочастичной агрегации [1], частным случаем которых являются уравнения трёхчастичной агрегации [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dn_k}{dt} &= S_k^{(2)}(\mathbf{n}) + S_k^{(3)}(\mathbf{n}), \quad k = \overline{1, \infty}, \\ S_k^{(2)}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \sum_{i_1+i_2=k} C_{i_1,i_2}^{(2)} n_{i_1} n_{i_2} - n_k \sum_{i_1=1}^{\infty} C_{i_1,k}^{(2)} n_{i_1}, \\ S_k^{(3)}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{6} \sum_{i_1+i_2+i_3=k} C_{i_1,i_2,i_3}^{(3)} n_{i_1} n_{i_2} n_{i_3} - \frac{n_k}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^{\infty} C_{i_1,i_2,k}^{(3)} n_{i_1} n_{i_2}. \end{aligned}$$

Класс многочастичных уравнений агрегации является гораздо менее подробно изученным в сравнении с классическими уравнениями типа Смолуховского из-за большей сложности вычисления правой части и более высокой нелинейности правой части. В работах [1], [2] предложен новый класс алгоритмов, позволяющий снизить сложность вычисления правой части для кинетических уравнений многочастичной агрегации с использованием малоранговых представлений коэффициентов (ядер) агрегации. В результате, оказывается возможным проводить вычислительные эксперименты с использованием сотен тысяч дифференциальных уравнений без использования суперкомпьютеров. В недавней работе [3] показано существенное влияние учета трехчастичных

столкновений на свойства решени. В данной работе будет представлены новые оценки тензорных рангов для обобщенных Броуновских кинетических коэффициентов процесса агрегации, а также предварительные идеи о параллельной организации алгоритмов, предложенных в работах [1],[2]. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00338).

### Список литературы

1. Стефонишин Д. А., Матвеев С. А., Смирнов А. П., Тыртышников Е. Е. Тензорные разложения для решения уравнений математических моделей агрегации, допускающих многочастичные столкновения // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2018. Т. 19, № 4 С. 390 – 404
2. Стефонишин Д. А., Матвеев С. А., Смирнов А. П., Тыртышников Е. Е. Эффективный разностный метод численного решения уравнений агрегации с учетом трехчастичных столкновений, допускающих многочастичные столкновения // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2018. Т. 19, № 3 С. 261 – 269
3. Matveev S. A., Stefonishin D. A., Smirnov A. P., Sorokin A. A., Tyrtysnikov E. E. Numerical studies of solutions for kinetic equations with many-particle collisions // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Т. 1163 С. 012008

**НАДЕЖНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО  
ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**  
**Шишкин Григорий Иванович, Шишкина Лидия Павловна**  
ведущий научный сотрудник, математик 1-ой категории  
*E-mail: shishkin@imm.uran.ru, Lida@convex.ru*  
**ИММ УрО РАН имени Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия**

Объектом наших исследований являются сингулярно возмущенные краевые и начально-краевые задачи для уравнений в частных производных и модельные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, старшие производные которых содержат возмущающий параметр  $\varepsilon$  при старшей производной,  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Решения таких задач имеют локальные особенности типа пограничных и/или внутренних слоев — на узких подобластях решения задач резко изменяются; производные решения в слое неограниченно растут при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такие задачи часто возникают в теоретических исследованиях и приложениях. Использование для решения таких задач известных численных методов, разработанных для регулярных задач, приводит к недопустимым погрешностям. Поэтому для их решения требуются надежные и эффективные численные методы, в том числе надежные разностные схемы.

Цель наших исследований — разработка и исследование надежных разностных схем для решения сингулярно возмущенных задач на основе монотонных сеточных аппроксимаций [1]. Под надежными разностными схемами мы понимаем как хорошо известные робастные схемы, к которым относятся специальные схемы на кусочно-равномерных сетках Шишкина, сгущающихся в пограничных / внутренних слоях, сходящиеся в равномерной норме независимо от возмущающего параметра  $\varepsilon$ , то есть  $\varepsilon$ -равномерно, так и недавно появившиеся в наших исследованиях компьютерные разностные схемы.

Использование сеток Шишкина, которые известны и широко используются в научном мире уже более 30 лет, в настоящее время является стандартной техникой, обеспечивающей робастность и гарантированную точность численного решения сингулярно возмущенных задач как для хорошо исследованных классов уравнений: эллиптических реакции-диффузии в областях с гладкими и кусочно-гладкими границами, эллиптических конвекции-диффузии, параболических реакции-диффузии и конвекции-диффузии и т.д. (см., например, [2] и библиографию там), так и новых, мало изученных классов. Так, в последнее время разработаны робастные разностные схемы для решения модельной задачи Коши для скалярного сингулярно возмущенного уравнения, для краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса [3–5].

К настоящему времени разработано достаточно много численных методов для решения регулярных краевых задач на основе стандартных разностных схем — монотонных схем на равномерных сетках. Эти методы достаточно часто используются и для решения сингулярно возмущенных краевых задач,

особенно в связи с интенсивным развитием суперкомпьютеров. Однако, получаемые при этом численные решения не могут считаться достоверными — вообще говоря, стандартные схемы на равномерных сетках не являются  $\varepsilon$ -равномерно хорошо обусловленными, что приводит к потере устойчивости сеточных решений к возмущению данных при малых значениях  $\varepsilon$ , в частности, при компьютерных вычислениях. В ряде наших работ теоретически и экспериментально было строго показано, что ошибки решений таких схем могут во много раз превосходить само решение дифференциальной задачи, что делает стандартные схемы непригодными для практических вычислений. Для решения этих проблем нами разработаны схемы нового класса, названные компьютерными разностными схемами [6]. Компьютерная разностная схема — это стандартная разностная схема на равномерных сетках, сходящаяся в равномерной норме при наличии контролируемых компьютерных возмущений; сходимость такой схемы зависит от параметра  $\varepsilon$ , шага пространственной сетки поперек слоя (в случае двумерной задачи) и разрядности используемого компьютера. При этом порядок скорости сходимости компьютерной схемы получается такой же, как у схемы при отсутствии возмущений, что обеспечивает требуемую точность вычисляемого сеточного решения.

Таким образом, компьютерные разностные схемы (условно сходящиеся), как и специальные робастные разностные схемы ( $\varepsilon$ -равномерно сходящиеся), мы относим к надежным разностным схемам, **позволяющим эффективно использовать возможности современной вычислительной техники**.

### Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Shishkin G. I. and Shishkina L. P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. CRC Press, Boca Raton, 2009.
3. Шишкин Г. И. Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики (ЖВМ). 2017. Т. 57, № 11. С. 1824 – 1830.
4. Shishkina L. P. and Shishkin G. I. Development and Numerical Study of Robust Difference Schemes for a Singularly Perturbed Transport Equation // In Proceedings of the 7th International Conference, FDM 2018, Lecture Notes in Computer Science, V. 11386, (Springer, Cham, 2019), P. 476 – 483.
5. Shishkina L. P. and Shishkin G. I. Robust difference scheme for the Cauchy problem for a singularly perturbed ordinary differential equation // Mathematical Modelling and Analysis, 2018, V. 23, Is. 4, P. 527 – 537.
6. Шишкин Г. И. Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии при наличии возмущений // ЖВМ, 2017, Т. 57, № 5. С. 814 – 831.

**О ТЕХНИКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

**Шишикина Лидия Павловна, Шишкин Григорий Иванович**

математик 1-ой категории, ведущий научный сотрудник

E-mail: Lida@convex.ru, shishkin@imm.uran.ru

*Отдел уравнений мат.физики ИММ УрО РАН имени Н. Н. Красовского,  
Екатеринбург, Россия*

Рассматривается начально-краевая задача на отрезке с условием Неймана на границе для сингулярно возмущенного параболического уравнения диффузии с возмущающим параметром  $\varepsilon$  при старшей производной,  $\varepsilon \in (0, 1]$ . В этой задаче при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в окрестности боковой границы появляются пограничные слои, приводящие к ошибкам сеточного решения, неограниченно растущим при стремлении параметра  $\varepsilon$  к нулю.

Для этой задачи развивается техника экспериментального исследования сходимости решений разностных схем на стандартной равномерной сетке и на специальной “сетке Шишикина” (кусочно-равномерной по пространственной переменной  $x$ , сгущающейся в окрестностях пограничных слоев, и равномерной по временной переменной  $t$ ), построенных с использованием монотонных сеточных аппроксимаций [1,2] дифференциальной задачи. Эта техника основана на исследовании регулярной и сингулярной компонент решения начально-краевой задачи. Исследуется влияние возмущающего параметра  $\varepsilon$  на поведение ошибок сеточных решений для регулярной и сингулярной компонент решения с использованием стандартной равномерной сетки и специальной сетки Шишикина. Показано, что при использовании разностных схем на стандартной равномерной сетке наибольшая ошибка в приближенном решении порождается ошибкой, связанной с сингулярной частью решения, из-за чего приближенное решение даже качественно не аппроксимирует искомое решение независимо от  $\varepsilon$ , то есть  $\varepsilon$ -равномерно. При использовании разностных схем на специальной сетке Шишикина решение разностной схемы сходится к решению краевой задачи  $\varepsilon$ -равномерно в равномерной норме при  $N, N_0 \rightarrow \infty$ , где  $N + 1$  и  $N_0 + 1$  — число узлов в пространственной и временной сетках соответственно. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические результаты.

**Список литературы**

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Shishkin G. I. and Shishkina L. P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **140**, CRC Press, Boca Raton, 2009.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ: ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИНАНСАХ И МЕДИЦИНЕ**

**Шишлигин Максим Александрович, Кабанихин Сергей Игоревич**  
*д. ф. – м. н.*

*E-mail: maxim.shishlenin@sscc.ru, kabanikhin@sscc.ru*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, Новосибирск, Россия*

В настоящее время опубликовано много работ, посвященных задаче нахождения коэффициентов параболических уравнений в случае, когда данные обратной задачи задаются в виде нелокальной информации (интеграл по времени или по пространству) [1–3]. Обратные задачи с нелокальными условиями возникают в тепломассопереносе, неразрушающем контроле, химической кинетике, медицине, экономике и т.д.

В докладе предложены алгоритмы решения коэффициентных обратных задач для параболических уравнений. Обратная задача заключается в определении коэффициента уравнения по дополнительной информации, задаваемой в виде интеграла по области, либо в виде данных, заданных в дискретном числе точек по времени [4].

Нелинейная обратная задача формулируется в виде задачи минимизации целевого функционала [4]. Для минимизации функционала применяется градиентный метод. Получены формулы градиента функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач. Представлены результаты численных расчетов и проведена апробация разработанных алгоритмов на реальных данных.

**Список литературы**

1. Cannon J. R., Rundell W. Recovering a Time Dependent Coefficient in a Parabolic Differential Equation // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 160. P. 572–582.
2. Ivanchov N. I. On the Determination of the Time-Dependent Leading Coefficient in a Parabolic Equation // Siberian Mathematical Journal. 1998. V. 39(3). P. 465–475.
3. Vilar G., Tulla-Puche J., Albericio F. Polymers and drug delivery systems // Current Drug Delivery. 2012. Vol. 9, No. 4. P. 367–394.
4. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Recovering a Time-Dependent Diffusion Coefficient from Nonlocal Data. Numerical Analysis and Applications. 2018. Vol. 11, No. 1. P. 38–44.

## К ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ПУЗЫРЬКА В УЗКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

**Щур Лев Николаевич<sup>1</sup>**

1: д.ф.-м.н., профессор, Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН, Черноголовка, Россия

2: Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

E-mail: lev@landau.ac.ru

Задача моделирования движения пузырька в узком канале жидкости интересна в силу наличия двух больших серий экспериментов.

Первая из них связана с исследованиями на специальных лабораторных стендах движения пузырьков газа в жидкости или пузырьков одной жидкости в другой жидкости [1,2,3]. В этих экспериментах наблюдаются явления самоорганизации, возникновение периодических структур, пульсирующих структур и т.п. Несмотря на интенсивные исследования во многих лабораториях мира, большинство явлений не получило объяснения. Представляется интересным провести компьютерное моделирование таких явлений с целью выявления закономерностей и взаимозависимостей.

Вторая группа экспериментов относится к особенностям движения клеток и кластеров клеток в кровеносных сосудах [4,5]. Это важно для изучения процессов метастазов, а также для изучения возможности адресной доставки лекарственных препаратов, упакованных в кластеры. Есть интересные экспериментальные результаты, полученные как *in vitro*, так и *in vivo*.

Интересной задачей является построение численной модели для исследования указанных явлений. Модель должна учитывать сложную геометрию каналов, поверхностные явления как каналов, так и пузырьков и составных частиц. Это можно делать различными способами. Наш подход основан на использовании гибридного метода решеточного уравнения Больцмана [6]. Этот метод позволяет учесть корректно граничные условия на поверхности движущегося в вязкой жидкости объекта.

Мы приведем наиболее интересные детали получения схемы решения уравнений и предварительные результаты проведенного численного исследования. Мы также обсудим положительные и отрицательные особенности метода для указанного ряда задач.

### Список литературы

1. Garstecki P., Whitesides G.M. Flowing Crystals: Nonequilibrium Structure of Foam // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97, P. 024503.
2. Raven J.-P., Marmottant P. Microfluidic Crystals: Dynamic Interplay between Rearrangement Waves and Flow // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, P. 084501.

3. Beatus T., Bar-Ziv R.H., Tlusty T. The physics of 2D microfluidic droplet ensembles // Phys. Rep. 2012. V. 516. P. 103–145.
4. Freitas V.M., Hilfenhaus G., Iruela-Arispe M.L. Metastasis of Circulating Tumor Cells: Speed Matters// Developmental Cell . 2018. V. 45. P. 3–5.
5. Malet-Engra G., et al. Collective Cell Motility Promotes Chemotactic Prowess and Resistance to Chemorepulsion // Current Biology. 2015. V. 25. P. 242–250.
6. Di Ilio G., Chiappini D., Ubertini S., Bella G., Succi S. A moving-grid approach for fluid–structure interaction problems with hybrid lattice Boltzmann method// Comp. Phys. Comm. 2019. V. 234. P. 137–145.

# СЕКЦИЯ

## Математическое моделирование

MATHEMATICAL MODELLING OF MUSCLE ACTIVITY

*Nedyalkova Zdravka Dimitrova, Ivanov Tihomir Bogoslovov*

*E-mail:* zdravkanedyalkova@gmail.com, tbivanov@fmi.uni-sofia.bg  
*Sofia University “St. Kliment Ohridski”, Sofia, Bulgaria*

Mathematical modelling of muscle activity is an active field of research that is important for both medical and bioengineering purposes. One possible view of the process is the following. Neural impulses reach the muscle cells and that triggers the release of calcium, which is stored inside special membrane-bound structures (called sarcoplasmic reticulum) in the muscle. This, in turn, triggers the muscle contraction due to different biochemical processes.

Various authors have worked on these topics. Here, we cite the works [1,2] that derive and study numerically a mathematical model of calcium activity inside the muscle cells. This model is coupled with a model for the resultant muscle force. For this purpose the classical Hill's model is used [3]. The neural activity that triggers the process, on the other hand, is modelled with a variable coefficient that describes possible forms of the neural signal with simple analytically-defined expressions.

In the present talk, we shall first give a brief outlook of the biological process in question. Then, stepping on the aforementioned results, we shall present a study of the effect of introducing a more detailed model for the neural activity that triggers the process of muscle contraction. For this purpose, models of Hodgkin–Huxley type and its approximations (e.g., Fitzhugh–Nagumo model) are used. Then, we shall present numerical experiments that we have carried, in order to study the behaviour of the biomechanical system. Based on those experiments, conclusions will be derived and a discussion will be made for the possible applications of the considered model to studying muscle-degenerative diseases, and muscle atrophy, in particular.

### Список литературы

1. Williams, T.L., Bowtell, G., Curtin, T.A., Predicting Force Generation by Lamprey Muscle During Applied Sinusoidal Movement Using a Simple Dynamic Model, *J. Exp. Biol.* 201 (1998) 869–875.
2. McMillen, T., Williams, T., Holmes, P., Nonlinear Muscles, Passive Viscoelasticity and Body Taper Conspire To Create Neuromechanical Phase Lags in Anguilliform Swimmers, *PLoS Comput. Biol.* 4 (2008),  
<https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000157>

3. Hill, A.V., The heat of shortening and the dynamic constants of muscle, Proc. Royal Soc. Lond. (1938) 612–745.

**INITIAL CALIBRATION OF MEMS ACCELEROMETERS, USED FOR  
MEASURING ORIENTATION IN SPACE**

***Lyutskanova-Zhekova Galina Stoyanova, Ivanov Tihomir Bogoslovov***

*E-mail:* g.zhekova@fmi.uni-sofia.bg, tbivanov@fmi.uni-sofia.bg  
*Sofia University “St. Kliment Ohridski”, Sofia, Bulgaria*

Microelectromechanical systems (MEMS) sensors (accelerometers, gyroscopes, magnetometers, etc.) are widely used in many industries, e.g. in mobile devices, drilling industry, medicine, etc. However, they suffer from various error sources—both deterministic and random—and, therefore, need to go through an initial calibration, before they can be used. In particular, we are interested in accounting for the main deterministic errors—scaling errors, offsets, and errors, due to non-orthogonality of sensors’ axes. Many authors have worked on the subject (see e.g. [1,2] and the references therein). The classical approach is the following. A relation between the raw and calibrated data, depending on several parameters, is postulated. Then, an objective function, taking into account the errors between the calibrated data and known “true” values, is formulated. Its minimization leads to obtaining the unknown parameters.

In [3], the problem of calibrating accelerometers, used for measuring orientation in space, was considered. A modification of a classical objective function was proposed and it seemed to give a moderate improvement in the end results. The whole approach, however, was based on a simple linear relation between raw and calibrated data. In [4], a more advanced relation, based on physical considerations, was derived.

In the present talk, we present results of combining the relation from [4] with the objective function from [3] for the purposes of MEMS accelerometer’s calibration. In particular, we are focusing on applications, connected with determining orientation in space. We use experimental data from several low-cost MEMS sensors and propose a complete algorithm for their initial calibration. We present results from numerical experiments and give conclusions for the accuracy and applicability of the proposed method.

**Список литературы**

1. Aggarwal, P., Syed, Z., Niu, X., El-Sheimy, N., A standard testing and calibration procedure for low cost MEMS inertial sensors and units, *J. Navigation* 61 (2008) 323–336.

<https://doi.org/10.1017/S0373463307004560>

2. Aydemir, G., Saranli, A., Characterization and calibration of MEMS inertial sensors for state and parameter estimation applications, *Measurement* 45 (2012) 1210–1225.

<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2012.01.015>

3. Ivanov, T.B., Lyutskanova-Zhekova, G.S., Initial calibration of MEMS accelerometers, used for measuring inclination and toolface, Studies in Computational Intelligence 793 (2019) 177–188,

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-97277-0\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97277-0_14)

4. Georgieva, I., Hofreither, C., Ilieva, T., Ivanov, T., Nakov, S., Laboratory Calibration of a MEMS Accelerometer Sensor, ESGI'95 Problems and Final Reports (2013) 61–86, Demetra Publishing House.

<http://esgi95.fmi.uni-sofia.bg/>

**О ПОСТРОЕНИИ И ПРИМЕНЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГОДУНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ РАСЧЕТОВ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ**

**Абакумов Михаил Владимирович**

к. ф. – м. н., доцент

E-mail: [vmabk@cs.msu.ru](mailto:vmabk@cs.msu.ru)

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Описывается предложенная и апробированная автором методика [1–3] построения явных консервативных разностных схем годуновского типа, аппроксимирующих уравнения динамики вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах. Суть рассматриваемого способа заключается в том, что за основу берется произвольная схема годуновского типа для прямоугольных декартовых координат (базовая схема). При ее адаптации для криволинейных координат алгоритмы вычисления разностных потоков не модифицируются. Вычисленные по базовой схеме потоковые комбинации используются в неизменном виде для аппроксимации интегральных соотношений баланса массы, импульса и энергии по объему криволинейной разностной ячейки. Влияние тензора вязких напряжений учитывается путем введения соответствующих добавок к разностным декартовым потокам. Указанный подход является технологичным в том смысле, что позволяет реализовать схему в криволинейных координатах путем внесения небольших дополнений в имеющийся программный код декартовой схемы.

Приводятся результаты двумерных и трехмерных тестовых расчетов в полярных и сферических координатах, в том числе задач обтекания потоком вязкого и невязкого газа цилиндров и сфер. Демонстрируется соответствие результатов моделирования известным экспериментальным данным.

Обсуждаются некоторые результаты (см. рис.1) численных расчетов течений вязкого газа в пространстве между двумя коаксиально вращающимися концентрическими цилиндрами и сферами [3]. Газ описывается системой уравнений Навье–Стокса (для сжимаемого случая), в которой тензор вязких напряжений учитывается как в уравнении движения, так и в уравнении энергии. Изначально задаются постоянные параметры покоящегося газа, который в дальнейшем приходит в движение за счет вязкого трения о вращающиеся поверхности цилиндров или сфер. Таким образом, моделируемые течения не определяются каким-либо специфическим выбором начального состояния.

Показано, что при небольших значениях числа Маха ( $M \leq 0.3$ ) результаты моделирования хорошо соотносятся с экспериментальными и теоретическими исследованиями течений несжимаемой жидкости между цилиндрами и сферами. Это демонстрирует возможность исследования подобных течений в рамках модели вязкого газа путем прямого численного моделирования с использованием явных консервативных разностных схем годуновского типа.

## Иллюстрации

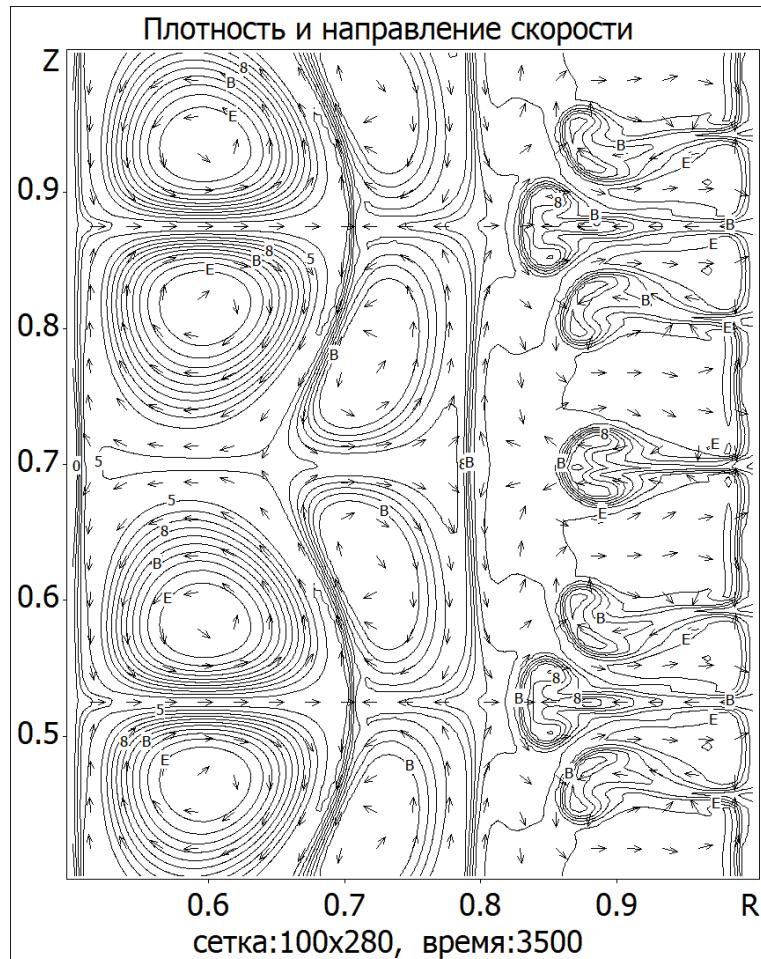


Рис. 4: Течение между цилиндрами при  $\omega_o/\omega_i = -1.5$ ,  $Re = 400$ ,  $M = 0.05$

## Список литературы

1. Abakumov M. V. Method for the construction of godunov-type difference schemes in curvilinear coordinates and its application to cylindrical coordinates // Comput. Math. and Modeling. 2014. Vol. 25, no. 3. P. 315–333.
2. Abakumov M. V. Construction of godunov-type difference schemes in curvilinear coordinates and an application to spherical coordinates // Comput. Math. and Modeling. 2015. Vol. 26, no. 2. P. 184–203.
3. Абакумов М. В. Математическое моделирование течений вязкого газа в пространстве между двумя коаксиально вращающимися концентрическими цилиндрами и сферами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 3. С. 409-428.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМОДИНАМИКИ ЧЕЛОВЕКА В ПРИМЕРАХ

*Абакумов Михаил Владимирович, Буничева Анна Яковлевна,  
Мухин Сергей Иванович, Соснин Николай Васильевич,  
Хруленко Александр Борисович*

*к.ф. – м. н., доцент, к.ф. – м. н., доцент, д.ф. – м. н., профессор, д.ф. – м.  
н., профессор, к.ф. – м. н., доцент*

*E-mail: vmbk@cs.msu.ru, bunicheva@cs.msu.ru, vmmus@cs.msu.ru,  
vmsnv@cs.msu.ru, khruenko@cs.msu.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Математическое моделирование кровообращения человека представляет собой актуальную проблему современной медицины и математики, имеющую высокую как фундаментальную, так и прикладную значимость.

Решение гемодинамических задач кровообращения с учетом дополнительных процессов реализуется в работах на кафедре вычислительных методов факультета ВМК совместно с факультетом фундаментальной медицины с середины 90-х годов.

Цель работ в создании компьютерной физиологически адекватной модели сердечно-сосудистой системы человека.

Использование квазидномерных моделей [1] течения крови в сосудах позволяет численно решать гемодинамические задачи на разветвленной сети кровеносных сосудов (графе сосудов). Квазидномерное приближение можно совмещать с двух и трехмерными моделями, при необходимости детального исследования локальной гемодинамической картины течения.

Рассчитаны гемодинамические течения в виллизиевом круге мозга [2], в артериальной части большого круга кровообращения. Разработаны математические модели переноса вещества по графу кровеносных сосудов с учетом прохождения фракций через сердце. Построена точечная модель почки. Решены задачи проверки гипотез регулирования и лечения гипертензивных заболеваний. Установлены качественные закономерности интерференционной картины волн давления на графике сосудов кровеносной системы с учетом внешних воздействий и пристеночной вязкости.

Разработан программный комплекс CVSS [3], имеющий интерфейсную среду с интерактивным режимом общения с пользователем, позволяющий проводить обработку потока входной и выходной информации как в числовом, так и в графическом виде.

Проводятся работы по разработке сегментарной модели печени для исследования поведение кровеносной системы печени при различных степенях её патологии, при наличии шунтов (анатомических переплетений между бассейнами венозной крови), а также портокавальных и спленоренальных анастомозов (искусственных соединений между кровеносными сосудами).

Разрабатывается модель маточного и маточно-плацентарного кровообращения с целью изучения влияния ремоделирования спиральных артерий в ходе беременности на кровоток.

### Иллюстрации

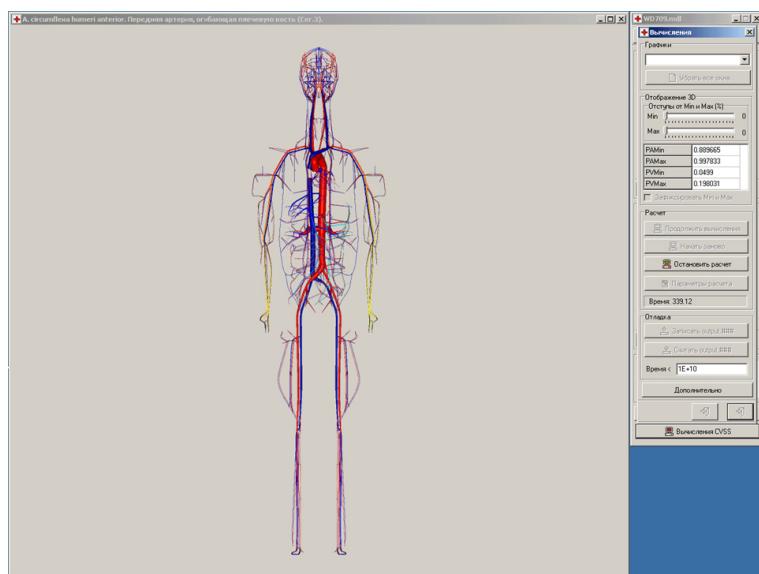


Рис. 5: 3D-граф кровеносной системы человека.

### Список литературы

1. Кошелев В. Б., Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П. Математические модели квази-одномерной гемодинамики. Методическое пособие. М.: МаксПресс, 2010.
2. Ашметков И. В., Буничева А. Я., Мухин С. И., Соколова Т. В., Соснин Н. В., Фаворский А. П. Математическое моделирование гемодинамики в мозге и большом круге кровообращения. Сборник: Компьютер и мозг. Новые технологии. М.: Наука, с.39-99, 2005.
3. Ашметков И. В., Буничева А. Я., Лукшин В. А., Кошелев В. Б., Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П., Хруленко А. Б. Математическое моделирование кровообращения на основе программного комплекса CVSS. Сборник: Компьютерные модели и прогресс медицины. М.: Наука, с.194-218, 2001.

**ДИСКРЕТНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОЙ  
ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

**Амосов Андрей Авенирович, Крымов Никита Евгеньевич**

*д.ф. – м. н., профессор; аспирант*

*E-mail: AmosovAA@mpiei.ru, nekrymov@gmail.com*

*Национальный исследовательский университет Московский  
энергетический институт, Москва, Россия*

Краевая задача

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla u) = f, \quad x \in G = \bigcup_{i,j} G_{i,j} \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u) = \int_{\partial G} h(u(\xi)) \varphi(\xi, x) d\sigma(\xi) + \int_{\Gamma} h(u_{\Gamma}) \varphi(\xi, x) d\sigma(\xi), \quad x \in \partial G \quad (15)$$

описывает радиационно-кондуктивный теплообмен в системе, состоящей из  $n^2$  абсолютно черных теплопроводящих стержней круглого сечения радиуса  $\varepsilon = 1/(2n)$ , упакованных регулярным образом в квадратную «коробку»  $\Omega = (0, 1)^2$  с границей  $\Gamma$ . Каждому стержню поставлен в соответствие круг  $G_{i,j}$  радиуса  $\varepsilon$ . Здесь  $u$  – абсолютная температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $h(u) = \sigma_0 u^4$  – полусферическая интенсивность теплового излучения,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\varphi$  – угловой коэффициент,  $u_{\Gamma}$  – температура внешней среды.

Для задачи (14)-(15) предложены новые приближенные методы решения, основанные на специальных дискретных и асимптотических аппроксимациях, позволяющие при численном решении задачи значительно сократить затраты вычислительных ресурсов.

При дискретной аппроксимации возникает система нелинейных уравнений относительно средних по сечениям значений температуры. Асимптотическая аппроксимация приводит к нестандартной нелинейной гомогенизированной краевой задаче

$$-2\varepsilon \Delta H(v) = \frac{\pi}{4}f, \quad x \in \Omega^{\varepsilon} = (\varepsilon, 1 - \varepsilon)^2, \quad (16)$$

$$2\varepsilon \frac{\partial H(v)}{\partial n} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 H_*(v)}{\partial s^2} + H_{\Gamma}(v) = H_{\Gamma}(u_{\Gamma}) + \varepsilon \frac{\pi}{4}f, \quad x \in \partial \Omega^{\varepsilon}, \quad (17)$$

где  $\partial/\partial n$  и  $\partial/\partial s$  – производные по нормали и касательной к  $\partial \Omega^{\varepsilon}$ ,

$$H(v) = \int_0^v \frac{h'(s)}{1 + c_1(\varepsilon/\lambda)h'(s)} ds, \quad H_*(v) = \int_0^v \frac{(\pi/2 - 1)h'(s)}{(1 + (\varepsilon/\lambda)h'(s))^2} ds,$$

$$H_\Gamma(v) = \int_0^v \frac{1 + c_2(\varepsilon/\lambda)h'(s)}{(1 + (\varepsilon/\lambda)h'(s))^2} h'(s) ds,$$

$v$  является приближением к  $u$ .

Ранее в [1] были предложены более простые аппроксимации, приводящие к линейным относительно приближений к  $h(u)$  задачам. Вычислительные эксперименты продемонстрировали высокую точность новых аппроксимаций во всём реальном диапазоне значений коэффициента теплопроводности. При этом скорость вычисления новых аппроксимаций оказалась в десятки и сотни раз выше, чем у стандартных разностных методов решения исходной задачи (1), (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00033).

### Список литературы

1. Амосов А. А., Крымов Н. Е. Аппроксимации стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе стержней круглого сечения // Вестник МЭИ. -2017. -№5. -С. 94-100.

## ШИРОКОДИАПАЗОННЫЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ

*Белов Александр Александрович<sup>1</sup>*

*Калиткин Николай Николаевич<sup>2</sup>*

*Козлгин Иван Алексеевич<sup>3</sup>*

1: к. ф. – м. н., физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: член-корреспондент РАН, профессор, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

3: к. ф. – м. н., Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН

E-mail: aa.belov@physics.msu.ru, kalitkin@imamod.ru,  
kozlitin@elins.ru

В Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН более 60 лет назад по инициативе А.А. Самарского были развернуты работы по созданию моделей и баз данных по теплофизическим свойствам веществ при экстремальных условиях.

Экстремальными условиями принято называть высокие температуры и/или большие плотности. Такие состояния достигаются при мощных взрывах, лазерном воздействии на вещество, в сильноточных разрядах, а также в недрах планет и звезд. Такая база может служить основой как для оценочных, так и для прецизионных газодинамических расчетов при проектировании многих конструкций новой техники в фундаментальных научных задачах: сверхмощные газовые лазеры, магнито-кумулятивные генераторы сверхсильных токов и сверхмощных магнитных полей, расчеты мощных взрывных устройств, бронепробивание на высоких скоростях, астрофизические задачи строения звезд и планет и ряд других.

Работы по свойствам веществ проводились большим коллективом. В разные годы в них участвовали Л. В. Кузьмина, В. С. Рогов, П. Д. Ширков, И. А. Соколова, В. С. Волокитин, И. А. Панин, А. С. Павлов, Е. С. Иванченко, К. И. Луцкий, П. В. Корякин. В результате была создана база ТЕФИС, расположенная в открытом доступе на сайте Института по адресам <http://tefis.keldysh.ru> и <http://tefis.ru>. Текущая версия базы содержит 3 раздела.

1) Термодинамические функции давления  $P$ , энергии  $E$ , энтропии  $S$  в зависимости от плотности  $\rho$  и температуры  $T$ . Этот раздел наиболее развит. Он включает таблицы указанных величин для всех элементов периодической системы с зарядом  $Z \leq 103$ . Диапазон температур составляет  $-0.6 < \lg T$  (эВ)  $< 4.6$  и плотностей  $-6 < \lg \rho(\text{г}/\text{см}^3) < 6$ . Сетка по температуре и плотности равномерная в логарифмическом масштабе, шаги  $\Delta \lg T = \Delta \lg \rho = 0.2$ ; для важнейших элементов Al, Fe, Cu, Pb шаги  $\Delta \lg T = \Delta \lg \rho = 0.1$ .

2) Оптические свойства. Этот раздел только начал создаваться. В рамках предложенной нами модели неоднородного микрополя для расчета оптических линий и порогов фотоэффекта требуется знать средний дебаевский заряд среды. Данный раздел базы включает таблицы дебаевского заряда для всех элементов периодической системы с зарядом  $Z \leq 103$  в зависимости от температуры и плотности. Диапазоны и шаги сеток по  $T$  и  $\rho$  таковы же, как и в разделе 1.

3) Реакции. Этот раздел тоже находится на этапе создания. Во-первых, этот раздел содержит данные по термоядерным реакциям, наиболее важным в условиях мишени управляемого синтеза: а) таблицы S-факторов (равных сечениям, деленным на множитель Гамова, описывающий проницаемость кулоновского барьера) в зависимости от энергии сталкивающихся частиц; б) таблицы скоростей реакций в зависимости от температуры для термодинамически равновесной среды. Диапазон энергий составляет от 2 кэВ до  $\sim 14$  МэВ. Величины в таблицах приведены в логарифмическом масштабе, шаги  $\Delta \lg E = \Delta \lg T = 0.1$  (эВ). Во-вторых, этот раздел включает данные по скоростям химических реакций, протекающих в смеси водорода с воздухом при атмосферном давлении и умеренных температурах до 1-2 кК: а) результаты первичных измерений с ревизией авторских оценок погрешностей; б) параметры аппроксимации экспериментальных данных законом Аррениуса.

Работа поддержана грантом РНФ № 16-11-10001.

#### Список литературы

1. Kalitkin N. N., Kozlitin I. A. // Annals of Physics. 2018. Vol. 396C. P. 468-478.
2. Белов А. А., Калиткин Н. Н., Козлитин И. А., Корякин П. В. // Известия РАН. Серия Физическая. 2018. Т. 82, № 11. С. 1606–1610.
3. Белов А. А., Голованов Р. В., Калиткин Н. Н., Козлитин И. А., Корякин П. В., Кузьмина Л. В. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 219.
4. Белов А. А., Калиткин Н. Н., Козлитин И. А. Неоднородность плазменного микрополя // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 220.

**ВыЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИИ МОДЕЛЕЙ**

**Богомолов Сергей Владимирович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: bogomo@cs.msu.su*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Триада А.А. Самарского (модель – алгоритм - программа) как основа колеса вычислительного эксперимента иллюстрируется сначала на хорошо известных задачах диффузии с переходом на современные подходы, включая элементы микро – макро моделирования и стохастический анализ.

Обозреваются аналитические и численные подходы к проблеме описания больших систем на микроскопическом уровне с последующем огрублением до макроскопического. Рассмотрение проводится на примере газовой динамики как наиболее разработанной в этом контексте области знания, очерчиваемой такими ключевыми терминами, как уравнения Больцмана, Навье-Стокса, магнитной гидродинамики, методы Монте-Карло, стохастическое исчисление. Излагаются стохастические подходы как к построению математических моделей, так и численных методов. Наш аппарат использует сам случайный процесс, а не его функцию распределения, как это принято в классической кинетической теории. Тем самым он существенно отличается от традиционного. Акцент ставится на ясности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка, уравнение Навье – Стокса, сила Лоренца, уравнения магнитной гидродинамики и квазигазодинамики; случайные процессы, стохастические дифференциальные уравнения по пуассоновской и винеровской мерам; стохастические и детерминистические методы частиц.

**Список литературы**

1. Богомолов С. В., Есикова Н. Б., Кувшинников А. Е. Микро – макро модели Фоккера – Планка – Колмогорова для газа из твёрдых сфер // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 2. С. 65–85; // Math. Models Comput. Simul. 2016 .Vol. 8, No 5. C. 533–547.
2. Bogomolov S.,V., Esikova N. B., Kuvshinnikov A. E., Smirnov P. N. On gas dynamic hierarchy// In: The Seventh Conference on Finite Difference Methods.FDM 2018. LNCS. Springer. 2019. Vol. 11386. P. 1–8.

**РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА: ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД В  
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ**

**Брагин Михаил Дмитриевич, Криксин Юрий Анатольевич,  
Тишкин Владимир Федорович**

*E-mail:* michael@bragin.cc, kriksin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,  
Россия*

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №17-71-30014).

Для одномерных уравнений газовой динамики разработан вариационный принцип получения уравнений разрывного метода Галеркина (РМГ), в котором выполнены дискретные аналоги законов сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийного неравенства в каждой ячейке расчетной области. В основе предлагаемого подхода лежит вариационная интерпретация уравнений РМГ. В случае использования ортогонального базиса решение стандартных уравнений РМГ [1] определяет безусловный минимум среднеквадратичной нормы невязки уравнений газовой динамики в ячейке. Переход от безусловной минимизации нормы невязки к ее условной минимизации предоставляет возможность получения новых уравнений РМГ, в которых гарантируется выполнение законов сохранения и энтропийного неравенства. Ранее нами был предложен метод вариационной энтропийной регуляризации [2], где уравнения РМГ получаются в результате решения некоторой задачи квадратичного программирования, в которой условная минимизация квадрата нормы невязки проводится на множестве, задаваемым линейным неравенством — дискретным аналогом энтропийного условия. Однако, как показало численное тестирование [3], такая энтропийная регуляризация все еще недостаточна: указанный метод порождает итерации, приводящие к отрицательным значениям давления за конечное время, сколь бы ни была малой величина шага по времени. Множество конечно-элементных (КЭ) аппроксимаций заданных функций на основе РМГ является очень широким и нуждается в разумном сужении. Конструктивным оказывается требование монотонности КЭ аппроксимаций (любой заданной монотонной функции соответствует ее монотонная КЭ аппроксимация с тем же самым направлением монотонности), которое удается достичь, используя специальную процедуру лимитирования коэффициентов РМГ. Указанная процедура лимитирования соответствует дополнительным линейным ограничениям в задаче условной минимизации нормы невязки. Численное тестирование показало, что совместное выполнение условий монотонности КЭ аппроксимаций и неотрицательного производства энтропии приводит к новым уравнениям РМГ, позволяющим реализовать на

их основе устойчивый вычислительный алгоритм решения одномерных уравнений газовой динамики.

Численные расчеты проведены с помощью суперкомпьютерного центра НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова и центра информационных технологий Гронингенского университета (Нидерланды).

### **Список литературы**

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics. 1998. V. 1697. P. 151–268.
2. Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 100. 22 с. doi: 10.20948/prepr-2018-100. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-100>.
3. Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 18. 25 с. doi: 10.20948/prepr-2019-18. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-18>.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УСКОРЕНИЕ И СЖАТИЕ ПЛАЗМЫ В КОАКСИАЛЬНЫХ КАНАЛАХ**

**Брушлинский Константин Владимирович,**

**Степин Евгений Викторович**

*д. ф.-м. н., профессор; к. ф.-м. н.*

*E-mail: brush@keldysh.ru, eugene.v.stepin@gmail.com*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва,*

*Россия*

Математические модели и расчеты течений плазмы в каналах-соплах, образованных двумя коаксиальными электродами, – постоянная тема работ авторов с коллегами, относящихся к исследованиям ускорения плазмы в осевом направлении азимутальным – поперечным к течению – магнитным полем. В каналах с укороченным центральным электродом за примыкающей к нему конической ударной волной образуется зона компрессии – область сжатой и нагретой плазмы. Она может представить интерес в связи с инжекцией горячей плазмы в магнитные ловушки, которые являются постоянным объектом работ по управляемому термоядерному синтезу. Результаты большой серии расчетов в двумерной МГД-модели процессов ускорения и сжатия плазмы в двумерных течениях внесли вклад в теорию магнитного аналога сопла Лаваля и способствовали созданию квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя с рекордными значениями скорости и энергии плазмы на выходе из канала [1–4].

Доклад представляет результаты работ, выполненных в последние годы в развитие исследований в указанной области. Рассмотрены стационарные МГД-течения в канале в присутствии продольного магнитного поля, которое дополнительно создается внешними проводниками с током. В расчетах исследовано влияние продольного поля на ускорительные и компрессионные свойства течений в каналах различной геометрии.

Во-первых, установлено, что в ограниченном диапазоне своих значений продольное поле несколько снижает эффект ускорения, т.к. часть кинетической энергии передается вращению плазмы, вызванному взаимодействием продольного поля с радиальным электрическим током. Во-вторых, оно отклоняет ток от радиального направления и прижимает плазму к внешнему электроду, что в результате должно препятствовать обвязанному эффекту Холла нежелательному скольжению тока и разрежению плазмы в прианодной зоне экспериментально реализованных ускорителей. Исследована роль геометрии электродов, образующих канал в форме сопла. Показано, что ускорение более эффективно в каналах с выпуклым внутрь центральным и горизонтальным

внешним электродами по сравнению с конфигурацией противоположной геометрии.

В расчетах компрессионных течений плазмы в каналах подробно исследованы сжатие и нагрев плазмы в зоне компрессии в зависимости от геометрии канала, отношения характерных значений газового и магнитного давлений плазмы и влияния на них продольного магнитного поля. Максимальные значения плотности и температуры возрастают при увеличении площади поперечного сечения канала. Присутствие продольного поля ослабляет компрессионный эффект: зона компрессии смещается вниз по течению и в радиальном направлении, увеличивается в размерах, а параметры сжатия и нагрева заметно снижаются.

Численная модель и часть представленных результатов изложены в статьях [5, 6].

Работы, обсуждаемые в докладе, выполнены при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10278).

### Список литературы

1. Морозов А. И. Введение в плазмодинамику. 2-е изд. М.: Физматлит, 2008.
2. Брушлинский К.В., Морозов А. И. Анализ двумерных течений плазмы в каналах // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Янус-К, 2007. Сер. Б, Т. IX-2. С. 334 – 369.
3. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.
4. Брушлинский К. В. Математические модели плазмы в проектах Морозова // Физика плазмы. 2019. Т. 45, №1. С. 37 – 50.
5. Брушлинский К. В., Жданова Н. С., Стёpin Е. В. Ускорение плазмы в коаксиальных каналах с профилированными электродами и продольным магнитным полем // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, №4. С. 607 – 617.
6. Брушлинский К. В., Стёpin Е. В. Численная модель компрессионных течений плазмы в каналах в присутствии продольного магнитного поля // Дифференциальные уравнения. 2019 (в печати).

**О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
С ПОМОЩЬЮ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

***Васильев Василий Иванович***

*д.ф.-м.н., профессор*

*E-mail: vasvasil@mail.ru*

*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*

Имеется широкий класс актуальных прикладных задач, приводящих к многомасштабным математическим моделям. В сообщении для численного решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с меняющимися на несколько порядков коэффициентами с помощью «точной разностной схемы» А.А.Самарского, построенной выше 60 лет назад с помощью предложенного им «интегро-интерполяционного метода».

Рассмотрены также и параболические уравнения с быстро меняющимися коэффициентами. Представлены результаты численных расчетов модельных задач на достаточно грубых сетках. Они показали высокую эффективность интегро-интерполяционного метода построения разностных схем для численного решения многомасштабных задач.

**БЕСПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ВОДОРОДНОЙ  
БЕЗОПАСНОСТИ**

**Глотов Вячеслав Юрьевич<sup>1</sup>**

**Канаев Антон Андреевич<sup>2</sup>**

**Киселев Аркадий Евгеньевич<sup>3</sup>**

**Головизнин Василий Михайлович<sup>4</sup>**

1: к. ф. – м. н., с. н. с., Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва,  
Россия

2: к. ф. – м. н., зав. лаб., Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,  
Москва, Россия

3: д. т. н., зав. отделением, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,  
Москва, Россия

4: д. ф. – м. н., зав. лаб., факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: glotov-v@yandex.ru, kanaev@ibrae.ac.ru, ksv@ibrae.ac.ru,  
gol@ibrae.ac.ru

Для обеспечения водородной безопасности (ВБ) на АЭС необходима комплексная система мер, направленных на эшелонированную защиту технологических систем и персонала. Разработка таких мер должна основываться на результатах расчетно-теоретического анализа постулируемых сценариев аварий и результатах натурных (и модельных) экспериментальных исследований, предназначенных для верификации физико-математических моделей расчетных кодов. Для этих целей за рубежом проводятся систематические исследования по вопросам стратификации водорода в ЗО (проекты OECD/NEA: SETH, SETH-2, ERCOSAM-SAMARA, HYMERES, HYMERES-2). Исследования ведутся от простого к сложному. Изучаются как базовые механизмы формирования и разрушения стратификации легкого газа, так и условия в реалистичной постановке с учетом одновременной работы нескольких систем безопасности. Все эксперименты сопровождаются расчетно-аналитическими исследованиями. В ИБРАЭ РАН для численного моделирования задач анализа ВБ разрабатывается программное средство на основе инновационных подходов к построению детальных многомерных и мультифизичных моделей переноса и формирования пространственного распределения пожаро-взрывоопасных концентраций. В её основе лежит известная методика КАБАРЕ [1], которая в отличие от полуэмпирических подходов, используемых в современных инженерных кодах, не имеет настроек параметров, и, в следствии чего, обладает повышенной предсказательной силой в части моделирования турбулентных течений в многокомпонентных средах на сетках с неполным разрешением спектра турбулентных пульсаций. В настоящем докладе представлены результаты верификации методики КАБАРЕ на экспериментах (из проектов HYMERES, HYMERES-2) по исследованию процессов

разрушения стратификации легкого газа под воздействием свободной и диффузной (рассеянной на препятствии) струй горячего пара, и перемешивания газа под воздействием систем безопасности (конденсатор, рекомбинатор).

### **Список литературы**

1. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Издательство Московского университета, 2013.

## КАБАРЕ

*Головизнин Василий Михайлович*

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: gol@ibrae.ac.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Для одномерного линейного уравнения переноса рассмотрены все возможные разностные схемы второго порядка аппроксимации на компактных вычислительных шаблонах. Таких схем оказалось 126. В их число входят все известные схемы как явные, так и неявные, и, кроме того, большое число ранее не исследованных схем. Для всех схем построены диссипативные и дисперсионные поверхности как функции числа Куранта и приведенного волнового числа. Эти графические материалы вместе с т.н. «паспортами» разностных схем составили содержание «атласа дисперсионных и диссипативных свойств», опубликованного в виде учебно – методического пособия [1], которое можно найти в интернете по ссылке <http://lim.cs.msu.ru>.

Из представленных там материалов следует, что среди явных разностных схем наилучшими характеристиками обладает схема КАБАРЕ, предложенная в работе Головизнина В.М. и Самарского А.А. в 1998 году. В последующие двадцать лет эта схема была обобщена на нелинейные гиперболические уравнения в случае многих пространственных переменных и их системы, включающие уравнения газовой динамики с учетом сопутствующих физических процессов. Результаты этих работ достаточно полно представлены в монографии [2].

Доклад посвящен обзору дальнейшего развития схемы КАБАРЕ и опыту ее использования в прикладных задачах за последние пять лет.

### Список литературы

1. Головизнин В. М. Соловьев А. В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа, 2018.
2. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных систем. 2013, место издания Издательство Московского университета, Москва, 467 с.

**Новый алгоритм моделирования течения на сфере в приближении мелкой оды на основе уравнения сохранения момента импульса**

*Головизнин Василий Михайлович<sup>1</sup>*

*Залесный Владимир Борисович<sup>2</sup>*

*Соловьев Андрей Валерьевич<sup>3</sup>*

1: д.ф. – м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф. – м. н., профессор, ведущий научный сотрудник ИВМ РАН

3: к.ф. – м. н., ведущий научный сотрудник ИБРАЭ РАН

E-mail: gol@ibrae.ac.ru, zalesny@inm.ras.ru, solovjev@ibrae.ac.ru

Традиционно, разностные схемы, используемые для моделирования течений на неоднородной вращающейся сетке в приближении мелкой воды, строятся, исходя из системы законов сохранения, включающей в себя закон сохранения импульса с использованием сферической системы координат. При этом для областей вблизи полюсов этой системы возникают особенности, требующие особых усилий для сохранения точности расчета. Авторами предложен новый алгоритм моделирования течения на сфере, записанный в трехмерной декартовой системе координат с использованием уравнения сохранения момента импульса.

Предложенный алгоритм записан в виде конечно-объемной дифференциально-разностной схемы на произвольной кривоугольной геодезической сетке на сфере, в которой не конкретизирован метод получения потоков на гранях ячеек и способ интегрирования о времени. Приведены формулы интегрирования потоков вдоль отрезков геодезической сетки, причем коэффициенты, входящие в эти формулы, вычислены точно. Схема учитывает силу Кориолисса и, при соответствующем методе получения потоков, является хорошо сбалансированной. Несмотря на начальную запись в трехмерном пространстве, схема является двумерной и свободна от особенностей в районе полюсов.

Для замыкания схемы авторы применили метод Кабаре, обладающий минимальным вычислительным шаблоном и имеющим хорошие аппроксимационные, диссипационные и дисперсионные свойства. Метод относится к классу балансно-характеристических методов, в которых переменные на гранях ячеек рассчитываются исходя из характеристических принципов, а переменные в ячейках – на основе консервативных законов сохранения. Приведены основные положения разностной схемы и результаты тестовых расчетов, подтверждающих высокое качество результатов моделирования.

## ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДОСТИЖЕНИЯ ТН1-ТН2 РАВНОВЕСИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ АЛЛЕРГИИ

*Григоренко Николай Леонтьевич<sup>1</sup>*

*Хайлов Евгений Николаевич<sup>2</sup>*

*Григорьева Эллина Валерьевна<sup>3</sup>*

1: д.ф. – м.н., профессор, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: к.ф. – м.н., доцент, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

3: к.ф. – м.н., профессор, Техасский женский университет, Даллас, Техас, США

*E-mail:* grigor@cs.msu.su, khailov@cs.msu.su, egrigorieva@twu.edu

Одной из определяющих характеристик современного мира является увеличение иммунных нарушений и отсутствие соответствующего лечения, или их невосприимчивость к уже существующим способам лечения. Аллергия является одним из примеров таких нарушений. Главная цель настоящего исследования заключается в создании адекватных управляемых моделей, описывающих различные виды аллергии, и нахождении с их помощью эффективных способов ее лечения. Оно продолжает исследования, представленные в [1].

В основе настоящего исследования лежит следующая нелинейная система дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} N'(t) = \alpha - \theta_1 N(t) A(t) T_1(t) (1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} \\ \quad - \theta_2 N(t) A(t) T_2(t) - N(t), \\ T'_1(t) = \rho \theta_1 N(t) A(t) T_1(t) (1 + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_1(t), \\ T'_2(t) = \rho \theta_2 N(t) A(t) T_2(t) (1 + \mu_2 T_2(t)) \\ \quad \times (1 + \mu_1 T_1(t) + \mu_2 T_2(t))^{-1} - T_2(t), \\ A'(t) = \omega - A(t) (T_1(t) + T_2(t)), \\ N(0) = N_0 \geq 0, \quad T_1(0) = T_1^0 \geq 0, \quad T_2(0) = T_2^0 \geq 0, \quad A(0) = A_0 \geq 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

которую мы рассматриваем на заданном отрезке  $[0, T]$ . Она описывает взаимодействие между концентрациями наивных Т-хелперных клеток ( $N$ ), Т-хелперных клеток 1 типа или Th1-клеток ( $T_1$ ), Т-хелперных клеток 2 типа или Th2-клеток ( $T_2$ ), и аллергических клеток ( $A$ ). Взаимодействие именно между этими типами клеток обуславливает протекание аллергии. В этой системе  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – заданные положительные константы. Причем, величины  $\mu_1$ ,  $\theta_1$  и  $\mu_2$ ,  $\theta_2$  связаны с уровнями роста Th1- и Th2-клеток, соответственно.

Во время аллергии Th2-клетки доминируют над Th1-клетками, то есть  $T_2(t) > T_1(t)$ . Выздоровление же означает переход этих типов клеток из начального состояния в состояние Th1-Th2 равновесия между ними, когда  $T_2(t) \approx T_1(t)$ . Такое состояние равновесия может быть достигнуто с помощью применения различных антиаллергенных терапий, которые оказывают на Th1- и Th2-клетки следующие воздействия:

(i) подавляют деление Th2-клеток, что приводит к уменьшению их концентрации;

(ii) стимулируют деление Th1-клеток, что ведет к увеличению их концентрации.

В соответствии с этим, введем в систему (1) управляющие функции  $u(t)$  и  $v(t)$ , которые отражают эффект от воздействия антиаллергенных терапий. Эти управления подчинены ограничениям:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} < 1, \quad 0 \leq v(t) \leq v_{\max} < 1, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Управления  $u(t)$  и  $v(t)$  связаны с антиаллергенными терапиями, обеспечивающими соответствующие воздействия (i) и (ii).

В результате, получаем управляемую систему вида:

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha - \theta_1(1 + v(t))N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2(1 - u(t))T_2(t))^{-1} \\ \quad - \theta_2(1 - u(t))N(t)A(t)T_2(t) - N(t), \\ T'_1(t) = \rho\theta_1(1 + v(t))N(t)A(t)T_1(t)(1 + \mu_2(1 - u(t))T_2(t))^{-1} - T_1(t), \\ T'_2(t) = \rho\theta_2(1 - u(t))N(t)A(t)T_2(t)(1 + \mu_2(1 - u(t))T_2(t))^{-1} \\ \quad \times (1 + \mu_1(1 + v(t))T_1(t) + \mu_2(1 - u(t))T_2(t))^{-1} - T_2(t), \\ A'(t) = \omega - A(t)(T_1(t) + T_2(t)), \\ N(0) = N_0 \geq 0, \quad T_1(0) = T_1^0 \geq 0, \quad T_2(0) = T_2^0 \geq 0, \quad A(0) = A_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для системы (3) мы рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$J(u, v) = 0.5 \int_0^T (T_2(t) - T_1(t))^2 dt + 0.5 \int_0^T (au^2(t) + bv^2(t)) dt, \quad (4)$$

в котором неотрицательные величины  $a$  и  $b$  являются весовыми коэффициентами. Он представляет собой взвешенную сумму двух слагаемых. Первое слагаемое отражает состояние Th1-Th2 равновесия, а второе слагаемое задает общую стоимость проводимых антиаллергенных терапий.

Для численного анализа задачи (4) используется программная среда “БОСОР-2.0.5”. Для различных значений параметров и начальных условий системы (3), ограничений на управления из (2), и весовых коэффициентов из (4) в докладе представлены результаты соответствующих численных расчетов, а также дан их подробный анализ.

### Список литературы

- Григоренко Н. Л., Григорьева Э. В., Хайлов Е. Н. Управляемые модели лечения аллергии // Материалы Международной конференции “Оптимальное управление и дифференциальные игры”, посвященной 110-летию со дня рождения Л. С. Понtryagina, Москва, Россия, 2018, С. 118 - 121.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ОДНОМЕРНОМ  
ДИСКРЕТНОМ МАТЕРИАЛЕ

*Гузев Михаил Александрович<sup>1</sup>*  
*Qi Chengzhi<sup>2</sup>*

1: Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

2: Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing, China

E-mail: guzev@iam.dvo.ru

В работе исследуется распределение температуры в материале с учетом его внутренней структуры. Параметризация микроструктуры выполнена в рамках дискретной одномерной модели взаимодействующих частиц. Такая постановка задачи типична при исследовании тепловых процессов [1].

Рассмотрена модель, в которой взаимодействие учитывается между соседними частицами, и соответствующий потенциал является квадратичным, что позволило построить аналитическое решение для модели. Показано, что спектральные характеристики базисной матрицы системы уравнений, описывающих смещение частиц, вычисляются через полиномы Чебышева. Построенное фундаментальное решение представлено через функции Бесселя и обобщает решение Шредингера для бесконечной цепочки взаимодействующих частиц [2]. Получены различные интегральные представления для решения в терминах комплексной переменной с помощью преобразования Лапласа.

Мерой температуры является средняя кинетическая энергия частиц, для вычисления которой используется построенное выше аналитическое решение. Соответствующее усреднение энергии выполнено по начальному смещениям и скоростям частиц при условии, что они подчиняются принципу Больцмана. Получена общая формула для температуры в зависимости от координаты рассматриваемой частицы. Показано, что неоднородность распределения температуры, определяемая расположением частиц, параметризуется через номер функции Бесселя. При большом числе элементов системы вычислена асимптотика температуры, которая в ведущем порядке не зависит от координаты частиц, и поведение по времени дается функцией Бесселя нулевого порядка: это означает, что распределение тепла однородно в материале .

Работа выполнена при финансовой поддержке Beijing High-caliber Talent from Overseas (ВНТО 201612129-WD).

**Список литературы**

1. Lepri S., Livi R., Politi A. Thermal conduction in classical low-dimensional lattices // Phys. Reports. 2003. V. 377. P. 1 – 80.
2. Schrodinger. Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme // Annalen der Physik. 1914. V. 349. P. 916–934.

**Композиционные методы моделирования поведения систем**  
**Гузев Михаил Александрович, Цициашвили Гурами Шалвович**

*E-mail:* guzev@iam.dvo.ru, guram@iam.dvo.ru

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*

В докладе представлены результаты исследования задач поведения систем объектов разных типов, а также подходы извлечения полезной информации из эмпирических данных о поведении этих систем.

В качестве модельной задачи рассматривается выбор стратегии защиты сетевой группы тел. Первая стратегия основана на индивидуальной охране каждого тела, вторая предполагает интегральную защиту сети. Показано, что во втором случае отношение минимального числа аппаратов, необходимых для обнаружения с вероятностью единица постороннего объекта, к числу аппаратов, используемых в первой стратегии, обратно пропорционально корню квадратному из количества элементов сетевой структуры.

Методы обработки информации представлены при определении акустически активной зоны в горной выработке по наблюдениям за звуковыми сигналами. Предложенный алгоритм основан на теории графов, вершины которого соответствуют объектам, а ребра вводятся, если «расстояние» между объектами превышают некоторое критическое значение. В построенном графе выделяются связные компоненты, характеризующие принадлежность рассматриваемых событий акустической эмиссии к кластеру. В качестве исходных данных для формирования кластеров используется массив сейсмоакустических событий. Апробация рассмотренного алгоритма в составе автоматизированной системы геомеханического мониторинга для действующих рудников дальневосточного региона показала их эффективность для выявления потенциально удароопасных участков горного массива.

Работа поддержана грантами президиума ДВО РАН, программа «Дальний Восток», проекты 18-5-050, 18-5-083.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО  
СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДИКИ КАБАРЕ**

*Гущин Валентин Анатольевич<sup>1</sup>*

*Кондаков Василий Гаврильевич<sup>2</sup>*

1: д.ф. – м. н., чл. – кор. РАН, Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

2: к.ф. – м. н., Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

*E-mail: gushchin@icad.org.ru, kondakov@ibrae.ac.ru*

В работе представлены результаты исследования течений со свободной поверхностью в двумерном приближении. Для модели несжимаемой среды представлена конечно-разностная схема на основе методики КАБАРЕ на смешанной лагранжево-эйлеровой сетке. Преобразование, превращающее сетку в ортогональную прямоугольную область, таково, что по горизонтальной оси узлы неподвижны, а изменение узлов происходит вдоль вертикальных граней, таким образом, что сетка по вертикальной оси остается равномерной. Рассматриваются тестовые примеры осцилляций в стакане, взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью, а также взаимодействия потока среды с вертикальной твердой стенкой (ундулярная бора). Для задачи с осцилляциями в стакане решение сравнивается с аналитическим решением, полученным в линейном приближении уравнений Навье-Стокса. Численные результаты задач взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью и ундулярной боры сравниваются с результатами полученными по методу МЕРАНЖ (моноトンная явная конечно-разностная схема второго порядка точности, имеющая минимальную схемную вязкость и дисперсию). Целью данной работы является разработка эффективных численных методов решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и исследование с их помощью как стационарных, так и нестационарных волновых движений жидкости.

**Список литературы**

1. Гущин В. А., Кондаков В. Г. Обобщение метода КАБАРЕ на случай течений несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности // Математическое моделирование. 2018. Т. 30 № 11. С. 75 – 90.

**АДАПТИВНОЕ УТОЧНЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА  
В ЧЕБЫШЕВСКИХ ИТЕРАЦИЯХ**

**Жуков Виктор Тимофеевич, Феодоритова Ольга Борисовна,  
Новикова Наталия Дмитриевна**

*E-mail:* zhukov@kiam.ru, feodor@kiam.ru, nn@kiam.ru  
*ИПМ имени М. В. Келдыша, Москва, Россия*

Рассматривается двухслойный чебышевский итерационный метод [1, с.269] решения систем линейных алгебраических уравнений. Нас интересуют системы уравнений, возникающие при сеточной аппроксимации краевых задач для самосопряженных эллиптических дифференциальных уравнений. Для таких задач чебышевский метод может быть конкурентноспособным по сравнению с другими известными методами, особенно при параллельной реализации. В качестве недостатка чебышевского метода называют необходимость априорного задания спектральных границ сеточного оператора. Верхняя граница спектра может быть оценена по известной теореме Гершгорина, но оценка нижней границы спектра в общем случае отсутствует. Предлагаемый подход позволяет оценивать нижнюю границу оператора (матрицы) в процессе специально организованных итераций в рамках стандартного чебышевского метода. Расчеты показывают, что такая адаптивная процедура обеспечивает сходимость итераций с вычислительными затратами, близкими к затратам чебышевского метода с заданием точных границ спектра. Изложим принцип адаптации на примере решения системы уравнений  $Au = f$ , где  $u, f$  – искомый и заданный векторы соответственно,  $A$  является самосопряженной положительно-определенной  $n \times n$  – матрицей, ее собственные значения (спектр)  $\lambda$  положительны и лежат на отрезке  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$  вещественной оси,  $0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max}$ . Классический двухслойный итерационный метод Чебышева может быть записан как

$$y^j = y^{j-1} - \omega_j(A \cdot y^{j-1} - f), \quad j = 1, \dots, p \quad (1)$$

с упорядочиванием итерационных параметров  $\omega_j$  для обеспечения устойчивости; здесь  $y^0$  – заданное начальное приближение. Число итераций  $p$  находится из условия достижения заданной точности по критерию  $\|r_p\| < \varepsilon \|r_0\|$ , где  $r_0 = f$ ,  $r_p = f - A \cdot y^p$  – начальная и конечная невязки. Оценка для  $p = p(\varepsilon, \lambda_{\min}/\lambda_{\max})$  известна, см.[1]. Оператор перехода  $F_p(A)$  метода (1) определяется оптимальным многочленом Чебышева  $F_p(\lambda)$  на интервале  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$  с нормировкой  $F_p(0) = 1$ .

Согласно [1, с.328] для сходимости итераций с неточным заданием границ спектра необходимое и достаточное условие имеет вид  $\lambda_{\max} < \lambda_{\max}^* + \lambda_{\min}^*$ . Для выполнения этого условия при построении процедуры адаптации будем предполагать справедливость соотношений  $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\min}^* < \lambda_{\max} \leq \lambda_{\max}^*$ .

Этим неравенствам удовлетворяют оценка  $\lambda_{\max}^*$ , получаемая по теореме Гершгорина, и начальная оценка  $\lambda_{\min}^*$  в виде отношения Рэлея  $\lambda_{\min}^* = A(v, v)/(v, v)$ . Новое значение  $\lambda_{\min}^*$  найдем, задав существенно меньшую точность  $\varepsilon_1 << \varepsilon = \varepsilon_{tot}$ . С заданными  $\lambda_{\max}^*$ ,  $\lambda_{\min}^*$ ,  $\varepsilon_1$  применим алгоритм (1) и получим отношение  $\delta = \|r_p\|/\|r_0\|$  для норм конечной и начальной невязок  $r_p$ ,  $r_0$ . Если  $\delta > \varepsilon_1$ , тогда оценку  $\lambda_{\min}^*$  можно уточнить, взяв новое  $\lambda_{\min}^*$  как корень уравнений  $F_p(\lambda) = \delta$ , лежащий на левой гиперболической ветви многочлена. Если точность  $\varepsilon_{tot}$  не достигнута, то новый шаг адаптации выполняется с  $\lambda_{\max}^*$ ,  $\varepsilon_1$  и новым  $\lambda_{\min}^*$ . Если на шаге адаптации  $k > 1$  полученная точность  $\delta = \delta_k \leq \varepsilon_1$ , то мы выполняем следующий шаг либо без изменения значений  $\lambda_{\min}^*$ ,  $\lambda_{\max}^*$ ,  $\varepsilon_1$ , либо изменяем точность  $\varepsilon_1$ , взяв  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{tot}/(\delta_1 * \dots * \delta_k)$ . То есть, если условие  $\delta_k \leq \varepsilon_1$  достигнуто, то оценка является хорошим приближением точной границы, поэтому точность  $\varepsilon_{tot}$  будет при новых входных данных достигнута на следующем шаге адаптации. В расчетах обычно  $\lambda_{\min}^*$  устанавливается быстро. Заметим, что процедура адаптации – это степенной метод, примененный к многочлену  $F_p(A)$  с  $p = p(\varepsilon_1, \lambda_{\min}^*/\lambda_{\max}^*)$ . Успех адаптации обеспечивает следующее важное свойство оптимальных многочленов Чебышева: согласно [2] вне отрезка оптимальности такие многочлены обладают в некотором смысле противоположным экстремальным свойством, а именно многочлен Чебышева степени  $p$  уклоняется от нуля максимально вне отрезка оптимальности по сравнению со всеми многочленами степени  $p$ , удовлетворяющими той же нормировке.

Адаптивный чебышевский метод представляет интерес не только как самостоятельный алгоритм, но и как основной алгоритмический элемент, встраиваемый в многосеточный метод. Адаптация происходит естественным образом в ходе многосеточных итераций. В этом случае адаптивный метод может служить для решения уравнений на самой грубой сетке, а также использоваться как сглаживатель, для которого в ходе многосеточных итераций адаптивно уточняется граница, разделяющая спектр матрицы на две группы, отвечающие разделению пространства сеточных функций на гладкие и негладкие функции. Детали алгоритма и примеры его применения приведены в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00670).

### Список литературы

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.
3. Жуков В. Т., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Адаптивный чебышевский итерационный метод // Матем. моделирование. 2018. Т. 30, № 10. С. 67 – 85.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНА

*Залесный Владимир Борисович<sup>1</sup>*

*Гусев Анатолий Владимирович<sup>2</sup>*

*Мошонкин Сергей Николаевич<sup>3</sup>*

*Семенов Евгений Васильевич<sup>4</sup>*

1: д.ф.-м.н., в.н.с., Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН,

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: к.ф.-м.н., с.н.с., Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН,

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

3: д.ф.-м.н., с.н.с., Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

4: д.ф.-м.н., г.н.с., Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН,

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [vzalesny@yandex.ru](mailto:vzalesny@yandex.ru), [anatoly.v.gusev@gmail.com](mailto:anatoly.v.gusev@gmail.com),

[atarexm@himki.net](mailto:atarexm@himki.net), [oceanmod@yandex.ru](mailto:oceanmod@yandex.ru)

Рассматриваются задачи математического моделирования гидродинамики океанов и морей. Математические модели общей циркуляции океана формулируются в сферических координатах в тонком слое вращающейся трёхмерной области со свободной поверхностью, в приближениях гидростатики и Буссинеска.

Численные алгоритмы основаны на методе многокомпонентного расщепления и имеют гибкую, иерархически развивающую модульную структуру. Основным “циклом” является расщепление сложной системы уравнений по физическим процессам на ряд энергетически сбалансированных подсистем. Каждая отдельная подсистема может повторно расщепляться на подсистемы более простой структуры. Глубина повторных расщеплений может включать несколько уровней вплоть до выделения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и простейшими уравнениями в частных производных. На отдельных этапах расщепления могут использоваться различные численные алгоритмы и точные решения.

Наряду с решением прямых прогностических задач метод расщепления может эффективно использоваться для решения задач 4-х мерной вариационной ассимиляции данных наблюдений. В этом случае каждой отдельной подсистеме ставится в соответствие её сопряжённый аналог, который решается в обратном времени. Сопряжённая модель определяется соответствующим набором расщеплённых сопряжённых подсистем. Разработанная методика иллюстрируется на решении задач гидродинамики Мирового океана и Чёрного моря.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ПЛОТНОСТЕЙ  
ЭНЕРГИИ**

**Змитренко Николай Васильевич, Кучугов Павел Александрович,  
Ладонкина Марина Евгеньевна, Тишкин Владимир Фёдорович**

*E-mail:* zmitrenko@imamod.ru, pkuchugov@gmail.com,  
ladonkina@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,  
Россия*

Одной из актуальных проблем современной физики является лазерный термоядерный синтез (ЛТС), являющийся перспективным направлением развития электроэнергетики, в результате осуществления которого ожидается выделение большого количества энергии. Наиболее мощной действующей на сегодняшний день установкой, нацеленной на реализацию данного подхода, является NIF (National Ignition Facility, USA). Установка проектировалась как достаточная для достижения “зажигания” мишени, т.е. выделения в ней термоядерной энергии превосходящей или, по крайней мере, сравнимой с вложенной в неё извне лазерной энергией. Однако, как известно, ожидаемого термоядерного выхода пока не достигнуто, и основной причиной этих неудач называется развитие гидродинамических неустойчивостей, нарушающих симметрию сжатия сферических термоядерных капсул и горения топлива. В связи с этим особую важность приобретает задача об определении динамики роста различных возмущений в указанных выше условиях и поиске возможностей их подавления.

Течения, возникающие в упомянутых выше задачах, обладают рядом особенностей. Как правило, в них не наблюдается перехода к перемешиванию в широком диапазоне волновых векторов в силу скоротечности протекающих процессов, что позволяет при их моделировании не использовать модели турбулентности или подсеточные модели, построение которых в указанных условиях затруднительно.

Общая проблематика такого рода задач рассмотрена во многих работах авторов, посвящённых одномерным и многомерным гидродинамическим расчётом [1-3]. В настоящей работе приведены результаты моделирования развития различных гидродинамических неустойчивостей в 2D и 3D постановках вследствие воздействия лазерного излучения, полученные с помощью численного кода NUT3D [1], а также обсуждается динамика роста различных возмущений.

**Список литературы**

1. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В. и др. Разностные схемы трёхмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости

- Рихтмайера–Мешкова// Матем. моделирование. 1995. Т. 7, 5. С. 15 – 25.
2. Бельков С. А., Бондаренко С. В., Вергунова Г. А. и др. Влияние пространственной неоднородности нагрева на сжатие и горение термоядерной мишени при прямом многопучковом облучении лазерным импульсом мегаджоульного уровня// ЖЭТФ. 2017. Т. 151, 2. С. 396 – 408.
  3. Gus'kov S. Yu., Demchenko N. N., Zmitrenko N. V. et al. Effect of mixing at the fuel-ablator interface on the burning of inertial confinement fusion targets upon direct irradiation with a megajoule laser pulse// Journal of Russian Laser Research. 2017. V. 38, 2. P. 173 – 184.

**МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ  
МНОГИХ ТЕЛ**

**Караваев Александр Сергеевич, Копысов Сергей Петрович**

аспирант, д.ф. – м. н., профессор

E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

Факультет ИМИТиФ УдГУ, Ижевск, Россия

В работе рассматривается метод решения задачи контактного взаимодействия двух и более деформируемых тел в условиях одностороннего контакта. Исследуется метод декомпозиции области для дискретных постановок задач рассматриваемого класса.

Характерным для методов декомпозиции с раздельным представлением контактирующих тел является сохранение естественной контактной границы между взаимодействующими телами в качестве численного интерфейса при декомпозиции области, а также итерационный характер алгоритмов.

Итерационный процесс организуется так, что на каждой итерации при решении краевых задач для контактирующих подобластей на границе сопряжения поочередно ставятся краевые условия, выбор которых определяет его принадлежность к одному из вариантов альтернирующего метода Шварца: Дирихле-Нейман, Нейман-Нейман, Робин-Робин.

В работе Лионса [1] обосновано обобщение классического метода Шварца на неперекрывающиеся подобласти. На каждом шаге итерационного процесса решается одна и та же система уравнений в каждой подобласти со смешанными граничными условиями, что позволяет более симметрично обрабатывать как подобласти с общими границами, так и возможные внутренние разбиения каждой из них.

Ранее в серии работ Цвик Л.Б. [2] предложено обобщение алгоритма Шварца на случай неперекрывающихся подобластей в виде алгоритма, названного методом поочередных сопряжений при рассмотрении контактирующих тел.

Известные авторам работы по применению рассматриваемой модификации алгоритма Шварца относятся к статическим задачам о контактирующих двух или нескольких тел с известной контактной границей.

В данной работе рассматривается алгоритм декомпозиции для динамических контактных задач, объединяющий в зоне контакта граничные условия Дирихле и Неймана. Для каждого контактирующего тела выполняется симметричная релаксационная процедура для следа, используемого при постановке граничных условий на контактной поверхности.

Для решения поставленных задач формулируется численный метод, который объединяет независимую конечно-элементную дискретизацию пространства контактирующих тел и модификацию конечно-разностной схемы Hilber-Hughes-Taylor- $\alpha$  (НHT- $\alpha$ ) для интегрирования по времени с перераспределением матрицы масс на границе области контакта. Разделив множество

расчетных узлов сетки каждого тела и вектора неизвестных перемещений  $\mathbf{U}$  на внутренние (индекс "I") и принадлежащие области контакта (индекс "C") систему уравнений движения, запишем

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{II}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IC}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{CI}^{(k)} & \mathbf{K}_{CC}^{(k)} \end{pmatrix} \right]_{2m+1}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_I^{(k)} \\ \mathbf{U}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2m+1} = \\ & = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} + (1 + \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2m+1}^{t+\Delta t} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_I^{(k)} \\ \mathbf{H}_C^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (18) \end{aligned}$$

здесь  $k$  – номер тела,  $2m + 1$  – номер итерации,  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\alpha, \beta$  – параметры схемы ННТ- $\alpha$ ,  $\mathbf{M}_{II}^{(k)}$  – диагональная матрица масс внутренних узлов,  $\mathbf{K}_{ii}^{(k)}$  – соответствующая матрица жесткости,  $\mathbf{P}_I^{(k)}$  – вектор внешних нагрузок,  $\begin{pmatrix} \mathbf{H}_I^{(k)}, \mathbf{H}_C^{(k)} \end{pmatrix}^T$  – вектор динамических сил, вычисленных на предыдущем временном шаге  $\Delta t$ .

Для контактных задач одной из особенностей схемы (18) является то, что узлы на границе контакта также имеют свою собственную инерцию, что приводит к неустойчивости даже для консервативных схем.

Используя введенное ранее упорядочивание системы уравнений вида (18) и считая, что последние уравнения соответствуют нормальным компонентам вектора перемещений на границе контакта, представим модифицированную матрицу масс в виде диагональной, а перераспределение масс обеспечим обнулением элементов матрицы масс для контактирующих узлов.

Применимость алгоритма иллюстрируется тестовыми численными решениями трехмерных динамических контактных задач для нескольких деформируемых тел на несогласованных сетках. Исследовались соударения системы трех и пяти тел сферической формы при многоконтактном и парном взаимодействии. Рассматривалось применение алгоритма при моделировании ударного воздействия на голову при черепно-мозговых травмах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по гранту N 17-01-00402-а.

### Список литературы

1. Lions P. L. On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains // In Proceedings of the Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Houston, Texas, March 20-22, 1989, Philadelphia, PA, 1990. SIAM, P. 202–223.
2. Цвик Л. Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13 – 18.

**РАСЧЕТ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С  
УЧЕТОМ УГЛА АТАКИ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ**

**Козлитин Иван Алексеевич, Жуков Виктор Тимофеевич,  
Феодоритова Ольга Борисовна, Краснов Михаил Михайлович**

*E-mail: ioannkozlitin@gmail.com, zhukov@kiam.ru, feodor@kiam.ru,  
kmm@kiam.ru*

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

Одной из основных тенденций в развитии современных оружейных систем является повсеместное внедрение цифровых баллистических вычислителей (ЦБВ) в системы управления огнем. Основной задачей разработчика ЦБВ является обеспечение его работы в реальном масштабе времени с требуемой точностью. Это накладывает серьезные ограничения на трудоемкость алгоритмов, реализованных в ЦБВ.

Полнота описания поведения тела в полете достигается решением полной системы дифференциальных уравнений внешней баллистики, где летящее тело характеризуется 6 степенями свободы (6DOF - моделирование): 3 пространственными координатами и 3 углами. Однако, для расчета баллистических поправок в реальном времени этот метод излишне трудоемок, поскольку для детального описания поведения тела в полете требуется малый шаг интегрирования. Другая сложность, которая возникает при реализации этого подхода – необходимость знания всех сил и моментов, действующих на летящее тело.

Альтернативой 6DOF-моделированию является использование более простых моделей, которые во многих случаях дают точность вполне достаточную для решения прикладных задач, обладая при этом существенно меньшей трудоемкостью (более чем на порядок). Простейшей из таких моделей является двумерная баллистическая модель (Point-Mass model). Точности этой модели вполне достаточно для расчета баллистики стрелкового оружия. Промежуточное положение между двумерной моделью и моделями с 6 степенями свободы занимают модели с 4 степенями свободы (4DOF). В них наряду с координатами центра масс летящего тела учитывается угол атаки – угол между осью симметрии летящего тела и набегающим потоком воздуха. В рамках 4DOF-моделирования можно учесть все основные эффекты, связанные с вращением тела в полете. При этом трудоемкость модели существенно ниже, чем при 6DOF-моделировании, а число параметров – меньше, что облегчает их подбор.

Свободные параметры 4DOF-модели могут подбираться как на основе сравнения с экспериментальными данными, так и на основе результатов аэrodинамических расчетов.

Такие расчеты проводятся на основе решения задачи трехмерного обтекания тела вязким теплопроводным газом, т.е. решается система уравнений

Навье-Стокса, дополненная моделью турбулентности, так для основной части траектории полета характерное число Рейнольдса является достаточно большим. На основании таких расчетов составляются таблицы аэродинамических коэффициентов (полная аэродинамическая сила и крутящий момент, действующие на объект) при вариации параметров (скорость, угол атаки) в заданных диапазонах. Такие расчеты требуют использования комбинированных неструктурированных сеток, состоящих из двух частей: призматического слоя близи обтекаемой поверхности и произвольной многогранной сетки при удалении от поверхности. В области пограничного слоя в окрестности поверхности и в местах резкого изменения кривизны поверхности делается специальное прижатие и сгущение ячеек сетки.

Составление детальных таблиц аэродинамических характеристик требует высокоточного численного моделирования и, как правило, выполняется на суперкомпьютере в параллельном режиме. Расчеты выполняются с использованием реальной геометрии объекта и набора экспериментальных данных для калибровки математической модели. Простейший набор данных представляет собой таблицу значений скорости в зависимости от расстояния. Зная потери кинетической энергии на каждом участке полета, можно оценить среднюю величину силы лобового сопротивления на каждом участке и сравнить с рассчитанными значениями. Такая валидация носит предварительный характер, для проведения доказательного моделирования нужны детальные натурные эксперименты, которые являются дорогостоящими.

Заметим, что модель с четырьмя степенями свободы может с успехом применяться как для расчета баллистических поправок в реальном времени в силу ее малой трудоемкости, так и для верификации более сложных моделей с 6 степенями свободы.

### Список литературы

1. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles // Atglen, PA: Schiffer Publishing Ltd., 2012. — 328 p. — (Technology & Engineering). — ISBN 978-0-7643-3825-0.
2. ГОСТ В 24288-80. Снаряды неуправляемые артиллерийские, реактивные, активно-реактивные. Метод расчета траектории полета. М.: Издательство стандартов, 1980, 55с.
3. Козлитин И. А. Полуэмпирическая баллистическая модель с четырьмя степенями свободы // Электронные информационные системы, 2018, №2(17), с. 83-100.

## Новый подход к решению проблемы УТС

**Козлов Андрей Николаевич**

д. ф.-м. н., профессор

E-mail: andrey-n-kozlov@mail.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, РАН,  
Механико-Математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия

Представленные исследования могут определить новый подход к решению проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС). Речь идет о совместном использовании квазистационарного плазменного ускорителя (КСПУ) и ряда кольцевых проводников с током. В данном случае КСПУ используется для генерации высокоскоростных потоков плотной плазмы, которая инжектируется в систему кольцевых проводников с током. Простейшие плазменные ускорители состоят из двух коаксиальных электродов, подключенных к электрической цепи. Азимутальное магнитное поле генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. Радиальный плазменный ток, протекающий между электродами, и азимутальное магнитное поле, представленные на рис. 1, обеспечивают ускорение плазмы благодаря силе Ампера  $[j, H]/c$ , где  $j$  — ток в плазме. Достижение соответствующей скорости на выходе из КСПУ определяет температуру в магнитных ловушках, необходимую для последующей реакции синтеза и примерно равную  $T_m = 10$  кэВ для смесидейтерия и трития (D-T). Оценки необходимой скорости потока D-T плазмы приводят к значениям энергии ионов  $\varepsilon_i = m_i V_i^2 / 2 \geq 3k_B T_m$  и скорости  $V_i \geq 10^8$  см/с. Определены условия [1], обеспечивающие генерацию в КСПУ высокоскоростных потоков D-T плазмы с энергией ионов на уровне 30 кэВ. На рис. 1 схематично представлены также кольцевые проводники с током  $J_k$ . Проводники расположены на определенном удалении друг от друга, образуя чередующиеся области с сильным и слабым магнитным полем.

Задача взаимодействия потока плазмы с магнитным полем, создаваемым рядом катушек с током, рассмотрена на основе модели радиационной магнитной газодинамики. Для осесимметричных течений используется векторный потенциал  $A$  магнитного поля так, что  $H = \text{rot } A$  и  $\text{div } H = 0$ . Постановка задачи в канале КСПУ при наличии продольного магнитного поля, представлена в [2]. Для учета магнитной вязкости и теплопроводности используется метод потоковой прогонки. Алгоритм численного решения задачи о переносе излучения в 3Д модели основан на методе длинных характеристик и изложен в [3]. Значения азимутальной компоненты  $A_\varphi$  на цилиндрической поверхности, сопряженной с каналом ускорителя, вычисляются на основе решения задачи о вакуумном магнитном поле, создаваемом проводниками с током.

Численное исследование течений плазмы, взаимодействующей с магнитным полем ряда кольцевых проводников с током, показало [4], что обтекание

области сильного магнитного поля приводит к изменению исходной структуры течения, отвечающей конической ударной волне, формирующейся на выходе из КСПУ. Установлено, что в окрестности оси системы образуются области с локально высокими значениями температуры в результате трансформации кинетической энергии в тепловую энергию в процессе обтекания областей с сильным магнитным полем и последующего торможения встречных потоков на оси. Наблюдается поэтапное или каскадное увеличение значений температуры в магнитном поле последовательного ряда кольцевых проводников. Выявленный эффект указывает на возможность разработки нового подхода к решению проблемы УТС. Каскадный нагрев плазмы в потоке с термоядерными параметрами после прохождения достаточно длинного ряда катушек с током может обеспечить высокую температуру. Новый подход позволяет учесть многообразие перспективных схем термоядерных установок.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 16-11-10278).

### Иллюстрации

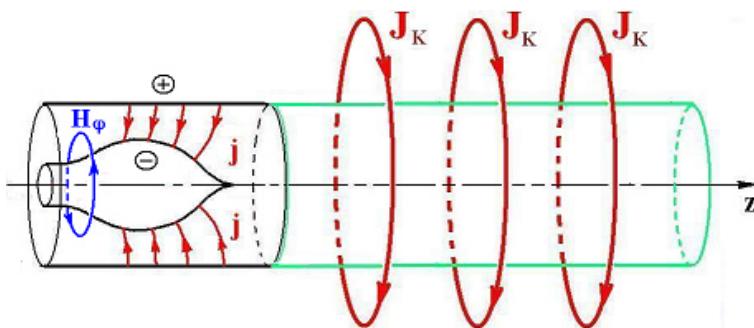


Рис. 6: Схематическое изображение плазменного ускорителя и системы кольцевых проводников с током.

### Список литературы

1. Kozlov A. N. The study of plasma flows in accelerators with thermonuclear parameters // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59, No. 11, 115004.
2. Kozlov A. N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // J. Plasma Phys. 2008. V. 74, No. 2. P. 261 – 286.
3. Kozlov A. N., Konovalov V. S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. V. 51. P. 169 – 179.
4. Kozlov A. N. The study of high-velocity flow injection into the set of magnetic field coils coupled to plasma accelerator // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61, No. 3, 035008.

**EBR СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК И ПРИМЕРЫ ИХ  
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ  
АЭРОДИНАМИКИ И АЭРОАКУСТИКИ**

**Козубская Татьяна Константиновна**

*д.ф. – м. н., г.н.с.*

*E-mail: kozubskaya@imamod.ru*

*ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

Доклад носит обзорный характер. Он посвящён реберно-ориентированным EBR (Edge Based Reconstruction) схемам повышенной точности для численного решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках [1]. В нём будут рассмотрены модификации и расширения данных схем, а также приведены примеры их использования при моделировании задач прикладной аэродинамики и аэроакустики.

EBR схемы обеспечивают повышенную точность решения по сравнению с традиционными конечно-объёмными схемами второго порядка при умеренных вычислительных затратах по сравнению с методами «очень высокого» порядка (т.е. третьего и выше порядка) точности. Оставаясь в семействе методов второго порядка в случае произвольных неструктурированных сеток, реберно-ориентированные схемы обладают примечательным свойством превращения в высокоточные алгоритмы в смысле конечно-разностных аппроксимаций на равномерных решётчатых сетках, т.е. сетках, инвариантных относительно переноса на любое ребро. Это свойство EBR схем обеспечивается благодаря используемой ими реконструкции переменных на расширенном квазидонемерном реберно-ориентированном шаблоне неструктурированной сетки. Квазиодномерная природа этих схем объясняет также их относительно невысокую вычислительную стоимость.

В докладе рассматриваются обобщения EBR схем на гибридные сетки [2] и разрывные решения за счёт оснащения их техниками WENO и TVD [3]. В настоящее время существует и объёмно-центрированная версия EBR схем [4], тогда как изначально они разрабатывались применительно к вершинно-центрированным формулировкам. Вершинно-центрированные EBR схемы были реализованы для скользящих сеток [5], в то время как объёмно-центрированная реализация кажется более естественной и, возможно, станет еще одним расширением в будущем.

EBR схемы активно используются для вихреразрешающего RANS-LES моделирования сложных турбулентных течений [6] и генерируемых ими акустических полей. В докладе в кратком виде приводятся результаты моделирования шума турбулентных струй [7], акустических полей, генерируемых взаимодействием турбулентного течения вокруг трёх-компонентного крылового сегмента с выпущенной механизацией [8], отрывного течения около обратного уступа с наклонной стенкой при трансзвуковых режимах [9], струйного

течения из двухконтурного сопла [10], а также результаты численного предсказания аэродинамических и акустических характеристик винта вертолёта [11]. Одним из важных направлений текущего развития EBR схем является их использование при моделировании течений вблизи движущихся тел, описываемых методом погруженных границ [12].

Представленные исследования частично поддерживаются Российским фондом фундаментальных исследований (Проект 18-01-00445) и Российским научным фондом (Проект 16-11-10350).

### Список литературы

1. I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, T.K. Kozubskaya. Int. J. Numer. Methods Fluids. 81(6) (2016) 331–356.
2. П.А. Бахвалов, Т.К. Козубская. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 57(4) (2017), 682–701.
3. P.A. Bakhvalov, T.K. Kozubskaya. Comput. Fluids. 157 (2017) 312–324.
4. П.А. Бахвалов, Т.К. Козубская. Матем. моделирование. 28(3) (2016) 79–95.
5. П.А. Бахвалов, В.Г. Бобков, Т.К. Козубская. Матем. моделирование. 28(8) (2016) 13–32.
6. A.P. Duben, T.K. Kozubskaya. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 137 (2018) 169–178.
7. A.P. Duben Alexey, T.K. Kozubskaya. AIAA-paper 2017-3856, (2017).
8. Bobkov, V., Gorobets, A., Duben, A., Kozubskaya, T. and Tsvetkova, V. Book of abstracts of the 5th Int. workshop “Computational experiment in aeroacoustics”, Sept. 19-22, 2018, Svetlogorsk, Russia, 36–37.
9. С.М. Босняков, А.П. Дубень, А.А. Желтоводов, Т.К. Козубская, С.В. Матяш, С.В. Михайлов. Матем. моделирование. (2019) (в печати).
10. С.М. Босняков, А.В. Волков, А.П. Дубень, В.И. Запрягаев, Т.К. Козубская, С.В. Михайлов, А.И. Трошин, В.О. Цветкова. Матем. моделирование. (2019) (в печати).
11. И.В. Абалакин, В.А. Аникин, П.А. Бахвалов, В.Г. Бобков, Т.К. Козубская. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 3 (2016) 130–145.
12. N.S. Zhdanova, I.V. Abalakin, T.K. Kozubskaya. Proceedings of ECCM 6/ECFD 7, 11–15 June 2018, Glasgow, UK, p1797.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА С  
РАЗРЫВНЫМИ БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

**Краснов Михаил Михайлович, Ладонкина Марина Евгеньевна,  
Тишкин Владимир Фёдорович**

*E-mail:* kmm@kiam.ru, ladonkina@imamod.ru, tishkinvf@keldysh.ru

*Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва,  
Россия*

Решение прикладных задач газовой динамики в областях со сложной конфигурацией исследуемого объекта[1] диктует использование неструктурированных, а часто и разномасштабных сеток, а также применение численных методов высокой точности. Для решения задач такого типа хорошо зарекомендовал себя метод Галеркина с разрывными базисными функциями (DG)[2]. Данный метод обеспечивает заданный порядок точности, может использоваться для сеток произвольной структуры, позволяет достаточно просто реализовывать граничные условия различных типов и надежно теоретически обоснован.

Как известно, наряду с множеством преимуществ применения разрывного метода Галеркина, он имеет некоторые сложности реализации. Основная трудность решения нелинейных гиперболических систем законов сохранения возникает из-за того, что решения системы могут становиться разрывными, даже если начальные условия являются гладкими. DG схемы, являясь схемами высокой точности, могут давать сбой при наличии сильных ударных волн или областей высоких градиентов и могут генерировать сильные колебания, которые в конечном итоге могут привести к сбою в вычислениях. Поэтому, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, или лимитеры. Наиболее широко используемым, является классический лимитер Кокбурна [2], который был разработан для треугольных и тетраэдральных ячеек. Данный лимитер гарантирует монотонность получаемого решения. В данном докладе будет показано, что идею данного лимитера можно реализовать в многомерном случае на сетках с ячейками различной конфигурации [3]. В последнее время активно развиваются различные подходы к созданию лимитеров повышенного порядка точности. Однако, часто применение лимитеров, обладающих таким свойством [4], не гарантирует подавление нефизичных осцилляций. В данном докладе будут представлены результаты исследования влияния различных лимитирующих функций на решение, полученное разрывным методом Галеркина.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 17-71-30014.

### Список литературы

1. Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Lutsky A. E., Tishkin V. F. Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method // Journal of Physics: Conference Series, V. 815, № 1, 2017.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998, V. 1697. P. 151 – 268.
3. Краснов М. М., Ладонкина М. Е., Тиштин В. Ф. Реализация разрывного метода Галёркина в программном комплексе DGM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2018, № 245. 31 с. doi:10.20948/prepr-2018-245
4. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N., Sawada K. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm // Communications in Computational Physics, vol. 7, № 3, p. 510 – 533, 2010.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНЫХ  
МНОГОФАЗНЫХ МОДЕЛЕЙ**

**Кулешов Андрей Александрович<sup>1</sup>**

**Мышецкая Елена Евгеньевна<sup>2</sup>**

**Якуш Сергей Евгеньевич<sup>3</sup>**

1: д.ф. – м. н., Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук, Москва

2: Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук, Москва

3: д.ф. – м.н., Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН  
E-mail: andrew\_kuleshov@mail.ru

Представлены результаты работ авторов по математическому моделированию лесных пожаров, начатых в свое время по инициативе академика А.А.Самарского. В основе разрабатываемого подхода лежит математическое описание лесного пожара как многофазной реагирующей среды [1]. Основной задачей разработанных вычислительных моделей является прогнозирование распространения фронта лесных пожаров с учетом основных физико-химических процессов, влияющих на динамику этого процесса. Для численного моделирования реальных лесных пожаров, протекающих достаточно продолжительное время на значительных площадях, предпочтительнее использовать модели с понижением размерности. В ранних работах авторов [2,3] была разработана физически обоснованная двумерная двухфазная модель распространения лесных пожаров, уравнения которой получены осреднением исходных трехмерных уравнений по высоте слоя лесных горючих материалов. В этой модели рассматривается газовая фаза, состоящая из воздуха и летучих продуктов пиролиза и горения лесных горючих материалов, и неподвижная твердая фаза, состоящая из лесных горючих материалов и твердых продуктов их пиролиза и горения. Горение как в газовой, так и в твердой фазах описываются кинетическими уравнениями. В развитие этих работ была разработана модифицированная двумерная двухфазная модель лесных пожаров [4]. В этой модели используется  $k - \varepsilon$  модель турбулентности с введением дополнительных членов генерации и диссипации турбулентной кинетической энергии в лесном массиве, а скорость турбулентного горения в газовой фазе описывается моделью дробления вихрей, согласно которой скорость горения при высокой температуре не зависит от кинетики реакций, а определяется исключительно скоростью турбулентного смешения компонент [5]. В последнее время авторами была разработана трехфазная модель лесных пожаров, в которой третья фаза состоит из крупных твердых горящих частиц, которые переносятся ветром над пологом леса, и, оседая, образуют новые очаги перед передней кромкой фронта пожара. Такой механизм распространения огня наблюдается в

реальных лесных пожарах. Построенные двумерные математические модели допускают эффективную численную реализацию на высокопроизводительных вычислительных системах. Приведенные результаты численного моделирования показывают, что предложенные модели дают качественно правильную картину образования и распространения фронта пожаров в условиях, при которых протекают реальные лесные пожары.

### Список литературы

1. Гришин А. М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Новосибирск: Наука СО, 1992.
2. Кулешов А. А., Мышецкая Е. Е. Математическое моделирование лесных пожаров с применением многопроцессорных ЭВМ // Мат. моделирование. 2008. Т. 20. № 11., С. 28 – 34.
3. Kuleshov A. A., Chetverushkin B. N., Myshetskaya E. E. Parallel computing in forest fire two-dimension modeling // Computers and Fluids. 2013. Vol. 80., P. 202–206.
4. Кулешов А. А., Мышецкая Е. Е., Якуш С. Е. Моделирование распространения лесных пожаров на основе модифицированной двумерной модели // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 12., С. 20 – 32.
5. Makhviladze G. M., Roberts J. P., Yakush S. E. Combustion of two-phase hydrocarbon fuel clouds released into the atmosphere // Combustion and Flame. 1999. V. 118. P. 583 – 605.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ КАК ИНСТРУМЕНТ  
ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

**Мажорова Ольга Семеновна, Колмычков Вячеслав Викторович,  
Щерица Ольга Владимировна**

*д. ф. – м. н., к. ф. – м. н., к. ф. – м. н.*

*E-mail: olgamazhor@mail.ru, ksv@bk.ru, shchery@mail.ru*

*Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша, Москва,  
Россия*

Нелинейная теория гидродинамической устойчивости, одна из основных задач которой состоит в изучении устойчивости надкритических движений, *ещё* далека от своего завершения. Получено огромное число разрозненных данных, но целостной картины явления до настоящего времени нет. В частности, остаётся нерешённой задача определения наиболее "предпочтительной" формы конечно-амплитудного движения, которое устанавливается в жидкости после потери устойчивости первоначального состояния.

Доклад посвящён численному исследованию конвекции Рэлея-Бенара в ограниченном горизонтальном слое жидкости с переменной температуропроводностью при наличии внутренних источников тепла. Анализ результатов расчётов, проведённых для значений числа Рэлея, близких к критическим, позволил предложить критерий отбора устойчивой структуры течения и дать физическую интерпретацию этого критерия в зависимости от диапазона изменения числа Прандтля.

Для жидкости с постоянной температуропроводностью в докладе представлена серия вычислительных экспериментов, направленных на изучение последовательных бифуркаций стационарной валиковой конвекции в хаос спиральных дефектов и колебательную конвекцию при увеличении значения числа Рэлея от критического значения  $Ra_{cr}$  до  $6.5Ra_{cr}$ .

Результаты исследования конвекции Рэлея-Бенара, полученные прямым расчётом трёхмерных нестационарных уравнений тепловой конвекции, вносят свой вклад в изучение фундаментальной проблемы отбора реализующихся в действительности форм движения, которые возникают в результате потери устойчивости исходного состояния жидкости.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

**Петров Игорь Борисович**

член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор

E-mail: petrov@mipt.ru

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

Сеточно-характеристический метод – перспективный численный метод решения гиперболических систем уравнений, например, уравнений, описывающих упругие и акустические волны. Этот метод обладает высокой точностью и позволяет физически правильно моделировать волновые процессы в гетерогенных средах. Сеточно-характеристический метод позволяет корректно учитывать граничные условия, а также условия на поверхностях раздела сред с различными физическими характеристиками. Наиболее полно преимущества метода проявляются для одномерных уравнений, особенно в сочетании с фиксированной разностной сеткой, как в обычных сеточных методах. Однако, и в многомерном случае при использовании алгоритмов расщепления по пространственным переменным, удалось сохранить его положительные качества. Использование для гиперболических уравнений методов типа Рунге – Кutta, либо интегро-интерполяционного метода позволяет эффективно проводить обобщение методов, развитых для линейных уравнений, на нелинейный случай, в том числе, для обеспечения выполнения разностных аналогов законов сохранения, что важно при сквозном счете, например, разрывных решений. На основе разработанного автором варианта сеточно-характеристического метода был численно решен ряд важных задач сейсморазведки, сейсмостойкости, глобальной сейсмики на Земле и Марсе, медицинских приложений, неразрушающего контроля железнодорожных путей, моделирования процессов создания и характеристик композитных материалов для аэрокосмической отрасли и в других областях практического применения. Существенным преимуществом построенного метода является сохранение его устойчивости и точности при значительных деформациях среды.

**ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СИСТЕМЕ  
ГАЗ–МЕТАЛЛ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ МЕТОДАМИ  
МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ**

**Поляков Сергей Владимирович, Подрыга Виктория Олеговна**

*д. ф. – м. н., с. н. с.; д. ф. – м. н.*

*E-mail: polyakov@imamod.ru, rvictoria@list.ru*

*ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

Техническая (прикладная) газовая динамика [1] возникла как самостоятельная наука в 30е годы прошлого столетия. Мощный теоретический и практический импульс она получила в 40е-60е годы в связи с развитием авиационной и ракетной техники, атомной энергетики и других отраслей промышленности. Центральное место в технической газовой динамике занимает теория пограничного слоя [2]. С развитием методов математического моделирования [3] и применением высокопроизводительной вычислительной техники появилась возможность изучения сложных газодинамических процессов без использования дорогостоящих натурных экспериментов. В последние годы в связи с массовым внедрением нанотехнологий в промышленности появилась необходимость изучения газодинамических процессов на атомно-молекулярном уровне. Такое детальное исследование проводится в тех случаях, когда нарушается теория подобия и/или гипотеза сплошности среды. Наибольшие отклонения от теоретических оценок наблюдаются на микро- и наномасштабах при учете конкретного состава газовой среды и строения реальных поверхностей, обтекаемых сверхзвуковыми потоками газа. До некоторого момента в этих случаях успешно применялись методы расчета свободно-молекулярных течений [4]. Однако в связи с усложнением задач технической газовой динамики в конкретных приложениях все более используются методы на основе кинетического уравнения Больцмана (см. например, [5]) и методы молекулярной динамики (см., например, [6]).

В настоящей работе выбран молекулярно-динамический подход. С его помощью проведен ряд вычислительных экспериментов по взаимодействию струи азота с поверхностью никеля. Взаимодействие рассматривалось в микроканале длиной от 1 до 3 мкм и толщиной порядка 600 нм. В расчетах были учтены реальное строение никелевой основы микроканала, эффект первоначальной адсорбции молекул азота на стенках микроканала, а также сброс энергии стенок микроканала в окружающую среду. Расчеты проводились для нескольких ширин азотной струи и нескольких значений скорости, как превышающей скорость звука в азоте, так и имеющих существенно меньшие значения.

Полученные результаты расчетов показали, что взаимодействие струи со стенками микроканала носит существенно нелинейный и в ряде случаев нестационарный характер. Особенность сложная структура течения наблюдается на

начальном этапе его развития. Усредненный по поперечной координате профиль продольной скорости может иметь гауссову и гипергауссову форму, которая меняет со временем свои характерные особенности. В отдельных случаях наблюдаются биения газа о стенки канала. При увеличении длины канала ожидается развитие турбулентного течения.

Вышеуказанное нелинейное взаимодействие струи азота со стенками никелевого канала тем не менее позволяет сформировать некоторую модель пограничного слоя. Вблизи каждой из стенок канала в этой модели выделяется минимально три слоя газа, которые должны быть явно указаны при формулировке граничных условий на макроуровне. Во-первых, это основной движущийся слой газа, во-вторых, это адсорбированный на стенке слой малоподвижных молекул газа, в-третьих, это переходный слой, в котором разыгрывается теплообмен газа с поверхностью и потери скорости потока за счет трения об адсорбированный на стенке газ. Подбор конкретных параметров данной модели показывает, что ограничиться единой формулой в данном случае проблематично. Поэтому при возможности следует использовать методику многомасштабного моделирования, обсуждавшуюся нами в [7, 8] и использующую комбинацию традиционных сеточных и молекулярно-динамических расчетов.

### Список литературы

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: 1969.
2. Шлихting Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002.
4. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
5. Клосс Ю. Ю., Черемисин Ф. Г., Шувалов П. В. Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем в узком канале // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 4. С. 131 – 140.
6. Ковалев В. Л., Сазонова В. Ю., Якунчиков А. Н. Моделирование взаимодействия струи разреженного газа с преградой методами молекулярной динамики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 2. С. 56 – 58.
7. Подрыга В. О., Поляков С. В. Молекулярно-динамический расчет макропараметров газа в потоке и на границе // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 80.
8. Подрыга В. О., Поляков С. В. Многомасштабное моделирование истечения газовой струи в вакуум // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 81.

**О ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ПРОМЫШЛЕННОМ  
ПРОИЗВОДСТВЕ**

*Савенкова Надежда Петровна<sup>1</sup>*

*Ильютко Виктор Петрович<sup>2</sup>*

*Артемьева Людмила Анатольевна, Мокин Андрей Юрьевич<sup>3</sup>*

*Дряжсенков Андрей Александрович, Лапонин Владислав*

*Сергеевич<sup>4</sup>*

1: д.ф.-м.н., вns, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: к.ф.-м.н., ассистент, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

3: к.ф.-м.н., мns, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: mknandrew@mail.ru, artemieva.luda@gmail.com,  
mknandrew@cs.msu.ru, andrja@yandex.ru, lapvlad@mail.ru

Представленное в работе исследование в настоящее время является весьма актуальным для крупного промышленного производства. Календарное планирование охватывает производственные процессы от поступления первичного сырья до отгрузки готовой продукции и осуществляется на достаточно большом интервале времени с высокой точностью. Разработанная математическая модель может быть использована на промышленных предприятиях широкого диапазона.

В настоящей работе задача календарного планирования рассматривается на примере предприятия, представляющего собой совокупность отдельных сложных установок, на которых производится промежуточная или окончательная продукция. При этом сами установки находятся во взаимосвязи. В зависимости от объёма каждого вида продукции, которую необходимо произвести за фиксированное время, необходимо указать, какое время и в каком режиме должна работать каждая установка. Каждый режим установки имеет свой рецепт производства продукции и определяет вид и количество продукции заданного качества. Изменение рецепта на одной из установок, как правило, ведёт к изменению рецептов на других установках, которые используют её продукцию как сырьё. На каждой установке и на производстве в целом в каждый момент времени должно выполняться соотношение материального баланса, которым связывается объём сырья, готовой продукции и промежуточного продукта.

На небольшом производстве осуществление контроля за материальным балансом и управление производством в целях выполнения плана производства может быть произведено фактически вручную. Крупное современное производство требует привлечение вычислительных систем, периодически осуществляющих соответствующий расчёт по специально разработанным математическим моделям. Так как далеко не на всех участках производства находятся приборы, осуществляющие контроль за проходящей через этот участок

продукцией, восстановление этой информации является также одной из задач математического моделирования.

Поставленная задача разбита на три этапа:

1. Математическое моделирование календарного планирования поступления первичной продукции предприятия.
2. Математическое моделирование календарного планирования работы установок в различных режимах на предприятии.
3. Математическое моделирование календарного планирования процесса отгрузки конечной продукции на различные виды транспорта.

В настоящей работе обсуждается второй этап моделирования.

Совокупность всех установок предприятия во взаимосвязи между собой представляется в виде направленного графа, узлы которого являются установками (а также резервуарами хранения продукции и узлами смешения продукции, полученной на различных установках). Каждому узлу графа соответствуют входные и выходные потоки продукции, величины которых вычисляются в ходе решения задачи, при этом отдельные потоки продукции считаются известными с заданной точностью.

Задаче календарного планирования ставятся в соответствие две математические постановки: прямая задача (известно расписание работы установок предприятия, требуется определить состояние предприятия в любой момент времени), обратная задача (для каждой установки требуется определить момент переключения с одного режима на другой в целях выполнения плана выпуска продукции).

Численное решение поставленных математических моделей осложняется тем, что возникающие при решении задачи функционалы являются овражными и, в случае решения обратной задачи, не являются выпуклыми. Тем не менее, предложенные алгоритмы решения позволяют получить решение с достаточной точностью. В случае задачи сведения материального баланса время расчёта всего производства, состоящего из более, чем тысячи установок, составляет приблизительно 5 минут с точностью определения потоков продукции до 0.5 кг.

Результаты математического моделирования могут быть использованы не только для принятия оперативных решений по управлению предприятием, но и для анализа и оптимизации процессов на производстве.

### Список литературы

1. Конвой Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. М.: НАУКА, 1975.
2. Браун Е. В. Российская наука и передовые ИТ-технологии (отечественные решения для реального производства) // Деловой журнал Neftegaz.RU. 2018. № 4. С. 88–90.

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ,  
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЕ  
КОМПЛЕКСЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ЗАГРЯЗНЕНИЯ С УЧЕТОМ КОНКРЕТНОЙ 3D ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ  
ИЛИ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБЪЕКТА**

*Сороковикова Ольга Спартаковна<sup>1</sup>  
Дзама Дмитрий Владимирович<sup>2</sup>*

1: *д.ф. – м. н., профессор, ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

2: *м.н.с., ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

*E-mail: olga\_sorokov@mail.ru, dmitry.dzama@yandex.ru*

Доклад посвящен физико-математическим многофункциональным моделям и их основным блокам, предназначенным для расчета распространения загрязнения с учетом трёхмерной городской застройки или конкретного промышленного объекта. Неотъемлемой частью таких программных комплексов должны быть робастные CFD модели, предназначенные для расчета полей скорости ветра и динамики распространения загрязнений. Кроме этого, данная работа посвящена особенностям, связанным с радиоактивной природой загрязнения. К таким особенностям относится необходимость применения робастных методик, с помощью которых рассчитываются пространственные поля облучения от облака радиоактивного загрязнения произвольной формы, произвольно загрязнённых стен зданий и подстилающей поверхности (почвы). В последние годы в мире развивается такое направление как микро-масштабные метеорологические модели (МММ). Они применяются в основном в области вычислительной метеорологии – в таких задачах, как анализ экологической ситуации и оценка метеорологических условий в городской среде. Модели класса МММ – это узкоспециализированные CFD модели, которые, в отличие от универсальных кодов общего назначения (таких как OpenFOAM или ANSYS FLUENT), не требуют прямого разрешения вязкого и промежуточного подслоя, которое производится за счёт сгущения расчётной сетки к поверхности объекта или учетом пристеночных функций. В узкоспециализированных моделях класса МММ используется параметризация взаимодействия турбулентного потока с поверхностью земли и стенами зданий. Фактически, используются простейшие двуслойные модели, в которых не используются какие-либо пристеночные функции, а вместо них вводится класс граничащих с твёрдой поверхностью ячеек, в которых рассчитываются параметры турбулентного потока особым образом, отличным от того, как это делается в остальных расчётных ячейках. Доклад посвящен особенностям одной из таких моделей (класса МММ), разработанных авторами. А именно: её валидации; методологии сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными; оценкам качества их соответствия, в том числе метрикам

и количественным характеристикам соответствия (современным статистическим характеристикам качества моделирования в соответствии с международными рекомендациями). Отличительной особенностью этой модели, по сравнению с зарубежными аналогами – MISKAM (Европа) [1] и FEM3MP (США) [2], является параметризация турбулентного потока, импульса и кинетической энергии турбулентности вблизи поверхности, в зависимости от температурной стратификации атмосферы, а так же возможность расчёта мощности дозы внутреннего и внешнего облучения человека в произвольной точке на территории объекта в открытом пространстве. В докладе рассматривается методология оптимизации и распараллеливания трудоёмкого алгоритма расчета облучения от облака произвольной формы и произвольно загрязнённых стен зданий и подстилающей поверхности, а так же вопросы эффективности. Для верификации моделей класса МММ могут использоваться как крупномасштабные натурные эксперименты, так и лабораторные тунNELьные эксперименты, проводимые с уменьшенными копиями реальных объектов застройки. Представляемая модель была верифицирована, в частности, с использованием рекомендованной мировым научным сообществом базы данных CEDVAL, предназначеннай для верификации моделей класса МММ и с использованием рекомендованных статистических характеристик соответствия рассчитанных и измеренных в эксперименте данных. В качестве объектов застройки в этой базе данных фигурировали как отдельно стоящие здания в форме прямоугольного параллелепипеда, так и множество зданий, или здания со сложной формой. Результаты верификации показали, что разработанная модель удовлетворяет приёмочным критериям качества моделирования и не уступает как специализированным кодам, так и кодам общего назначения.

### Список литературы

1. SoundPlan. MISKAM advanced. <http://www.soundplan.eu/english/soundplan-air-pollution/miskam-advanced/>
2. Stevens T. Chan, Martin J. Leach. A Validation of FEM3MP with Joint Urban 2003 Data. Journal of applied meteorology and climatology. Vol. 46. 2007. pp. 2127-2146 Data base CEDVAL at Hamburg University, <http://www.mi.zmaw.de/index.php?id=432>

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ  
ЯВЛЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИН**

*Схиртладзе Нугзар Михайлович<sup>1</sup>*

*Чантурия Аза Зауровна<sup>2</sup>*

*Меладзе Гамлет Варламович<sup>3</sup>*

1: д.м.н., профессор, Кавказский Университет, Тбилиси, Грузия

2: д.м.н., Кавказский Университет, Тбилиси, Грузия

3: д.ф.-м.н., профессор, Институт вычислительной математики имени Н. И. Мусхелишвили

Грузинского Технического Университета, Тбилиси, Грузия

*E-mail:* nskhirtladze@cu.edu.ge, achanturia@cu.edu.ge,

*h\_meladze@hotmail.com*

Природные и искусственные водохранилища представляют собой потенциальную опасность. В частности, вследствие различного рода обвально-оползневых явлений у бортов водохранилища, на поверхности воды возникают гравитационные волны. Искусственные водохранилища содержат опасность и другого рода. Плотины могут быть разрушены под влиянием естественных (сейсмических) или других (диверсия, террористический акт) причин.

Для разработки оптимального плана эвакуации населения и ценностей из нижнего бьефа в случае прорыва плотины или при образовании волн высокой амплитуды, актуальным является надежное прогнозирование характера распространения вырвавшихся лавинообразных водных масс.

В докладе построена двумерная математическая модель формированная прорывной волны при разрушении плотин.

Для численного решения соответствующих уравнений в частных производных построены и обоснованы двухслойные линеаризованные разностные схемы с нелинейным регуляризатором.

Конкретные численные расчеты параметров оползневых волн проведены на примере оползня Ток, обрушение которого произошло в водохранилище Вайонт (Италия) в 1963 г.

Результаты численных расчетов представлены в виде двумерных и трехмерных графиков.

Расчеты показали удовлетворительное совпадение с известными результатами натурных наблюдений.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ  
ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

**Титарев Владимир Александрович**

*д. ф. – м. н., профессор*

*E-mail: titarev@ccas.ru*

*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

В последние 10 лет автором доклада разрабатываются методы решения трехмерного кинетического уравнения с интегралом столкновений Шахова [1] (*S*-модели) для решения пространственных задач [2-3]. Данные методы реализованы в пакете программ “Несветай”. Основными приложениями являются моделирование течений в вакуумных установках и высотная аэродинамика спускаемых аппаратов и спутников. Отличительными особенностями разрабатываемых численных методов состоят в поддержке использования блочно-структурных и гибридных неструктурных сеток и применении экономичной неявной схемы высокого порядка аппроксимации на таких сетках.

В настоящем докладе будет представлен обзор результатов автора, полученных за последние 3 года: новые численные методы, программная реализация в рамках двухуровневой модели параллельных вычислений MPI + OpenMP, сравнения с методом прямого статистического моделирования и решением уравнения Больцмана. Будут приведены примеры расчетов внешнего гиперзвукового обтекания тел сложной пространственной формы с использованием до 256 узлов на системах RSK Petastream [4], установленных в Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН и Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого.

Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ 18-08-00501.

**Список литературы**

1. Шахов Е.М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. N. 5. С. 142–145
2. Титарев. В.А. Неявный численный метод расчета пространственных течений разреженного газа на неструктурных сетках // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2010 Т. 50. N 10. С. 1811-1826.
3. V.A. Titarev. Application of model kinetic equations to hypersonic rarefied gas flows // Computers and Fluids. 2018. V. 169. P. 62-70.
4. Semin A., Druzhinin E., Mironov V., Shmelev A., Moskovsky A.. The performance characterization of the RSC PetaStream module // Lecture Notes in Computer Science. 2014. V. 8488. P. 420–429.

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
МАЛОПЕРИОДНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ К КАНОНИЧЕСКОМУ  
ВИДУ**

*Трофимов Вячеслав Анатольевич,  
Разгулин Александр Витальевич,  
Степаненко Светлана Владимировна*

*д.ф.-м.н., профессор; д.ф.-м.н., профессор; аспирант*

*E-mail: vatro@cs.msu.ru, razgulin@cs.msu.ru, s.stepanenko@cs.msu.ru*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

В настоящей работе рассматриваются обобщенные уравнения Шредингера, описывающие взаимодействие малопериодных лазерных импульсов в среде с кубичной и квадратичной нелинейностью. Для случая распространения одиночного лазерного импульса в кубичной среде в [1] было предложено нелинейное обобщенное уравнение Шредингера, содержащее производную по времени от нелинейного отклика среды, а также смешанные производные по времени и координате, вдоль которой распространяется излучение. В работе [2] был разработан подход, описывающий преобразование более простого обобщенного уравнения Шредингера с оператором, не содержащим смешанных производных.

Для обобщенного уравнения, рассматриваемого в настоящей работе, предлагается оригинальное преобразование, которое позволяет привести уравнение к каноническому виду, не содержащему производных от нелинейного отклика среды и смешанных производных. Такой вид уравнения позволяет построить инварианты, характеризующие процесс распространения малопериодных импульсов в кубичной среде.

В случае распространения импульсов в среде с квадратичной нелинейностью рассматривается задача двухчастотного взаимодействия в рамках системы обобщенных нелинейных уравнений Шредингера. Развиваемый нами подход также позволил преобразовать систему уравнений к каноническому виду. В работе доказаны теоремы существования инвариантов (энергии, спектрального, гамильтона и др.) для дифференциальных задач. Полученные инварианты позволяют контролировать результаты численных экспериментов, в основе которых лежат консервативные разностные схемы.

**Список литературы**

1. Brabec T., Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime // Phys.Rev.Lett. 1997. Vol. 78. P. 3282 – 3285.
2. Трофимов В. А. О новом подходе к моделированию нелинейного распространения сверхкоротких лазерных пучков // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 5. С. 835 – 839.

**ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ, ВКЛЮЧАЯ  
СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
РАЗВИТИЯ И ВНЕДРЕНИЯ В ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Шагалиев Рашид Мирзагалиевич**

*д.ф.-м.н., старший научный сотрудник*

*E-mail: rmshagaliev@vniiief.ru*

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский  
научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров,  
Россия*

Развитие и внедрение в практические приложения на качественно новом уровне технологий высокопроизводительных вычислений, включая суперкомпьютерное моделирование, входит в число особо актуальных задач. Ключевой целью работ по данному направлению является создание технологий комплексного математического моделирования, описывающих с требуемым уровнем предсказательности процессы, протекающие при работе сложных технических систем, говоря иначе, создание суперкомпьютерных двойников высокотехнологичных изделий и систем и на их базе технологий цифровых испытаний.

Задача создания таких технологий требует развития высокоточных физико-математических моделей, эффективных математических методов и алгоритмов численного моделирования широкого круга физических процессов.

Учитывая современные тенденции в развитии архитектур высокопроизводительных вычислительных систем, необходимо также активное развитие методов и алгоритмов высокопараллельных вычислений, ориентированных на возможность эффективных расчетов на супер-ЭВМ с гетерогенной архитектурой и массовым параллелизмом.

Другими важными составными частями работ по развитию современных технологий высокопроизводительных вычислений являются:

- развитие новых моделей свойств материалов на основе методов молекуллярной динамики и первых принципов, создание на их основе баз данных;

- создание методологии верификации и валидации суперкомпьютерных двойников изделий; создание с этой целью баз экспериментальных данных и библиотек верификационных и валидационных задач;

- развитие нормативной базы, регламентирующей применение высокопроизводительных вычислений как составной части наукоемких расчетно-экспериментальных исследований и технологий проектирования и создания сложных технических систем.

В докладе на примере двух конкретных областей работ, проводимых в РФЯЦ-ВНИИЭФ: математического моделирования процессов лазерного тер-

моядерного синтеза и суперкомпьютерного моделирования в интересах проектирования и создания высокотехнологичных изделий машиностроения (авиастроения, судостроения, ракетно-космической отрасли и др.), проводится анализ текущего состояния и излагаются актуальные проблемы в области создания технологий высокопроизводительных вычислений. Даётся краткое описание моделей и численных методов, разработанных в РФЯЦ-ВНИИЭФ, и реализованных в крупных комплексах программ. В частности, представлен пакет программ ЛОГОС, предназначенный для моделирования процессов аэро-, гидро-, газодинамики, турбулентности, прочности и деформации, переноса энергии и частиц в многогрупповом кинетическом приближении и других процессов. Дано краткое изложение накопленного опыта по созданию отечественной интегрирующей платформы для суперкомпьютерного моделирования, технологии цифровых испытаний, по развитию методов высокопараллельных векторизованных вычислений на супер-ЭВМ различной архитектуры. Приводятся примеры решения прикладных задач физики высоких плотностей энергии и высокотехнологичных отраслей машиностроения.

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА**

*Щерица Ольга Владимировна<sup>1</sup>*

*Шатров Олег Александрович<sup>2</sup>*

*Мажорова Ольга Семеновна<sup>3</sup>*

1: к.ф. – м. н., ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

2: МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

3: д.ф. – м. н., ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail:* Shchery@mail.ru, Shatrov.Oleg.A@gmail.com,  
OlgaMazhor@mail.ru

В работе представлены два алгоритма решения трёхмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса в естественных переменных. Первый основан на совместном решении уравнения переноса импульса и уравнения неразрывности. Для решения систем сеточных уравнений использовалась процедура CLUSTER\_SPARSE\_SOLVER, реализующая прямой алгоритм LU факторизации матрицы. Процедура содержится в библиотеке Intel(R) Math Kernel Library 2019. Такой подход обеспечивает безусловную устойчивость алгоритма, однако для его применения необходимы большие вычислительные мощности [1]. Второй алгоритм для решения уравнений Навье–Стокса является методом типа предиктор–коректор с использованием яной разностной схемы для уравнений Навье–Стокса. Уравнение для давления решается методом быстрого преобразования Фурье [2]. Расчеты проводились на гибридном вычислительном кластере К-60, который установлен в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, с использованием технологий OpenMP и OpenACC.

Сравнение алгоритмов проведено на примере задачи о развитии конвективной неустойчивости в горизонтальном слое жидкости с однородным внутренним подогревом. Проведены оценки затрат оперативной памяти, а также машинного времени на расчет одного конвективного времени и всей задачи в целом. Благодаря использованию технологий OPENMP и OPENACC удалось существенно сократить время расчета и увеличить размер пространственной сетки. Это открывает новые возможности для численного исследования гидродинамических процессов в областях большого объема.

**Список литературы**

1. Шатров О. А., Щерица О. В., Мажорова О. С. Безусловно устойчивый алгоритм решения трёхмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 996–1008.
2. Шатров О. А., Щерица О. В., Мажорова О. С. Параллельный алгоритм для решения уравнений термогравитационной конвекции // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 239. 21 с.